

зависимости  $Re_*$  от  $T_*$  для различных  $A$  (линии 3, 4 отвечают  $A = 23$  и 50). Уже при семикратном перегреве  $Re_*$  очень слабо меняется. Проведенные расчеты для профилей (1) и (2) практически совпадают. Поскольку при расчете их устойчивости использовались различные методы, это обеспечило взаимный контроль.

Таким образом, с ростом концентрации частиц наблюдается стабилизация потока. Нагрев струи определенным образом (рис. 1, кривые 3, 4, рис. 4, кривая 2) гасит эффект стабилизации, не нарушая, однако, линейной зависимости  $Re_*$  от  $A$ , т. е., как и в изотермическом случае, показана возможность значительной стабилизации струи частицами ( $Re_*$  могут увеличиться на несколько порядков величины). Кроме того, отмечена большая устойчивость сильно перегретой струи со ступенчатым профилем по сравнению со струей с автомоделным профилем, в то время как в изотермическом случае значения  $Re_*$  совпадают.

Авторы признательны В. Н. Штерну за полезные консультации и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курочкина Е. П., Стронгин М. П. Нелинейная устойчивость двухфазных струй // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
2. Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 13, N 1.
3. Michael D. H. The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 18, N 1.
4. Нармуратов Ч. Б., Соловьев А. С. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 1.
5. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
6. Курочкина Е. П. Смена режима в плоской струе со ступенчатым профилем скорости // ПМТФ.— 1984.— № 6.
7. Курочкина Е. П. Устойчивость и ветвление плоских двухфазных струйных течений // Устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
8. Курочкина Е. П. Расчет нелинейной устойчивости двухфазных течений // Турбулентные двухфазные течения и техника эксперимента.— Таллин: Ин-т термодинамики и электрофизики АН ЭССР, 1985.— Ч. 2.

Поступила 16/VI 1987 г.

УДК 536.25

### О ГИДРОХИМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КАПЛИ ПРИ МАССОПЕРЕНОСЕ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ

А. А. Головин, Л. М. Рабинович

(Москва)

Известно, что массоперенос веществ, способных существенно изменять поверхностное натяжение, и межфазная химическая реакция могут приводить к возникновению градиентов поверхностного натяжения. Эти градиенты в результате эффекта Марангони [1] способны вызывать неустойчивость поверхности раздела фаз и приводить к образованию приповерхностных конвективных структур, а также к развитию в объемах фаз межфазной конвекции и турбулентности [2]. Исследование гидродинамической устойчивости жидкой реагирующей капли, окруженной газом или другой несмешивающейся жидкостью, представляет особый интерес в связи с проблемой интенсификации процессов массопереноса при хемосорбции газов и жидкостной экстракции, сопровождающейся химическими реакциями [3].

Задача об устойчивости сферической границы раздела фаз (поверхности капли или пузыря) при наличии поверхностных реакций и переноса поверхностно-активных веществ (ПАВ) в наиболее общем виде поставлена в [4, 5]. В [4] приведен линейный анализ устойчивости стационарного состояния, учитывающего произвольное число реагирующих веществ и химические реакции на поверхности, зависимость скорости которых от концентрации описывается произвольной функцией, получено дисперсионное уравнение и проведен его анализ в приближении малых капель для одного реагирующего вещества. При этом подробно рассматривалась деформационная устойчивость поверхности капли. Результаты этой работы обобщены в [5], где при условии локального адсорбционного равновесия между поверхностью раздела и примыкающими слоями жидкости учитывалась конвективная диффузия реагентов в объемах фаз.

В настоящей работе наряду с учитываемыми ранее эффектами рассмотрено влияние на гидрохимическую устойчивость капли процесса адсорбции ПАВ, протекающего с конечной скоростью, в отличие от указанных выше работ, где эта скорость считалась бесконечно большой. Основное внимание уделено возникновению неустойчивости и нахождению критических значений безразмерных параметров, характеризующих скорость межфазной химической реакции и поверхностную активность переносимых реагентов.

1. Рассмотрим каплю жидкости, погруженную в бесконечную однородную покоящуюся жидкость, не смешивающуюся с первой. В каждой фазе растворено вещество, обладающее поверхностно-активными свойствами и нерастворимое в другой фазе. За счет диффузии вещества подводятся к поверхности раздела фаз, адсорбируются на ней и вступают друг с другом в химическую реакцию. Скорость их адсорбции — десорбции на поверхности сравнима со скоростью химической реакции и скоростью диффузионного подвода вещества к межфазной границе. Продукты реакции поверхностно-активными свойствами не обладают и быстро (по сравнению с адсорбцией поверхностно-активных реагентов) отводятся с поверхности раздела фаз. Рассматриваемая реакция относится к широкому классу межфазных реакций, которые имеют весьма малые тепловые эффекты [6]. Поэтому при исследовании динамики межфазной поверхности будем пренебрегать термокапиллярными эффектами по сравнению с концентрационно-капиллярными, обусловленными зависимостью поверхностного натяжения от концентрации реагентов. При этом учитываются эффекты, связанные с наличием поверхностной вязкости и инерции адсорбированных ПАВ, которые играют существенную роль в кинетике некоторых межфазных реакций [7].

Выберем сферическую систему координат с центром, совпадающим с центром масс капли. Стационарные концентрации реагентов в невозмущенной системе будем считать распределенными сферически-симметрично по степенному закону  $C_1 = C_{10}(1 - a_1 r^{-n_1})$ ,  $C_2 = C_{20}(1 - a_2 r^{n_2})$ , где  $C_i$  — концентрации реагентов в объемах фаз;  $r$  — радиальная координата;  $C_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) — концентрации реагентов на бесконечности и в центре капли соответственно;  $a_i$ ,  $n_i > 0$  — константы, индекс  $i = 1$  относится к внешней жидкости,  $i = 2$  — к жидкости капли. Такие распределения концентраций являются решениями стационарных уравнений: а)  $\Delta C_i = 0$  ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ ), б)  $\Delta C_i = Q_i = \text{const}$  ( $-n_1 = n_2 = 2$ ), в)  $\Delta C_1 = 0$ ,  $\Delta C_2 = Q$  ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ). Случай «б», соответствующий образованию поверхностно-активных реагентов в объемах фаз за счет наличия стационарных равномерных распределенных источников (например, в результате объемной реакции нулевого порядка), рассмотрен в [5]. В случае «в» ПАВ образуются внутри капли в результате реакции нулевого порядка, а вне капли источники отсутствуют. При других значениях показателей  $n_1$  и  $n_2$  рассматриваемые стационарные профили концентрации могут служить аппроксимациями реальных концентрационных распределений, отвечающих объемным источникам или стокам другого вида. Выбранные таким образом распределения концентраций реагирующих ПАВ позволяют выяснить влияние стационарных профилей концентрации на характер устойчивости системы. Поверхность капли будем считать сферической и недеформируемой (поверхностное натяжение  $\sigma$  велико). При этом под устойчивостью межфазной поверхности подразумевается устойчивость по отношению к образованию приповерхностных конвективных движений жидкости.

Исследование гидрохимической устойчивости капли математически представляет собой решение задачи устойчивости относительно бесконечно малых возмущений скорости течения жидкости и концентраций растворенных в обеих фазах и адсорбированных на межфазной поверхности поверхностно-активных реагентов.

Возмущения скорости течения жидкости описываются в выбранной сферической системе координат безразмерными линеаризованными уравнениями Навье — Стокса, уравнениями неразрывности течения и гра-

ничными условиями непротекания и непроскальзывания на межфазной границе:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_i}{\partial r} + R_i^{-1} \left( \Delta u_i - \frac{2}{r^2} u_i - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_i \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right);$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_i) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_i) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} = 0;$$

$$(1.3) \quad u_1 = u_2 = 0, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 \quad \text{при } r = 1, \\ t = t'/\tau, \quad r = r'/a, \quad (u_i, v_i, w_i) = (u'_i \tau/a, \\ v_i \tau/a, w_i \tau/a), \quad p_i = p'_i \tau^2 / \rho'_i a^2, \quad R_i = a^2 / \nu_i \tau.$$

Здесь  $t'$  — время;  $r'$  — радиальная координата;  $u'_i, v'_i, w'_i$  — компоненты скорости по  $(r', \theta, \varphi)$ ;  $\rho'_i, p'_i$  — плотность и давление;  $\nu_i$  — кинематическая вязкость;  $\tau$  — характерное время поверхностной химической реакции;  $a$  — радиус капли; уравнения для остальных компонент скорости не выписаны, поскольку задача сводится к решению уравнения для радиальной составляющей скорости.

Возмущения объемных и поверхностных концентраций описываются линеаризованными уравнениями конвективной диффузии в объемах фаз и баланса адсорбированного вещества на поверхности капли, а также условием баланса диффузионного и адсорбционного потоков на межфазной границе:

$$(1.4) \quad \frac{\partial z_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial z_{i0}}{\partial r} = \chi_i^{-1} \Delta z_i;$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + \gamma_{i0} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) = \\ = \chi_{si}^{-1} L^2 \gamma_i - \sum_{j=1,2} f_{ij} \gamma_j + \sum_{j=1,2} b_{ij} \gamma_j + b_{iz} z_i;$$

$$(1.6) \quad d_i (-1)^i \frac{\partial z_i}{\partial r} = \sum_{j=1,2} b_{ij} \gamma_j + b_{iz} z_i,$$

$$z_i = -C_i / C_{i0}, \quad \gamma_i = \Gamma_i / \Gamma_i^*, \quad \chi_i = a^2 / D_i \tau,$$

$$\chi_{si} = a^2 / D_{is} \tau, \quad d_i = D_i \tau C_{i0} / a \Gamma_i^* = (C_{i0} a / \Gamma_i^*) \chi_i^{-1},$$

$$f_{ij} = \frac{\tau}{\Gamma_i^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma_j} F_i(C_i, \Gamma_1, \Gamma_2) \right],$$

$$b_{ij} = \frac{\tau}{\Gamma_i^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma_j} J_i(C_i, \Gamma_1, \Gamma_2) \right], \quad b_{iz} = \frac{\tau}{\Gamma_i^*} \left[ \frac{\partial}{\partial z_i} J_i(C_i, \Gamma_1, \Gamma_2) \right]_0,$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L^2 = \Delta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Здесь  $C_i$  — возмущения концентраций реагентов в  $i$ -й фазе;  $\Gamma_i$  — поверхностная концентрация  $i$ -го реагента;  $\Gamma_i^*$  — предельная поверхностная концентрация;  $D_i$  и  $D_{si}$  — коэффициенты объемной и поверхностной диффузии;  $F_i(\Gamma_1, \Gamma_2)$  и  $J_i(C_i, \Gamma_1, \Gamma_2)$  — функции, описывающие кинетику поверхностной химической реакции и адсорбции; индекс 0 относится к стационарному состоянию.

Возмущения скорости течения и поверхностных концентраций должны удовлетворять условиям баланса нормальной и касательной компонент напряжений на межфазной поверхности с учетом эффекта Марангони, поверхностных вязкостей и инерции адсорбированного вещества [8]. Поскольку межфазное натяжение велико и капля считается недефор-

мируемой, условие для нормальных напряжений сведется лишь к скачку давления на поверхности раздела фаз. Условия баланса касательных напряжений примут вид

$$(1.7) \quad \gamma_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = m_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - v_1 \right) - m_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial r} - v_2 \right) + M_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} + \\ + M_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \kappa_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 \sin \theta) + \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right] \right\} + \\ + \kappa_2 \left\{ 2v_1 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (w_1 \sin \theta) \right) \right] \right\};$$

$$(1.8) \quad \gamma_0 \frac{\partial w_i}{\partial t} = m_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - w_1 \right) - m_2 \left( \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - w_2 \right) + \\ + \frac{1}{\sin \theta} \left( M_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} + M_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi} \right) + \kappa_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 \sin \theta) + \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) \right\} + \\ + \kappa_2 \left\{ 2w_1 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (w_1 \sin \theta) \right) \right] \right\},$$

$$m_i = \frac{\eta_i \tau}{a \Gamma_i^*}, \quad \kappa_1 = \frac{(k + \varepsilon) \tau}{a^2 \Gamma_i^*}, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon \tau}{a^2 \Gamma_i^*},$$

$$M_i = \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma_i} \frac{\tau}{a^2} \frac{\Gamma_i^*}{\Gamma_i}, \quad \gamma_0 = \frac{\Gamma_{10} + \Gamma_{20}}{\Gamma_1^*}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma_i} = \text{const},$$

где  $\eta_i$  — объемные вязкости;  $k$  и  $\varepsilon$  — поверхностные дилатационная и сдвиговая вязкости;  $M_i$  — числа Марангони.

2. Уравнение (1.1) с помощью уравнения неразрывности (1.2) может быть переписано:

$$(2.1) \quad \partial u_i / \partial t = -\partial p_i / \partial r + R_i^{-1} r^{-1} \Delta (r u_i).$$

Так как в линеаризованном уравнении Навье—Стокса, не содержащем конвективных членов, давление представляет собой гармоническую функцию, то с учетом условия ограниченности внутри капли и на бесконечности имеем

$$(2.2) \quad p_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_{1l} r^{-l-1} Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega t},$$

$$p_2 = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} r^l Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega t}, \quad Y_l(\theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^{m=l} b_{ml} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

( $Y_l^m(\theta, \varphi)$  — сферические функции,  $b_{ml}$ ,  $a_{il}$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные).

Решение (2.1) ищем в виде

$$(2.3) \quad u_i = \sum_{l=1}^{\infty} r^{-1} U_{il}(r) Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega t}.$$

Здесь мода с номером  $l = 0$  не рассматривается, так как жидкости несжимаемые, индекс  $l$  у  $\omega$  для краткости опускается.

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), получим уравнения для  $U_{il}$ , решения которых, ограниченные в центре капли и стремящиеся к нулю на бесконечности, запишем в форме

$$(2.4) \quad U_{1l} = A_{1l} r^{-l-1} + B_{1l} K_{l+1/2}^*(q_1 r), \quad U_{2l} = A_{2l} r^l + B_{2l} I_{l+1/2}^*(q_2 r), \\ I_{l+1/2}^*(x) = (\pi/2x)^{1/2} I_{l+1/2}(x), \quad K_{l+1/2}^*(x) = (\pi/2x)^{1/2} K_{l+1/2}(x),$$

где  $I_{l+1/2}(x)$ ,  $K_{l+1/2}(x)$  — модифицированные сферические функции Бесселя первого и третьего рода [9];  $A_{il}$  и  $B_{il}$  — произвольные постоянные. Используя уравнение неразрывности (1.2) и граничные условия (1.3),

а также рекуррентные соотношения для функций  $I_{l+1/2}^*(x)$  и  $K_{l+1/2}^*(x)$ , найдем

$$(2.5) \quad A_{1l} + B_{1l}K_{l+1/2}^*(q_1) = 0, \quad A_{2l} + B_{2l}I_{l+1/2}^*(q_2) = 0, \\ B_{1l}q_1K_{l-1/2}^*(q_1) + B_{2l}q_2I_{l+3/2}^*(q_2) = 0.$$

Рассмотрим уравнение (1.4). Будем считать, что  $z_{i0} = a_1 r^{-n_1}$ ,  $z_{20} = a_2 r^{n_2}$ ,  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ . Решение (1.4) ищем в виде

$$(2.6) \quad z_i = \sum_{l=1}^{\infty} Z_{il}(r) Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega t}.$$

Тогда для  $Z_{il}$  получаем уравнения с ограниченными в центре капли и стремящимися к нулю на бесконечности решениями

$$(2.7) \quad Z_{1l}(r) = C_{1l}K_{l+1/2}^*(s_1 r) + B_{1l}\beta_{1l}(s_1)I_{l+1/2}^*(s_1 r) + \zeta_{1l}(r), \\ Z_{2l}(r) = C_{2l}I_{l+1/2}^*(s_2 r) + B_{2l}\beta_{2l}(s_2)K_{l+1/2}^*(s_2 r) + \zeta_{2l}(r);$$

$$(2.8) \quad \zeta_{il}(r) = I_{l+1/2}^*(s_i r) \int_1^r W^{-1}K_{l+1/2}^*(s_i r) h_i(r) dr - \\ - K_{l+1/2}^*(s_i r) \int_1^r W^{-1}I_{l+1/2}^*(s_i r) h_i(r) dr, \quad \zeta_{il} = d\zeta_{il}/dr = 0, \quad r = 1;$$

$$(2.9) \quad \beta_{1l}(s_1) = \chi_1 a_1 n_1 s_1^{n_1} \int_{s_1}^{\infty} t^{-n_1} K_{l+1/2}^*(t) [K_{l+1/2}^*(\lambda_1 t) - \\ - s_1^{l+1} t^{-l-1} K_{l+1/2}^*(\lambda_1 s_1)] dt;$$

$$(2.10) \quad \beta_{2l}(s_2) = -\chi_2 a_2 n_2 s_2^{-n_2} \int_0^{s_2} t^{n_2} I_{l+1/2}^*(t) [I_{l+1/2}^*(\lambda_2 t) - \\ - s_2^{-l} t^l I_{l+1/2}^*(\lambda_2 s_2)] dt, \\ h_i(r) = \chi_i r^{-1} U_{il}(r) \partial z_{i0} / \partial r, \quad W = \pi / (2s_i r^2)$$

( $W$  — вронсиан функций  $K_{l+1/2}^*(s_i r)$  и  $I_{l+1/2}^*(s_i r)$ ,  $C_{1l}$ ,  $C_{2l}$  — произвольные постоянные).

Рассмотрим граничные условия (1.5)–(1.8). Применяя к (1.7) операцию  $(\sin \theta)^{-1}(\partial/\partial\theta)\sin \theta$ , а к уравнению (1.8) — операцию  $(\sin \theta)^{-1}\partial/\partial\varphi$  и складывая получившиеся выражения, с учетом уравнения непрерывности (1.2) находим

$$(2.11) \quad \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) = m_1 \left[ L^2 u_1 - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) \right] - \\ - m_2 \left[ L^2 u_2 - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_2) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_2) \right] + M_1 L^2 \gamma_1 + M_2 L^2 \gamma_2 - \\ - \kappa_1 L^2 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) - 2\kappa_2 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1).$$

Возмущения поверхностных концентраций реагентов представим в виде

$$\gamma_i = \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_{il} Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega t}.$$

Подставляя это выражение, а также (2.4), (2.7) в уравнение (1.6) и используя соотношения (2.5) и рекуррентные формулы для функций  $I_{l+1/2}^*(x)$  и  $K_{l+1/2}^*(x)$ , получим линейную однородную систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $B_{il}$ ,  $\Gamma_{il}$ ,  $C_{il}$ :

$$(2.12) \quad ||a_{ij}|| E^T = 0, \quad E = (B_{1l}, B_{2l}, \Gamma_{1l}, \Gamma_{2l}, C_{1l}, C_{2l}), \\ a_{11} = q_1 K_{l-1/2}^*(q_1), \quad a_{12} = q_2 I_{l+3/2}^*(q_2),$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= q_1 K_{l-1/2}^*(q_1) (\gamma_0 \omega + 2m_1 + \kappa_1 l(l+1) - 2\kappa_2) + m_1 q_1^2 K_{l+1/2}^*(q_1), \quad a_{22} = \\
&= q_2 I_{l+3/2}^*(q_2) 2m_2 - m_2 q_2^2 I_{l+1/2}^*(q_2), \quad a_{23} = M_1 l(l+1), \quad a_{24} = M_2 l(l+1), \\
a_{31} &= \gamma_{10} q_1 K_{l-1/2}^*(q_1) - b_{1z} \beta_{1l}(s_1) I_{l+1/2}^*(s_1), \quad a_{33} = \omega + \chi_{s1} l(l+1) + \\
&+ f_{11} - b_{11}, \quad a_{34} = f_{12} - b_{12}, \quad a_{35} = -b_{1z} K_{l+1/2}^*(s_1), \quad a_{41} = \gamma_{20} q_1 K_{l-1/2}^*(q_1), \\
a_{42} &= -b_{2z} \beta_{2l}(s_2) K_{l+1/2}^*(s_2), \quad a_{43} = f_{21} - b_{21}, \quad a_{44} = \omega + \chi_{s2} l(l+1) + f_{22} - \\
&- b_{22}, \quad a_{46} = -b_{2z} I_{l+1/2}^*(s_2), \quad a_{51} = \beta_{1l}(s_1) [b_{1z} I_{l+1/2}^*(s_1) + d_1 (s_1 I_{l+3/2}^*(s_1) + \\
&+ l I_{l+1/2}^*(s_1))], \quad a_{53} = b_{11}, \quad a_{54} = b_{12}, \quad a_{55} = b_{1z} K_{l+1/2}^*(s_1) - d_1 (s_1 K_{l-1/2}^*(s_1) + \\
&+ (l+1) K_{l+1/2}^*(s_1)), \quad a_{63} = b_{21}, \quad a_{64} = b_{22}, \quad a_{66} = b_{2z} I_{l+1/2}^*(s_2) - \\
&- d_2 (s_2 I_{l+3/2}^*(s_2) + l I_{l+1/2}^*(s_2)) \quad (\text{остальные элементы} - \text{нули}).
\end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель системы (2.12), имеем исконое характеристическое уравнение, полное решение которого может быть получено лишь численно с помощью ЭВМ. Мы ограничимся исследованием состояний с нейтральной устойчивостью без осцилляций и анализом ряда важных предельных случаев.

3. Для нахождения условия существования нейтральных безосцилляционных состояний положим мнимую часть корней уравнения  $\Delta(\omega) \equiv \det \|a_{ij}\| = 0$  равной нулю  $\text{Im} \omega = 0$  и перейдем к пределу  $\text{Re} \omega \rightarrow 0$ . При этом разделим первый столбец определителя  $\Delta(\omega)$  на  $q_1 K_{l-1/2}^*(q_1)$ , второй — на  $q_2 I_{l+3/2}^*(q_2)$ , пятый — на  $K_{l+1/2}^*(s_1)$ , шестой — на  $I_{l+1/2}^*(s_2)$  и перейдем к пределу  $\omega \rightarrow 0$ ,  $s_i \rightarrow 0$ ,  $q_i \rightarrow 0$ ,  $q_i/s_i = \lambda_i = \text{const}$ . Используя свойства функций  $K_{l+1/2}^*(x)$ ,  $I_{l+1/2}^*(x)$ , находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x K_{l+1/2}^*(x)}{K_{l-1/2}^*(x)} = 2l - 1, \quad \lim_{s_1, q_1 \rightarrow 0} \frac{\beta_{1l}(s_1) I_{l+1/2}^*(s_1)}{q_1 K_{l-1/2}^*(q_1)} = -\chi_{s1} a_{11} n_1 \varphi_{11},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x I_{l+1/2}^*(x)}{I_{l+3/2}^*(x)} = 2l + 3,$$

$$\lim_{s_2, q_2 \rightarrow 0} \frac{\beta_{2l}(s_2) K_{l+1/2}^*(s_2)}{q_2 I_{l+3/2}^*(q_2)} = \chi_{s2} a_{22} n_2 \varphi_{12},$$

$$\varphi_{11} = [(2l+1)(2l+n_1+1)(2l+n_1-1)]^{-1},$$

$$\varphi_{12} = [(2l+1)(2l+n_2+1)(2l+n_2+3)]^{-1}.$$

После некоторых преобразований приводим уравнение нейтральной устойчивости к виду

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} \gamma_0 + \mu_l & M_1 l(l+1) & M_2 l(l+1) \\ \gamma_{10} - B_1 & f_{11} + A_{11} & f_{12} + A_{12} \\ \gamma_{20} - B_2 & f_{21} + A_{21} & f_{22} + A_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{ij} = b_{ij} \frac{d_i (l + \delta_{1i})}{b_{iz} - d_i (l + \delta_{1i})} + \chi_{si} l(l+1) \delta_{ij},$$

$$B_i = p_i \varphi_{1i} b_{iz} \frac{d_i (2l+1)}{b_{iz} - d_i (l + \delta_{1i})}, \quad \mu_l = (m_1 + m_2)(2l+1) + \kappa_1 l(l+1) - 2\kappa_2$$

( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). Здесь члены  $f_{ij}$  характеризуют поверхностную химическую реакцию,  $A_{ij}$  — совместное действие процессов адсорбции и диффузии вещества из объемов фаз,  $B_i$  — адсорбцию и конвективную диффузию в объемах фаз. Из структуры выражений для  $A_{ij}$  и  $B_i$  видно, что при больших значениях  $d_i$  (большие коэффициенты диффузии) для высокомолекулярных возмущений ( $l \gg 1$ ) нельзя не учитывать конечность скорости адсорбции.

Рассмотрим подробнее случай одного вещества. Из (3.1) имеем

$$(3.2) \quad f = -A + Ml(l+1)(\gamma_0 - B)/(\gamma_0 + \mu_l)$$

(индексы у  $f$ ,  $A$  и  $B$  опущены).

Формула (3.2) — обобщение зависимости, полученной в [4], с учетом конечной скорости адсорбции и существования начального неоднородного профиля концентрации в объемах фаз. Ее можно рассматривать как условие на критический химический коэффициент  $f$ . Видно, что так как  $\partial J/\partial \Gamma_i < 0$ ,  $\partial J/\partial C_i > 0$ , то  $b_{ij} < 0$ ,  $b_{iz} < 0$ ,  $A > 0$ , а знак  $B$  зависит от направления переноса вещества к капле:  $\text{sign } B_i = \text{sign } p_i$ . Из (3.2) вытекает, что, для того чтобы возникла гидрохимическая неустойчивость, критическое значение коэффициента  $f$  должно быть отрицательным и превышать по модулю некоторое значение, определенное диффузией, адсорбцией, поверхностной активностью реагентов и стационарным профилем концентрации. В результате анализа уравнения (3.2) можно сделать следующие выводы:

1. Пусть начальный профиль концентрации в объеме отсутствует:  $B = 0$ . Тогда наличие у реагирующего вещества поверхностной активности ( $M < 0$ ) делает систему более устойчивой. Действительно, в этом случае условие чисто химической неустойчивости  $f + A < 0$  заменяется условием (3.2), причем критическое значение химического коэффициента  $f$  увеличивается по модулю. Чисто химическая неустойчивость подразумевает, что малые возмущения объемных и поверхностных концентраций растут за счет того, что скорость межфазной химической реакции с повышением концентраций реагентов растет медленнее, чем приток вещества на межфазную границу.

2. Пусть имеется начальный неоднородный профиль концентрации:  $B \neq 0$ . Тогда критическое значение  $f$  существенно зависит от знака и величины  $B$ . В случае, когда инерцией вещества на границе раздела фаз можно пренебречь ( $\gamma_0 = 0$ ), имеем  $f = -A - Ml(l+1)B/\mu_l$ . Следовательно, если вещество поверхностно-активно и переносится к поверхности капли ( $B > 0$ ), то критическое значение  $f$  уменьшается по модулю, т. е. система становится более неустойчивой. Если вещество отводится от капли ( $B < 0$ ), то система, наоборот, стабилизируется.

3. Поскольку  $B$  зависит от  $l$ , то при  $\gamma_0 \neq 0$  для разных гармоник поверхностная активность вещества будет по-разному влиять на устойчивость системы: при  $\gamma_0 - B > 0$  стабилизировать, при  $\gamma_0 - B < 0$  дестабилизировать.

4. Если скорость адсорбции велика (т. е. имеет место адсорбционное равновесие), то  $A \sim (b_{ij}/b_{iz})d_i(l + \delta_{1i})$  и растет пропорционально  $l$ . Однако при конечной скорости адсорбции, оказывающей большее влияние на гармоники с высокими номерами,  $A \rightarrow (-b_{ij}) = \text{const}$  и, следовательно, порог неустойчивости для  $f$  снижается. Значит, конечная скорость адсорбции дестабилизирует систему.

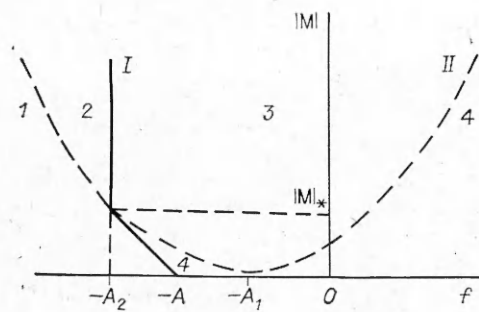
4. Рассмотрим дисперсионное уравнение в приближении медленной реакции и малых капель с двумя малыми параметрами:  $\chi_i = a^2/D_i\tau \ll 1$ ,  $R_i = a^2/\nu_i\tau \ll 1$ . Остальные безразмерные параметры будем считать величинами порядка  $O(1)$ . Необходимо отметить, что если  $d_i = (C_{i0}a/\Gamma_i^*)\chi_i^{-1} \sim O(1)$ , то  $C_{i0}a/\Gamma_i^* \sim \chi_i \ll 1$ , что соответствует случаю сильных ПАВ. Разлагая элементы определителя в ряд по  $\chi_i$  и  $R_i$  и оставляя члены порядка  $O(1)$ , получаем из (2.12) характеристическое уравнение

$$(4.1) \quad \begin{vmatrix} \gamma_0\omega + \mu_l & M_1l(l+1) & M_2l(l+1) \\ \gamma_{10} & \omega + f_{11} + A_{11} & f_{12} + A_{12} \\ \gamma_{20} & f_{21} + A_{21} & \omega + f_{22} + A_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

которое является кубическим относительно  $\omega$  и все еще достаточно сложное для анализа; для одного вещества оно принимает вид

$$(4.2) \quad \gamma_0\omega^2 + [\gamma_0(f + A) + \mu_l]\omega + \mu_l(f + A) - \gamma_0Ml(l+1) = 0.$$





Согласно критерию Рауса — Гурвица, все решения (4.2) имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда

$$(4.3) \quad \gamma_0(f + A) + \mu_l > 0, \\ \mu_l(f + A) + \gamma_0|M|l(l + 1) > 0.$$

Уравнение (4.2) имеет решения с ненулевой мнимой частью, если его дискриминант меньше нуля:

$$(4.4) \quad D = (\gamma_0(f + A) - \mu_l)^2 - 4\gamma_0^2|M|l(l + 1) < 0.$$

Неравенства (4.3), (4.4) позволяют построить в координатах  $(f, |M|)$  области, отвечающие различным типам устойчивости системы (см. рисунок). На рисунке ломаная  $I$  отделяет область неустойчивости слева от области устойчивости, расположенной справа от  $I$ . Каждая из этих областей, в свою очередь, делится параболой  $II$  ( $|M| = (\gamma_0(f + A) - \mu_l)^2 / 4\gamma_0^2l(l + 1)$ ) на две подобласти:  $1, 2$  и  $3, 4$ , причем наклонный отрезок ломаной в точке излома касается параболы. Области  $2$  и  $3$  соответствуют неустойчивому и устойчивому режимам с осцилляциями, в областях  $1$  и  $4$  осцилляций нет.

Как видно из рисунка, особенность данной системы — это возможность возникновения неустойчивости только в случае  $f < f_{кр} < 0$ . При этом  $f_{кр}$  должна превышать критическое значение, связанное с параметрами процессов адсорбции — десорбции и диффузии, а также с объемными и поверхностными вязкостями. Заметим также, что неустойчивость, если она возможна, появляется при сколь угодно малом значении параметра  $|M|$ . Иначе говоря, чисто химическая неустойчивость при сколь угодно слабой связи с гидродинамикой ( $|M| \neq 0$ ) приводит к гидродинамической неустойчивости. В диапазоне  $-A_2 \equiv -A - \mu_l/\gamma_0 < f < -A$  увеличение  $|M|$  приводит к стабилизации системы и подавлению неустойчивости. При  $f < -A - \mu_l/\gamma_0 \equiv -A_2$  система оказывается неустойчивой при любом значении  $|M|$ .

Отметим еще один интересный факт. Если бы связи с гидродинамикой не было вообще ( $|M| = 0$ ), то движения межфазной поверхности не возникло бы и речь могла идти лишь о химической устойчивости, которая наблюдалась бы при  $f < -A$ . Наличие указанной связи ( $|M| \neq 0$ ) приводит к тому, что устойчивость есть и при  $f < -A$ , т. е. порог неустойчивости, соответствующий  $f_{кр}$ , возрастает по абсолютной величине. Таким образом, можно сделать вывод о том, что эффекты Марангони подавляют химическую неустойчивость. Все сказанное верно лишь для мод  $l \geq 1$ , так как гидродинамической моды с  $l = 0$  не существует и, следовательно, нет влияния гидродинамики на химическую устойчивость.

Рассмотрим теперь влияние конечности скорости адсорбции на устойчивость системы. Если адсорбция быстрая и имеет место равновесие между межфазной поверхностью и прилегающими к ней областями, то  $A \sim (b/b_2)dl$ , а если медленная, то  $A \sim b = \text{const}$ . С ростом  $l$  граница области неустойчивости сдвигается влево, в сторону больших по абсолютной величине значений  $f$ , причем, как видно из выражения для  $A$ , при быстрой адсорбции этот сдвиг больше, чем при медленной. Значит, медленная адсорбция дестабилизирует систему.

Интересно проследить влияние диссипативных процессов (поверхностных и объемных вязкостей) на характеристики устойчивости системы. Эффекты диссипации характеризуются  $\mu_l$ . При возрастании  $\mu_l$  вертикальная часть ломаной  $I$  смещается влево, а наклон нижней ее части увеличивается. Если  $|M|$  фиксировано и  $|M| < |M|_к = \mu_l^2/\gamma_0^2l(l + 1)$ , то с ростом  $\mu_l$  соответствующее данному значению  $|M|$  критическое значение  $f_{кр}$  будет уменьшаться по модулю и стремиться к  $-A$ , т. е. система станет



более неустойчивой. Если  $|M| > |M|_*$ , то  $f_{кр}$  будет сначала расти, а потом, начиная с  $\mu_l^2 = |M|\gamma_0^2 l(l+1)$ , уменьшаться по модулю. Следовательно, увеличение поверхностных и объемных вязкостей в определенном смысле приводит к дестабилизации системы. Этот парадоксальный на первый взгляд вывод, вообще говоря, оказывается естественным для связанных колебательных систем и имеет аналогию, например, в теории Флаттера и в теории устойчивости течения Пуазейля. Причина такого эффекта состоит в том, что фазовые соотношения, возникающие между модами возмущений, таковы, что эти возмущения черпают энергию от внешнего источника. В нашем случае таким источником является поток вещества через межфазную границу. Увеличение вязкости может сделать эти соотношения более оптимальными с точки зрения отбора энергии от источника и, таким образом, усилить неустойчивость [10].

В заключение отметим, что на основе анализа уравнения (4.1) можно показать, что и для двух реагирующих веществ эффекты Марангони в зависимости от кинетики межфазных процессов могут дестабилизировать химически устойчивую и стабилизировать химически неустойчивую систему.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Scriven L. E., Sternling C. V. The Marangoni effects // Nature.— 1960.— V. 187.— P. 186.
2. Гидродинамика межфазных поверхностей/Под ред. Ю. А. Буевича, Л. М. Рабиновича.— М.: Мир, 1984.
3. Савистовский Г. Межфазные явления // Последние достижения в жидкостной экстракции.— М.: Химия, 1974.
4. Sorensen T. S., Hennenberg M. et al. Chemical and hydrodynamical analysis of stability of a spherical interface // J. Coll. Interface Sci.— 1976.— V. 56, N 2.
5. Sorensen T. S., Hennenberg M. Instability of spherical drop with surface chemical reactions and transfer of surfactants // Dynamics and instability of fluid interfaces.— Berlin: Springer-Verlag, 1979.
6. Nitsch W. The concept of interfacial reactions for mass transfer in liquid-liquid systems // Faraday Discuss. Chem. Soc.— 1984.— V. 77.— P. 85.
7. Ягодин Г. А., Тарасов В. В. и др. Некоторые кинетические эффекты при экстракции соляной кислоты третичными аминами // ДАН СССР.— 1979.— Т. 249, № 3.
8. Scriven L. E. Dynamics of fluid interface // Chem. Engng Sci.— 1960.— V. 12.— P. 98.
9. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
10. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.

Поступила 30/VI 1987 г.

УДК 532.517.4

### КАСКАДНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ, ЗАВИХРЕННОСТИ И ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ (трех- и двумерной)

А. Г. Бершадский  
(Донецк)

Экспериментальное моделирование однородной турбулентности осуществляется в течениях за решеткой. К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал. При его анализе возникает ряд вопросов. Прежде всего неясно, почему в различных экспериментах получают разные показатели  $n$  в степенных законах затухания пульсационной энергии  $\langle u^2 \rangle \sim t^{-n}$  (см., например, [1]). Предполагают, что эти различия связаны с «начальными» условиями (впрочем, авторы [2] считают, что здесь дело в обработке экспериментальных данных). Более тонкие спектральные