

УДК 622.831: 622.537.87

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ТРЕЩИНОВАТЫХ МАТЕРИАЛОВ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Л. И. Стефанович, Э. П. Фельдман

Институт физики горных процессов НАН Украины, 49005 Днепр, Украина
E-mails: listef2591@gmail.com, edward.feldman.40@gmail.com

В рамках двумерной модели исследовано влияние непроводящих протяженных включений (трещин) на электропроводность проводящей среды при постоянном токе. Для вычисления добавочного электросопротивления, обусловленного наличием трещин, использована гидродинамическая аналогия между движением идеальной несжимаемой жидкости при потенциальном обтекании твердых тел и электрическим током, обтекающим трещины. Определены зависимости относительного добавочного электросопротивления материала от коэффициента трещиноватости в различных предельных случаях. Результаты численного анализа полученных выражений при различных коэффициентах трещиноватости образца для случаев тонкого и толстого образцов подтверждают их правильность. Исследованы случаи параллельных трещин и трещин, ориентированных случайным образом в различных направлениях.

Ключевые слова: непроводящие протяженные включения, относительное добавочное электросопротивление, гидродинамическая аналогия, коэффициент трещиноватости.

DOI: 10.15372/PMTF20220119

Введение. Особенностью большинства горных пород является гетерогенность, обусловленная наличием в них различного рода дефектов: пор, трещин и фильтрационных каналов. Для оценки коэффициента трещиноватости минералов и горных пород используются различные экспериментальные методы, однако они недостаточно эффективны.

Что касается теоретических исследований влияния трещиноватости на проводимость, то они имеют фрагментарный характер. Следует отметить работу [1], в которой с использованием известного приближения Максвелла — Гарнетта [2] выполнена теоретическая оценка влияния трещиноватости горных пород с эллипсоидальными включениями на их электропроводность, в случае если концентрация включений считается малой. При этом использовалась модель эффективной среды, применимая в тех случаях, когда размер рассматриваемой системы во много раз превышает как характерные размеры включений, так и расстояния между ними. Однако, поскольку средние размеры трещин в горных породах могут иметь макроскопический масштаб, при изучении их влияния на электрофизические свойства среды не следует использовать модель эффективной среды, в частности в случае горных пород, содержащих угольные пласты, так как уголь является электропроводящим материалом. Поскольку электрическая проводимость углей сравнительно невелика, измерение ее экспериментальными методами существенно затруднено. Поэтому получение количественной оценки влияния трещиноватости на электропроводность материалов является актуальной задачей. Это обуславливает необходимость проведения предварительного

теоретического расчета или оценки влияния системы трещин на электросопротивление угля.

Следует отметить, что наличие в углях различного рода пустот исследовалось во многих работах. В [3] теоретически изучено влияние пор на электрическую проводимость углей. Однако пористость угля обычно меньше, чем его трещиноватость, что обуславливает необходимость оценки вклада трещин в электросопротивление угля. В работе [4] было сделано предположение, что в изменении электросопротивления однотипных по составу пород основную роль играет трещиноватость. При этом увеличение сопротивления вызвано не только уменьшением площади токопроводящих каналов, но и удлинением пути прохождения тока за счет увеличения извилистости токопроводящих каналов. Теория о влиянии трещин на электропроводность твердых тел получила развитие в работах [5, 6], в которых исследовались процессы переноса в твердых телах. Однако в этих работах не был проведен анализ влияния соотношения размеров угольного образца и трещин на электропроводность рассматриваемого материала. Кроме того, в [5, 6] предполагалось, что концентрация трещин мала, т. е. среднее расстояние между ними достаточно велико. Следует отметить, что некоторые результаты исследования влияния трещин на электросопротивление проводящего материала получены в работе [7]. Однако в этой работе использовалось предположение о незначительном влиянии трещин на протекающий в проводящем образце ток, поэтому полученные в [7] результаты необходимо уточнить.

1. Постановка задачи. При теоретическом исследовании влияния трещиноватости на электропроводность проводящих сред можно рассматривать последние как матричные гетерогенные системы с включениями (трещинами), объемная доля которых сравнительно невелика. Однако при этом не будем ограничиваться случаем, когда характерные размеры трещин являются малыми. Непроводящие (газонаполненные) трещины имеют следующую особенность: они могут оказывать существенное влияние на эффективные характеристики среды вследствие существенного различия свойств среды внутри трещин и вне их, несмотря на то что занимают небольшой объем. Будем считать, что включения в среде находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, поэтому их взаимовлиянием можно пренебречь. Иными словами, можно сначала рассмотреть задачу о влиянии на электросопротивление единственного изолированного включения, а затем обобщить ее на случай, когда образец содержит совокупность таких включений.

Пусть образец с отличной от нуля проводимостью представляет собой плоскопараллельную пластину толщиной d , содержащую протяженные непроводящие включения (трещины), имеющие среднюю длину $2l$. Предполагаем сначала, что трещины расположены параллельно друг другу и параллельны поверхности пластины (см. рис. 1 в работе [7]).

Для того чтобы через пластину проходил постоянный ток, следует приложить некоторую разность потенциалов $U_2 - U_1$ к ее противоположным краям. Во внешней цепи протекает постоянный ток I . В соответствии с законом Ома для электросопротивления участка цепи можно записать соотношение

$$R = \frac{U_2 - U_1}{I}. \quad (1)$$

Очевидно, что влияние непроводящего включения (трещины) проявляется в уменьшении плотности тока, проходящего через образец. Измененную плотность тока обозначим $j' = j - \Delta j$, где Δj — изменение плотности тока, обусловленное наличием трещины. Используя (1), нетрудно показать, что относительное изменение сопротивления образца, обусловленное наличием изолированной трещины, равно

$$\left(\frac{R_f - R}{R}\right)_0 = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 = \frac{j - j'}{j'} = \frac{j - (j - \Delta j)}{j - \Delta j} = \frac{\Delta j}{j - \Delta j} \quad (2)$$

(R — электросопротивление идеального образца, не содержащего непроводящие трещины; $R_f - R = (U_2 - U_1)/(I - \Delta I)$ — добавочное электросопротивление образца вследствие взаимодействия тока с трещиной; ΔI — добавочная сила тока, обусловленная наличием трещины; индекс “0” соответствует изолированной трещине). Важным отличием выражения (2) от выражения для добавочного относительного сопротивления, предложенного в [7], является то, что в его знаменателе содержится поправка к начальной плотности тока Δj , которая учитывает возмущение начальной плотности тока, обусловленное наличием трещины. В отличие от работы [7] в данной работе не предполагается, что $\Delta j/j \ll 1$, т. е. возмущение плотности тока, обусловленное влиянием трещины, всегда является малым по сравнению с величиной плотности тока в идеальном образце. Следовательно, выражение (2) можно использовать для совокупности трещин, причем даже в том случае, если их концентрация достаточно велика и результирующее возмущение исходной плотности тока, вызванное трещиноподобными включениями, не является малым.

Сначала рассмотрим случай, когда в исследуемом образце имеются трещины, параллельные друг другу и поверхности пластины. Для того чтобы исследовать влияние системы трещин на электросопротивление проводящего образца, прежде всего следует определить изменение плотности тока под действием единственной трещины, а затем осреднить полученный результат.

2. Гидродинамическая аналогия. При решении задачи о протекании электрического тока в проводящей среде с протяженными непроводящими включениями (трещинами), следуя работе [7], используем гидродинамическую аналогию между движением жидкости при потенциальном обтекании твердых тел [8] и потоком электрических зарядов через проводник, содержащий непроводящие включения (рис. 1). Для плоского течения жидкости со скоростью u можно ввести дополнительную комплексную скорость $w(z)$, которая является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$:

$$w(z) = v_x(x, y) + iv_y(x, y) \quad (3)$$

(i — мнимая единица). Комплексная скорость потока заряда $w(z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

- 1) на бесконечности скорость $w(z)$ должна обращаться в нуль;
- 2) на берегах трещины нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в нуль, т. е. $u + v_y(x, 0) = 0$, если $-l < x < l$ (так как ток не должен проникать в трещину).

Соответствующая краевая задача Неймана решается с использованием интегралов типа интеграла Коши [9]. В результате выражение для комплексной скорости $w(z)$ при-

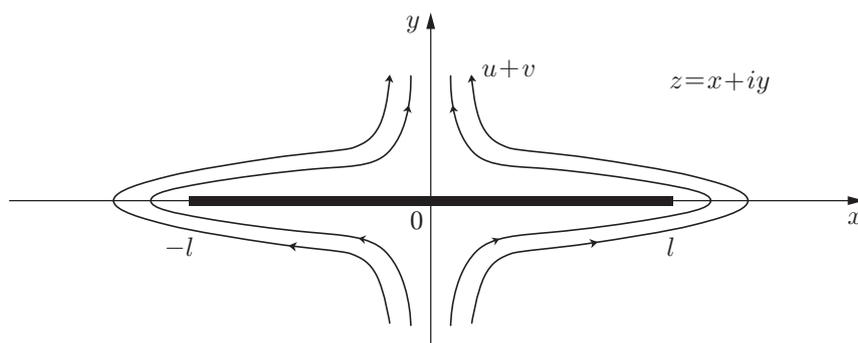


Рис. 1. Схема обтекания идеальной несжимаемой жидкостью непроницаемого протяженного препятствия длиной $2l$

нимает вид

$$w(z) = \frac{u}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2} (\xi - z)}. \quad (4)$$

Очевидно, что эта функция на бесконечности обращается в нуль. С использованием формул Сохоцкого — Племеля находим значение этой функции на берегах трещины

$$w(x, \pm 0) = \frac{u}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2} (\xi - x)} \mp \frac{ux}{\sqrt{l^2 - \xi^2}} = -iu \mp \frac{ux}{\sqrt{l^2 - \xi^2}} \quad (5)$$

(интеграл берется в смысле главного значения).

Таким образом, $v_y(x, 0) = -u$, что в сумме с u дает нуль. Таким образом, граничные условия выполняются. Поскольку согласно гидродинамической аналогии исходная плотность тока j пропорциональна скорости потока жидкости u , с использованием формулы (4) можно определить обусловленную наличием трещины искомую поправку к нормальной компоненте плотности тока Δj_y . Данная поправка пропорциональна дополнительному слагаемому к вертикальной составляющей плотности потока жидкости $v_y(x, y)$ и фактически является мнимой частью выражения (4), т. е. имеет вид

$$\Delta j_y \sim v_y(x, y) = -\frac{u}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + y^2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2}}. \quad (6)$$

3. Воздействие системы трещин на электрический ток. Для того чтобы определить воздействие на электрический ток системы трещин, необходимо ввести понятие плотности числа трещин в единице объема проводящего материала, которая в плоском (двумерном) случае равна $1/r_c^2$ (r_c — среднее расстояние между центрами трещин). Тогда среднее изменение плотности тока, обусловленное влиянием системы трещин в образце, можно вычислить по формуле

$$\langle \Delta j_y \rangle \sim \langle v_y \rangle = \frac{1}{r_c^2} \int_{-r_c}^{r_c} dx \int_0^d dy v_y(x, y). \quad (7)$$

Здесь величина $v_y(x, y)$ определяется выражением (6); интегрирование по переменной x в пределах от $-\infty$ до ∞ следует заменить интегрированием от $-r_c$ до r_c .

С учетом предположения о статистической однородности распределения трещин по исследуемому образцу среднее значение $\langle v_y \rangle$ не зависит от координат x, y . В результате вычисления соответствующего интеграла по переменным x, y получаем соотношение для относительного изменения электросопротивления образца, обусловленного влиянием системы трещин, находящихся в нем:

$$\frac{\Delta R}{R} \equiv \frac{\langle v_y \rangle u}{1 - \langle v_y \rangle u} = \frac{k}{1 - k}. \quad (8)$$

Здесь безразмерная величина k определяется интегралом

$$k = \frac{2l^2}{\pi r_c^2} \int_0^1 F(\xi, r_c, d) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \quad (9)$$

$$F(\xi, r_c, d) = \frac{d}{2l} \ln \frac{(\xi + r_c/l)^2 + (d/l)^2}{(\xi - r_c/l)^2 + (d/l)^2} + \left(\xi + \frac{l_c}{l}\right) \operatorname{arctg} \frac{d/l}{\xi + r_c/l} - \left(\xi - \frac{r_c}{l}\right) \operatorname{arctg} \frac{d/l}{\xi - r_c/l}. \quad (10)$$

Если в выражениях (9), (10) ввести безразмерный коэффициент трещиноватости

$$\gamma = 2hl/r_c^2 \quad (11)$$

(h — величина раскрытия трещины), а также безразмерные параметры $\alpha = h/l$ и $\delta = d/l$, то вместо (9) получим выражение

$$k = \frac{l\gamma}{\pi h} \int_0^1 \Phi(\xi, \alpha, \delta, \gamma) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (12)$$

где

$$\Phi(\xi, \alpha, \delta, \gamma) = \frac{\delta}{2} \ln \frac{(\xi + \sqrt{2\alpha/\gamma})^2 + \delta^2}{(\xi - \sqrt{2\alpha/\gamma})^2 + \delta^2} + \left(\xi + \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\xi + \sqrt{2\alpha/\gamma}} - \left(\xi - \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\xi - \sqrt{2\alpha/\gamma}}. \quad (13)$$

4. Асимптотический и численный анализ полученных результатов. Для получения применяемых на практике оценок влияния трещин, например, на электросопротивление угля рассмотрим представляющие практический интерес частные случаи, используя выражения (8), (12), (13).

1. Случай тонкой пластины с мелкими трещинами малой концентрации: $r_c/l \gg 1$, $d/l \approx 1$. В этом случае длина трещины порядка толщины пластины, но много меньше среднего расстояния между центрами трещин. Тогда согласно (8), (12), (13) относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, определяется по формуле

$$\frac{\Delta R}{R} \equiv \frac{\langle v_y \rangle / u}{1 - \langle v_y \rangle / u} = \frac{k_1}{1 - k_1}, \quad (14)$$

где

$$k_1 \approx \frac{2(d/l)}{(r_c/l)^3} = \frac{d}{h} \sqrt{\frac{l}{2h}} \gamma^{3/2} = \beta_1 \gamma^{3/2}. \quad (15)$$

Полагая в (15) $d = 10^{-2}$ м, $l = 10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, получаем $\beta_1 \approx 22,4$. С учетом (14) из зависимости (15) следует, что при этих значениях параметров относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, при малых коэффициентах трещиноватости увеличивается по закону $\Delta R/R \sim \gamma^{3/2}$. По мере увеличения концентрации трещин скорость роста добавочного электросопротивления значительно возрастает.

2. Случай толстой пластины с крупными трещинами большой концентрации: $r_c/l \ll 1$, $d/l \approx 1$. В этом случае длина трещины порядка толщины пластины, но много больше среднего расстояния между центрами трещин. Тогда согласно (8) относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, с учетом соотношений (12), (13) определяется по формуле

$$\frac{\Delta R}{R} \equiv \frac{\langle v_y \rangle / u}{1 - \langle v_y \rangle / u} = \frac{k_2}{1 - k_2}, \quad (16)$$

где

$$k_2 \approx \frac{4}{\pi(r_c/l)} f(d/l) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l}{h}} \gamma^{1/2} = \beta_2 \gamma^{1/2}, \quad (17)$$

функция $f(d/l)$ определяется выражением

$$f(d/l) = \int_0^1 \frac{\xi \operatorname{arctg}(d/l)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$$

и может быть найдена численно при заданных значениях отношения d/l . В рассматриваемом предельном случае $f(d/l) \approx \pi/4$. Пусть в (17) $d = 10^{-1}$ м, $l = 10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, тогда $\beta_2 \approx 2,24$. При этих значениях параметров зависимость (17), строго говоря, справедлива только при малых концентрациях трещин и не зависит от толщины пластины. При значительных концентрациях трещин в соответствии с выражением (16) изменение электросопротивления, обусловленное наличием трещин, увеличивается не в соответствии со степенным законом со степенью $1/2$, как это следует из (17), а значительно быстрее.

3. Случай тонкой пластины с крупными трещинами малой концентрации: $d/l \ll 1$, $r_c/l \approx 1$. В этом случае длина трещины порядка среднего расстояния между центрами трещин и значительно превышает толщину пластины. Тогда согласно (8), (12), (13) относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, определяется по формуле

$$\frac{\Delta R}{R} \equiv \frac{\langle v_y \rangle / u}{1 - \langle v_y \rangle / u} = \frac{k_3}{1 - k_3},$$

где

$$k_3 \approx \frac{\delta}{\pi(r_c/l)^2} \psi(r_c/l) \sim \frac{d}{2\pi h} \gamma = \beta_3 \gamma, \quad (18)$$

функция $\psi(r_c/l)$ определяется выражением

$$\psi(r_c/l) = \int_0^1 \ln \frac{(\xi + r_c/l)^2}{(\xi - r_c/l)^2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

и может быть найдена путем численного интегрирования при заданных значениях отношения r_c/l . Пусть в (18) $d = 10^{-2}$ м, $l = 10^{-1}$ м, $h = 10^{-3}$ м, тогда $\beta_3 \approx 1,6$. Зависимость (18), строго говоря, справедлива только при малых концентрациях трещин, при этом $\beta_3 \gamma \ll 1$, поэтому в данном предельном случае относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, пропорционально толщине образца и незначительно увеличивается по линейному закону с увеличением концентрации трещин.

4. Случай толстой пластины с мелкими трещинами большой концентрации: $d/l \gg 1$, $r_c/l \approx 1$. В этом случае длина трещины порядка среднего расстояния между центрами трещин и значительно меньше толщины пластины. Тогда согласно (8) относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, определяется по формуле

$$\frac{\Delta R}{R} \equiv \frac{\langle v_y \rangle / u}{1 - \langle v_y \rangle / u} = \frac{k_4}{1 - k_4}, \quad (19)$$

где

$$k_4 \approx \frac{\pi}{2(r_c/l)^2} \approx \frac{\pi l}{4h} \gamma \approx \beta_4 \gamma, \quad (20)$$

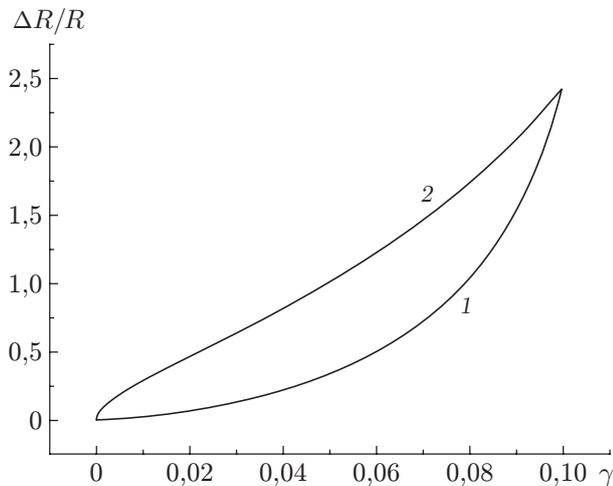


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость относительного электросопротивления угля от коэффициента трещиноватости:

1 — случай тонкой пластины с мелкими трещинами малой концентрации; 2 — случай толстой пластины с крупными трещинами большой концентрации

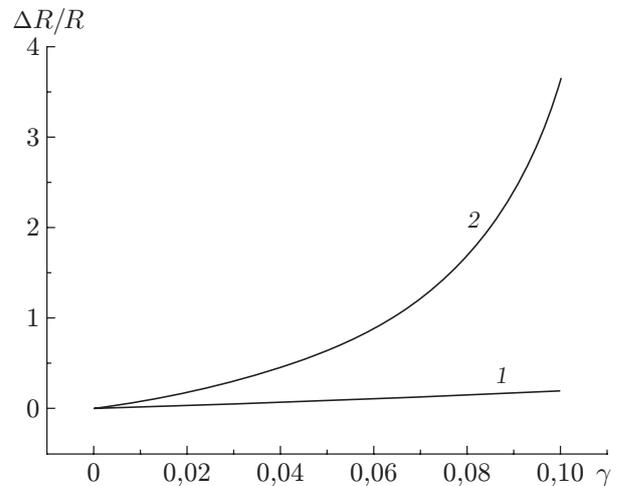


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость относительного электросопротивления угля от коэффициента трещиноватости:

1 — случай тонкой пластины с крупными трещинами малой концентрации; 2 — случай толстой пластины с мелкими трещинами большой концентрации

а относительное добавочное электросопротивление не зависит от толщины угольного образца. Пусть в (20) $d = 10^{-1}$ м, $l = 10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, тогда $\beta_4 \approx 7,85$. Зависимость (20), строго говоря, справедлива только при малых концентрациях трещин. В случае больших концентраций трещин согласно (20) относительное добавочное электросопротивление, обусловленное наличием трещин, увеличивается по нелинейному закону.

Проведенный с использованием выражений (8), (12), (13) численный анализ относительного добавочного электросопротивления, обусловленного наличием трещин, в основном подтверждает справедливость асимптотических зависимостей величины $\Delta R/R$ от коэффициента трещиноватости образца (рис. 2, 3).

5. Случай наклонных трещин. Полученные результаты можно обобщить на случай наклонных трещин. Единственное отличие заключается в том, что для одиночной наклонной трещины выражение (6) следует умножить на $\cos^2 \theta$, где θ — угол между нормалью \mathbf{n}_1 к плоскости трещины и нормалью \mathbf{n}_2 к плоскости пластины (рис. 4).

Вследствие непроницаемости трещины только нормальная к плоскости трещины компонента тока отлична от нуля. Сначала проецируем вектор плотности тока \mathbf{j} на нормаль \mathbf{n}_1 к плоскости трещины: $j_{n_1} = j \cos \theta$. Затем проецируем вектор \mathbf{j}_{n_1} на нормаль \mathbf{n}_2 к плоскости пластины, поскольку в данном случае представляет интерес изменение плотности тока в направлении, перпендикулярном поверхности пластины, т. е. проекция плотности тока: $j_{n_2} = j_{n_1} \cos \theta = j \cos^2 \theta$.

В случае, когда трещины в образце не параллельны, а ориентированы в различных направлениях случайным образом, выражение (7) следует умножить на $\cos^2 \theta$ и осреднить по этому углу в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. В случае пластины это приведет к появлению в окончательных выражениях (15)–(18) дополнительного числового множителя $1/2$.

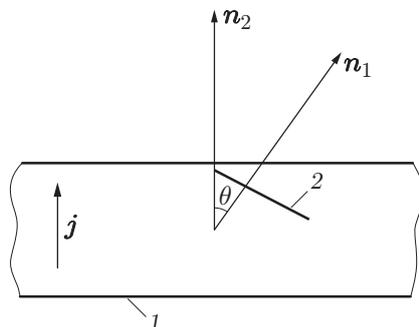


Рис. 4. Геометрия задачи в случае одиночной наклонной трещины:
1 — пластина, 2 — трещина

Заключение. На основе проведенных исследований можно сделать вывод, что относительное изменение сопротивления угля, обусловленное наличием трещин, как правило, нелинейно зависит от коэффициента трещиноватости. Так, в случае мелких трещин и тонкой пластины при малых концентрациях трещин относительное изменение электросопротивления в зависимости от коэффициента трещиноватости сначала увеличивается по степенному закону $\Delta R/R \sim \gamma^{3/2}$, а затем по степенному закону с большим показателем степени. В случае толстой пластины и большой концентрации мелких трещин сначала наблюдается медленное увеличение относительного изменения электросопротивления по закону $\Delta R/R \sim \gamma^{1/2}$, а затем при значительном коэффициенте трещиноватости образца скорость роста существенно возрастает.

В случае тонкой пластины и крупных трещин при всех значениях коэффициента трещиноватости образца, при которых не нарушается его целостность, наблюдается незначительное увеличение по линейному закону относительного добавочного электросопротивления образца, обусловленное наличием трещин.

В случае большой толщины пластины и большой концентрации трещин наблюдается увеличение по нелинейному закону относительного добавочного электросопротивления образца, обусловленное наличием трещин.

Из аналитических зависимостей (17), (20) следует, что при большой толщине образца относительное изменение электросопротивления, обусловленное наличием трещин, не зависит от его толщины.

Полученные зависимости добавочного электросопротивления могут быть использованы, в частности, при определении коэффициента трещиноватости образцов горных пород, проводящих электрический ток (неинвазивный метод).

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Наука, 1985.
2. Сизин П. Е., Шкуратник В. Л. Теоретическая оценка влияния микротрещиноватости горных пород на их проводимость в приближении Максвелла // Горн. информ.-аналит. бюл. 2015. № 3. С. 212–218.
3. Фельдман Э. П., Грановский Я. И., Калугина Н. А., Винник Е. А. Влияние пористости и размера пор на электросопротивление угля // Физ.-техн. пробл. горн. пр-ва. 2010. Вып. 13. С. 39–41.
4. Ржевский В. В. Основы физики горных пород / В. В. Ржевский, Г. Я. Новик. М.: Недра, 1978.

5. **Салганик Р. Л.** Процессы переноса в телах с большим числом трещин // Инж.-физ. журн. 1974. Т. 27, № 6. С. 1069–1075.
6. **Салганик Р. Л.** Об эффективных характеристиках материала с большим числом трещин. Возможность геофизического определения параметров трещиноватости пласта в связи с задачей обеспечения выбрособезопасности. М., 1980. (Препр. / Ин-т пробл. материаловедения АН СССР; № 154).
7. **Фельдман Э. П., Винник Е. А., Грановский Я. И., Калугина Н. А.** Электросопротивление проводящего материала, содержащего трещины // Физ.-техн. пробл. горн. пр-ва. 2011. Вып. 14. С. 54–58.
8. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
9. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958.

*Поступила в редакцию 21/VII 2020 г.,
после доработки — 8/IX 2020 г.
Принята к публикации 28/IX 2020 г.*
