

AMS subject classification: 15A04

Частичная многомерная модель с ошибками в переменных и ее применение в мониторинге оседания грунта*

Ц. Ван, Ф. Ху

College of Civil Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan, 411105, China

E-mail: wangqisheng0702@163.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 17, 2024.

Ван Ц., Ху Ф. Частичная многомерная модель с ошибками в переменных и ее применение в мониторинге оседания грунта // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 3. — С. 265–275.

С целью решения проблемы, связанной с тем, что матрица коэффициентов многомерной модели с ошибками в переменных (ММОП) содержит постоянные столбцы, модель ММОП расширена до частичной многомерной модели с ошибками в переменных (Ч-ММОП) и предложен новый алгоритм модели Ч-ММОП, основанный на принципе частичной модели с ошибками в переменных (Ч-МОП) и не прямой корректировке. Алгоритм прост и легко реализуем. Для проверки используется пример преобразования координат, а результаты сравниваются с существующим алгоритмом модели ММОП, что показывает эффективность предлагаемого алгоритма. Наконец, алгоритм Ч-ММОП применяется к многоточечной серой модели (MCM(1,N)) мониторинга оседания грунта. Результаты показывают, что модель Ч-ММОП, предлагаемая в данной статье, лучше учитывает влияние ошибок точек мониторинга, а результаты хорошо соответствуют реальной ситуации.

DOI: 10.15372/SJNM20240301

EDN: VVCPJJ

Ключевые слова: многомерная модель с ошибками в переменных, метод наименьших полных квадратов, многоточечная серая модель, мониторинг оседания грунта.

Wang Q., Hu F. Partial multivariate errors-in-variables model and its application in settlement monitoring // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 3. — P. 265–275.

Aiming at the problem that the coefficient matrix of multivariate errors-in-variables (MEIV) model contains constant columns, the MEIV model is extended to partial multivariate errors-in-variables (P-MEIV), and the new algorithm of P-MEIV model is proposed based on the principle of partial errors-in-variables (PEIV) model and indirect adjustment. The algorithm is simple and easy to implement. An example of coordinate transformation is used for verifying, and the results are compared with the existing MEIV model algorithm, which shows the effectiveness of the proposed algorithm. Finally, the P-MEIV algorithm is applied to the multi-point grey model (MGM(1,N)) of settlement monitoring. The results show that the P-MEIV model proposed in this paper can better consider the influence of monitoring point errors, and the estimated results are in good agreement with the actual situation.

Keywords: multivariate errors-in-variables model, total least squares, multipoint grey model, settlement monitoring.

*Работа поддержана Молодежным проектом Департамента образования провинции Хунань (проект № 22B0176).

1. Введение

При обработке данных измерений матрица коэффициентов некоторых моделей может содержать ошибки. Поскольку метод наименьших полных квадратов (МНПК) [1] может учитывать ошибку матрицы коэффициентов в модели корректировки, он теоретически является более строгим, чем метод наименьших квадратов (МНК), и в последние годы привлекает к себе широкое внимание и активно исследуется [2–6]. В модели корректировки модель с ошибками в переменных (МОП) расширена до частичной модели с ошибками в переменных (Ч-МОП) [7, 8]. Для методов оценивания (от общего метода наименьших полных квадратов до метода взвешенных полных наименьших квадратов (МВПНК)) также был разработан ряд расширенных алгоритмов, таких как метод структурированных полных наименьших квадратов [9], общий метод наименьших квадратов с ограничениями равенства и неравенства [10–12], робастный метод полных наименьших квадратов [13], оценивание компонентов дисперсии методом наименьших полных квадратов [14] и т. д. Что касается переменных модели, то параметры корректировки также расширены от одной переменной до нескольких переменных. Это называется моделью с многомерными ошибками в переменных (ММОП) [15, 16]. Поскольку благодаря модели ММОП матрица коэффициентов может стать более компактной, ее лучше использовать в координатном преобразовании и других моделях; кроме того были разработаны некоторые методы оценки [17, 18].

Для алгоритмов оценки модели ММОП в основном используются алгоритм Лагранжа, алгоритм Ньютона и соответствующий метод матричной декомпозиции, а также метод преобразования модели ММОП в модель МОП [3, 15–20]. Однако матрица коэффициентов модели ММОП может иметь постоянные столбцы. Приведенные выше методы специально не обсуждаются; для оценки необходимо определить вес элементов матрицы коэффициентов. При мониторинге оседания грунта многоточечная серая модель (МСМ(1,N)) [21] может рассматриваться как модель ММОП с постоянным столбцом в матрице коэффициентов. Чтобы решить проблему, заключающуюся в том, что матрица коэффициентов модели ММОП содержит постоянный столбец, в данной статье модель ММОП расширена до частичной многомерной модели с ошибками в переменных (Ч-ММОП). Предложен новый алгоритм модели Ч-ММОП, основанный на частичной модели с ошибками в переменных (Ч-МОП) и принципе не прямой корректировки. Эффективность алгоритма тестируется на примере преобразования координат. И, наконец, модель Ч-ММОП применяется к модели МСМ(1,N) мониторинга оседания грунта, результаты служат для проверки надежности и эффективности предлагаемого метода.

Статья организована следующим образом: в пункте 2 представлена частичная многомерная модель с ошибками в переменных и подробно описан алгоритм для Ч-ММОП. В п. 3 вводится многоточечная серая модель МСМ(1,N) и строится многоточечная серая модель Ч-ММОП. В п. 4 представлен пример преобразования координат для иллюстрации пригодности предложенных алгоритмов. Модель Ч-ММОП применяется к модели МСМ(1,N) мониторинга оседания грунта. Некоторые выводы представлены в п. 5.

2. Частичная многомерная модель МОП

Многомерную функциональную модель МОП можно представить в виде [2, 17, 18]

$$Y + E_Y = (A + E_A) \Xi, \quad (1)$$

где Y — матрица наблюдений размерности $m \times n$, E_Y — матрица корректировки размерности $m \times n$, A — матрица коэффициентов размерности $m \times r$, E_A — матрица корректировки коэффициентов размерности $m \times r$, Ξ — матрица оценки параметров размерности $r \times n$. Благодаря многомерной структуре матрица коэффициентов может быть более компактной, также в ней могут быть и постоянные члены. Поэтому приведенная выше многомерная модель МОП расширена до частичной многомерной модели МОП с использованием идеи частичной модели с ошибками в переменных, которая может быть выражена следующим образом [7]:

$$\begin{cases} y + e_y = (\Xi^T \otimes I_m) (h + D\bar{a}), \\ a + e_a = \bar{a}, \end{cases} \quad (2)$$

где $y = \text{vec}(Y)$ — выпрямляющий вектор матрицы наблюдений, оператор “vec” ставит один столбец матрицы под другой, двигаясь слева направо, $e_y = \text{vec}(E_Y)$ — выпрямляющий вектор матрицы корректировки, \otimes — произведение Кронекера (мы используем $\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec}(B)$ [22] из уравнения (1) для уравнения (2)), I_m — единичная матрица размерности $m \times m$, h — постоянный член матрицы коэффициентов, a и \bar{a} — неповторяющиеся элементы и их оценки в матрице коэффициентов A , D — структурная матрица, e_a — значение коррекции неповторяющихся элементов в матрице коэффициентов. После замены уравнения (1) на уравнение (2) структура матрицы коэффициентов сохраняется, благодаря компактности матрицы коэффициентов моделей МОП. Стохастическую модель Ч-ММОП можно представить в виде

$$V = \begin{bmatrix} e_y \\ e_a \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{yy} & Q_{ya} \\ Q_{ay} & Q_{aa} \end{bmatrix} \right) P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} P_{yy} & P_{ya} \\ P_{ay} & P_{aa} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где σ_0^2 — неизвестный коэффициент дисперсии, Q_{yy} и Q_{aa} — матрица кофакторов вектора наблюдений и неповторяющиеся элементы матрицы коэффициентов соответственно, Q_{ya} — матрица взаимных кофакторов. Если корреляция не учитывается, $Q_{ya} = Q_{ay} = 0$. Критерий корректировки Ч-ММОП можно выразить как

$$V^T P V = \min. \quad (4)$$

Исследования многих алгоритмов наименьших полных квадратов показывают, что при помощи различных итерационных алгоритмов можно получить оптимальные значения параметров путем итерации элементов матрицы коэффициентов и параметров модели корректировки. Следовательно, уравнение (2) можно рассматривать как модель не прямой корректировки для оценки неповторяющегося элемента \bar{a} матрицы коэффициентов при условии наличия исходных значений параметров:

$$\begin{cases} \bar{a} = (B^T P B)^{-1} B^T P L, \\ V = B\bar{a} - L, \end{cases} \quad (5)$$

где $B = \begin{bmatrix} (\Xi^T \otimes I_m) D \\ I_t \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} y - (\Xi^T \otimes I_m) h \\ a \end{bmatrix}$. Путем корректировки оцениваемого элемента матрицы коэффициентов оцениваются параметры уравнения (1). Поскольку учитывается ошибка матрицы коэффициентов, уравнение (1) может быть выпрямлено:

$$\begin{bmatrix} I_m & -(\Xi^\top \otimes I_m)D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_a \end{bmatrix} = (I_n \otimes A)x - y, \quad (6)$$

где $\text{vec}(E_A \Xi) = (\Xi^\top \otimes I_m) D e_a$, $\text{vec}(A \Xi) = (I_n \otimes A)x$, где $x = \text{vec}(\Xi)$ — вектор выпрямления матрицы параметров.

Пусть $V' = FV = \begin{bmatrix} I_m & -(\Xi^\top \otimes I_m)D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_a \end{bmatrix}$. Тогда уравнение (6) также можно рассматривать как модель не прямой корректировки. Теперь матрица кофакторов модели имеет вид $\hat{Q} = FQF^\top$.

После корректировки элемента матрицы коэффициентов уравнения (6) необходимо скорректировать вектор наблюдений для достижения равновесия. Оценивание параметра можно описать следующим образом:

$$x = \left(\hat{A}^\top \hat{Q}^{-1} \hat{A} \right)^{-1} \hat{A}^\top \hat{Q}^{-1} \hat{y}, \quad (7)$$

где $\hat{A} = (I_n \otimes \text{vec}^{-1}(h + D\bar{a}))$, vec^{-1} — обратная операции выпрямления матрицы, которая восстанавливает вектор в матрицу, $E = \text{vec}^{-1}(h + D\bar{a}) - A$, $\hat{y} = y + Ex_0$. Окончательную оценку параметров можно получить путем поочередной итерации уравнений (5) и (7). Формула оценки точности параметров $D(x)$ имеет следующий вид [7, 17]:

$$\begin{cases} D(x) = \sigma_0^2 \left(\hat{A}^\top \hat{Q}^{-1} \hat{A} \right)^{-1}, \\ \sigma_0^2 = \frac{V^\top P V}{n(m-r)}. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом приведенного выше, используя идеи существующих алгоритмов моделей МОП и Ч-МОП, итерационный алгоритм модели Ч-ММОП, предлагаемый в данной статье, можно описать следующим образом:

- 1) получение начальных значений Ξ^0 и x^0 параметров с использованием принципа наименьших квадратов;
- 2) получение оценки \bar{a} неповторяющегося элемента матрицы коэффициентов с учетом первоначального значения параметра по формуле (5);
- 3) вычисление оценки Ξ^i и x^i скорректированных параметров с помощью оценки \bar{a} путем корректировки \hat{A} , \hat{Q} и \hat{y} по формуле (7);
- 4) повторение шагов 2 и 3 до тех пор пока $\|\Xi^i - \Xi^{i-1}\| > \varepsilon$ (ε — малое положительное значение, и в этом вычислении используется 10^{-12});
- 5) остановка итерации после получения оценки параметра Ξ и оценка точности параметров по уравнению (8).

3. Многоточечная серая модель Ч-МОП

3.1. Многоточечная серая модель

Был установлен взаимосвязанный участок мониторинга n для мониторинга периода m данных серийных наблюдений $x_i^{(0)}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, m$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. После однократного суммирования мы получим последовательность $x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$. Учитывая корреляцию n точек мониторинга, мы можем получить систему n -элементных дифференциальных уравнений первого порядка [23, 24]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i^{(1)} + b_1, \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i^{(1)} + b_2, \\ \vdots \\ \frac{dx_n^{(1)}}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i^{(1)} + b_n. \end{cases} \quad (9)$$

Формулу (9) можно записать в матричной форме

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} = AX^{(1)} + B, \quad (10)$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Путем дискретизации уравнения (9) многоточечную серую модель можно представить в виде $Y = \bar{A} \cdot \Xi$, в которой параметр $\Xi = [\xi_a^\top \ \xi_b^\top]^\top$ может быть оценен с использованием метода наименьших квадратов, где

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) & x_2^{(0)}(2) & \cdots & x_n^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) & x_2^{(0)}(3) & \cdots & x_n^{(0)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(0)}(m) & x_2^{(0)}(m) & \cdots & x_n^{(0)}(m) \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} z_1^{(1)}(2) & z_2^{(1)}(2) & \cdots & z_n^{(1)}(2) & 1 \\ z_1^{(1)}(3) & z_2^{(1)}(3) & \cdots & z_n^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(1)}(m) & z_2^{(1)}(m) & \cdots & z_n^{(1)}(m) & 1 \end{bmatrix},$$

$$z_i^{(1)}(k) = \frac{1}{2} \left(x_i^{(1)}(k-1) + x_i^{(1)}(k) \right), \quad k = 2, 3, \dots, m.$$

После получения оценки параметра Ξ из дифференциального уравнения (10) может быть получено решение $X^{(1)}(t)$ функции временного отклика, а затем предсказанное значение прогноза многоточечной серой модели может быть получено путем редукции.

3.2. Многоточечная серая модель Ч-ММОП

Очевидно, что при определении параметра Ξ его модель корректировки — это частичная многомерная модель МОП. Поэтому метод, предлагаемый в данной статье, можно использовать для оценки параметров, а модель его корректировки представлена в уравнении (1). Следует отметить, что матрица наблюдений Y состоит из исходной последовательности наблюдений, а матрица коэффициентов A — из их функций. Таким образом, при оценивании модели Ч-ММОП необходимо рассматривать различные веса. Предположим, что σ есть ошибка с одинаковой точностью всех исходных последовательностей наблюдений. Тогда ошибку элемента матрицы коэффициентов можно выразить следующим образом:

$$\sigma_{z_i^{(1)}(k)}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{x_i^{(1)}(k-1)}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{x_i^{(1)}(k)}^2, \quad (11)$$

где ошибка последовательности $\sigma_{x_i^{(1)}(k)}^2 = k\sigma^2$ после одновременного накопления. Таким образом, точность формулы (11) можно выразить как

$$\sigma_{z_i^{(1)}(k)}^2 = \frac{2k-1}{4} \sigma^2, \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (12)$$

Предположим, что вес исходной последовательности наблюдений равен 1. Тогда вес выпрямленной матрицы наблюдений Y — это единичный вес $P_{yy} = I_{m-1}$, и вес каждого элемента столбца матрицы коэффициентов может быть выражен следующим образом:

$$P_{aa} = I_n \otimes \text{diag} \left(\frac{4}{3} \cdots \frac{4}{2m-1} \right). \quad (13)$$

Независимо от корреляции между матрицей наблюдений и элементами матрицы коэффициентов для оценки параметров используется алгоритм модели Ч-ММОП, предлагаемый в данной статье. Затем выполняется последовательное прогнозирование значений с использованием модели MCM(1,N).

3.3. Критерии оценки точности

Для оценки точности моделирования и прогнозирования с использованием модели MCM(1,N) обычно используются соответствующие критерии оценки точности. В данной статье для оценки используются среднеквадратическое отклонение (СКО), средняя абсолютная ошибка (САО) и средняя относительная ошибка (СОО):

– среднеквадратическое отклонение

$$\text{СКО} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}, \quad (14)$$

– средняя абсолютная ошибка

$$\text{САО} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i), \quad (15)$$

– средняя относительная ошибка

$$\text{СОО} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{b}, \quad (16)$$

где x_i — прогнозируемое значение, \hat{x}_i — измеренное значение.

4. Анализ примера

4.1. Примеры проверки

Для проверки эффективности предлагаемого метода используется пример преобразования координат. Двумерная модель аффинного преобразования координат может быть представлена как многомерная модель корректировки. При рассмотрении ошибки матрицы коэффициентов матрица коэффициентов содержит перечень постоянных членов, поэтому ее можно рассматривать как частичную многомерную модель МОП. Пример расчета взят из двумерных данных измерений преобразования координат, имеющих в литературе [4] (см. таблицу 1), весовая матрица двух множеств данных координат имеет вид:

$$P_{xy} = \text{diag}([18.7817, 6.3774, 12.6489, 17.4769, 22.2726, 23.9823, 13.6804, 3.4656, 3.7324, 6.4377]),$$

$$P_{XY} = \text{diag}([9.8316, 5.5357, 12.7369, 12.0099, 10.181, 11.3661, 11.147, 5.8834, 9.8322, 7.5678]).$$

Тогда матрицы частичной многомерной модели МОП преобразования координат можно записать в виде

$$Y = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ X_i & Y_i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad P_y = Q_y^{-1} = P_{XY}, \quad P_a = Q_a^{-1} = P_{xy}.$$

Таблица 1. Значение наблюдений координат

Точка	Исходная система координат		Целевая система координат	
	x	y	X	Y
1	309.3916	951.6994	339.2178	971.2505
2	−808.56	588.1736	−778.759	607.9502
3	−808.673	−587.454	−778.742	−567.548
4	309.4559	−950.184	339.223	−930.773
5	1000.84	0.639887	1030.171	20.26966

Предлагаемый алгоритм, алгоритм Ньютона [20] и метод Лагранжа (метод Фанга) [3] использовались для расчета параметров двумерного аффинного преобразования, а условие остановки итерации было 10^{-12} . Результаты расчетов несколькими методами приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результат корректировки

Параметр	Предлагаемый алгоритм	Алгоритм Ньютона	Алгоритм Фанга
ξ_{11}	0.999827207612	0.999827207612	0.999827207612
ξ_{21}	−0.00000722847	−0.00000722847	−0.00000722847
ξ_{31}	29.76150789091	29.76150789091	29.76150789091
ξ_{12}	−0.00017525154	−0.00017525154	−0.00017525154
ξ_{13}	0.999965497834	0.999965497834	0.999965497834
ξ_{22}	19.68377295416	19.68377295416	19.68377295416
σ_0^2	0.147294126638	0.147294126638	0.147294126638
t	4	4	4

Из табл. 2 следует, что результаты предлагаемого метода полностью согласуются с результатами алгоритма Ньютона и алгоритма Лагранжа, что он реализуем и эффективен при оценке многомерной модели полных наименьших квадратов. Метод, описываемый в данной статье, основан на идее модели Ч-МОП и является расширением многомерной модели МОП до частичной многомерной модели МОП с использованием матричного преобразования. По сравнению с алгоритмами Ньютона и Лагранжа этот метод проще, а итерации алгоритма легко реализуемы.

4.2. Мониторинг оседания грунта

Для анализа применения модели Ч-ММОП в мониторинге оседания грунта, предложенной в данной работе, в качестве примера выбраны данные наблюдений 4-х точек мониторинга оседания грунта эстакады на скоростной автомагистрали. Данные мониторинга представляют собой 15 периодов непрерывного наблюдения (см. табл. 3). Поскольку точки мониторинга находятся на одной эстакаде, с учетом их корреляции для

моделирования и прогнозирования следует использовать многоточечную серую модель. Для моделирования были использованы исходные данные первых 13-ти фаз и выполнены на оценка прогнозирования последних 2-х фаз. Использовались традиционное решение МНК и решение МНПК в рамках модели Ч-ММОП, предложенной в данной статье. Результаты моделирования и прогнозирования точек мониторинга двумя методами показаны на рисунке. Критерии оценки точности, описанные в п. 3.2, используются для оценки моделей подгонки и прогнозирования. Значения моделей подгонки и прогнозирования представлены в табл. 4 и 5 соответственно.

Таблица 3. Исходные данные точек мониторинга

Номер фазы	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4
1	2.041	2.366	2.259	1.926
2	5.118	4.739	5.340	4.744
3	6.880	5.712	6.497	4.344
4	9.605	6.951	8.116	7.332
5	10.155	7.948	9.213	7.073
6	9.734	8.148	9.335	7.704
7	10.868	9.558	10.417	8.924
8	10.373	8.572	9.648	8.309
9	9.279	7.899	10.930	8.734
10	11.114	9.780	10.345	9.022
11	10.508	9.074	9.933	8.624
12	11.336	9.446	10.257	8.162
13	11.136	8.005	10.269	8.361
14	11.451	8.974	10.707	9.772
15	11.664	9.706	11.752	9.198

Таблица 4. Точность значений модели подгонки

Критерий	МСМ(1,N)/МНК				МСМ(1,N)/МНПК			
	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4
СКО	1.6793	0.9334	1.1120	0.9181	0.7258	0.7079	0.5852	0.6396
САО	1.3093	0.7456	0.8026	0.7102	0.5853	0.5368	0.4528	0.4960
СОО	13.4762	9.2110	8.8401	9.8707	6.9818	6.9182	5.2623	7.1750

Таблица 5. Точность значений модели прогнозирования

Критерий	МСМ(1,N)/МНК				МСМ(1,N)/МНПК			
	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4
СКО	1.1617	0.8291	2.1891	2.4815	0.0441	0.4210	0.4124	0.4503
САО	1.0054	0.7956	2.1774	2.3358	0.0320	0.3378	0.3908	0.3970
СОО	8.7459	8.6297	19.5257	24.3815	0.2793	3.7283	3.4333	4.1214

Из рисунка следует, что смоделированные комбинация и прогноз МСМ(1,N), оцененные предлагаемым методом в четырех точках мониторинга, близки к тенденции изменения данных измерений. Судя по точностям моделирования и прогнозирования, представленным в табл. 4 и 5, ясно видно, что предлагаемый метод превосходит МСМ(1,N), оцениваемый с помощью традиционного МНК, что подтверждает эффективность предлагаемого метода при оценивании МСМ(1,N). Следует отметить, что на рисунке также видно, что данные наблюдений, используемые в этом примере, имеют в отдельные периоды очевидные колебания, которые могут быть вызваны ошибками измерений. Когда в данных наблюдений есть очевидные ошибки, модель Ч-ММОП, описываемая в данной

статье, может лучше учитывать влияние ошибок, и результаты расчетов хорошо согласуются с фактическими результатами, в то время как традиционное оценивание МНК приводит к большим колебаниям в прогнозировании. Однако, если в данных наблюдений есть грубая ошибка, алгоритм модели Ч-ММОП, предлагаемой в данной статье, необходимо расширить.

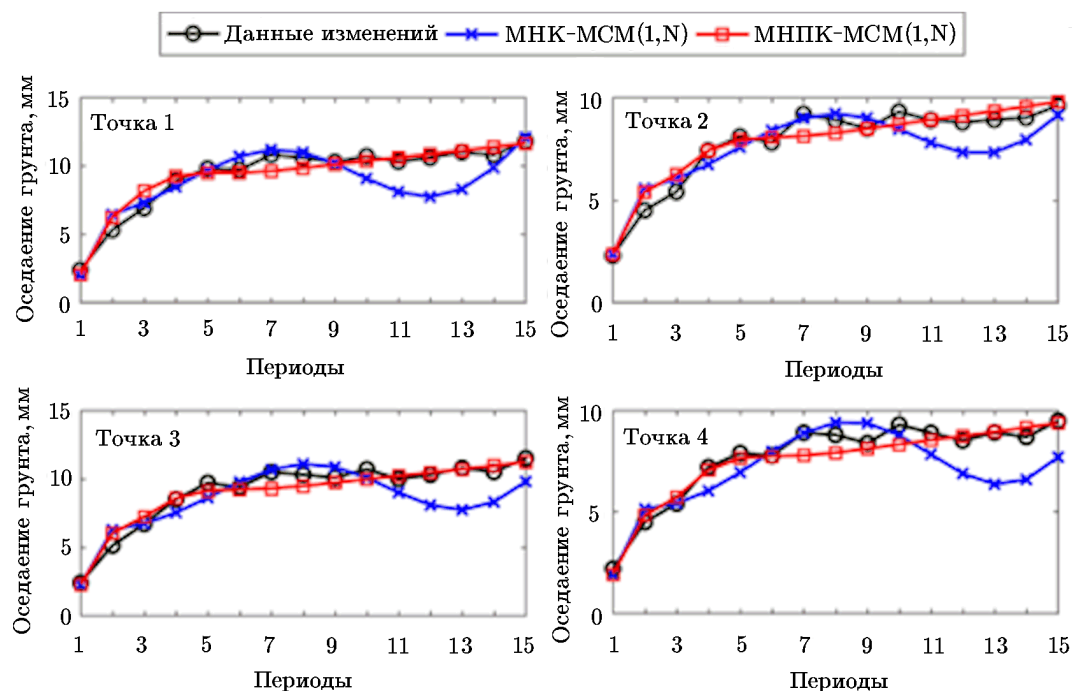


Рис. Сравнение результатов моделирования и прогнозирования точек мониторинга

5. Выводы

В данной статье многомерная модель МОП расширена до модели Ч-ММОП, основанной на идее модели Ч-МОП, и предложен новый алгоритм для модели Ч-ММОП, который легко получить и легко реализовать программно. Результаты подтверждают правильность и эффективность предложенного алгоритма на примере преобразования координат и сравнения с существующей многомерной моделью МОП. На этой основе алгоритм модели Ч-ММОП, предложенный в данной статье, применяется к мониторингу оседания грунта для оценки модели МСМ(1,N). Результаты показывают, что модель Ч-ММОП, представленная в данной статье, может лучше учитывать влияние ошибок наблюдений и превосходит традиционную модель МСМ(1,N) при оценивании МНК с точки зрения точности моделирования и прогнозирования, а результаты оценивания хорошо согласуются с реальными.

Литература

1. Golub G.H., Loan C.V. An analysis of the total least squares problem // SIAM J. Numerical Analysis. — 1980. — Vol. 17, № 6. — P. 883–893.

2. **Schaffrin B., Wieser A.** On weighted total least-squares adjustment for linear regression // *J. Geodesy*. — 2008. — Vol. 82. — P. 415–421.
3. **Fang X.** Weighted Total Least Squares Solutions for Applications in Geodesy. — Hannover: Leibniz University of Hannover, 2011.
4. **Jazaeri S., Amiri-Simkooei A.R., Sharifi M.A.** Iterative algorithm for weighted total least squares adjustment // *Survey Review*. — 2014. — Vol. 46. — P. 19–27.
5. **Amiri-Simkooei A.R.** Weighted total least squares with singular covariance matrices subject to weighted and hard constraints // *J. Surveying Engineering*. — 2017. — Vol. 143, iss. 4. — Article № 04017018.
6. **Wang L., Yu F.** Jackknife resampling parameter estimation method for weighted total least squares // *Communications in Statistics — Theory and Methods*. — 2020. — Vol. 49. — P. 5810–5828.
7. **Xu P., Liu J., Shi C.** Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models: algorithm and statistical analysis // *J. Geodesy*. — 2012. — Vol. 86. — P. 661–675.
8. **Shi Y., Xu P., Liu J., Shi C.** Alternative formulae for parameter estimation in partial errors-in-variables models // *J. Geodesy*. — 2015. — Vol. 89. — P. 13–16.
9. **Fang X.** A structured and constrained Total Least-Squares solution with cross-covariances // *Studia Geophysica et Geodaetica*. — 2014. — Vol. 58. — P. 1–16.
10. **Zhang S., Tong X., Zhang K.** A solution to EIV model with inequality constraints and its geodetic applications // *J. Geodesy*. — 2013. — Vol. 87. — P. 23–28.
11. **Fang X., Wu Y.** On the errors-in-variables model with equality and inequality constraints for selected numerical examples // *Acta Geodaetica et Geophysica*. — 2016. — Vol. 51. — P. 515–525.
12. **Xie J., Lin D., Long S.** Total least squares adjustment in inequality constrained partial errors-in-variables models: optimality conditions and algorithms // *Survey Review*. — 2021. — P. 1–14.
13. **Wang B., Yu J., Liu C., Li M., Zhu B.** Data snooping algorithm for universal 3D similarity transformation based on generalized EIV model // *Measurement*. — 2018. — Vol. 119. — P. 56–62.
14. **Wang L., Yu F., Li Z., Zou C.** Jackknife method for variance components estimation of partial EIV model // *J. Surveying Engineering*. — 2020. — Vol. 146. — Article № 04020016.
15. **Felus Y.A., Burtch R.C.** On symmetrical three-dimensional datum conversion // *GPS Solutions*. — 2009. — Vol. 13. — P. 65–74.
16. **Markovsky I., Huffel S.V., Kukush A.** On the computation of the multivariate structured total least squares estimator // *Numerical Linear Algebra with Applications*. — 2004. — Vol. 11, iss. 5-6. — P. 591–608.
17. **Schaffrin B., Felus Y.A.** On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations. Three algorithms // *J. Geodesy*. — 2008. — Vol. 82. — P. 373–383.
18. **Schaffrin B., Wieser A.** Empirical affine reference frame transformations by weighted multivariate TLS adjustment // *Geodetic Reference Frames*. — 2009. — P. 213–218.
19. **Wang Q., Hu Y., Wang B.** The maximum likelihood estimation for multivariate EIV model // *Acta Geodaetica et Geophysica*. — 2019. — Vol. 54. — P. 213–224.
20. **Wang L., Zhao Y., Chen X., Zang D.** A newton algorithm for multivariate total least squares problems // *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*. — 2016. — Vol. 45, № 4. — P. 411–417.
21. **Zhai J., Sheng J.M., Feng Y.J.** The grey model MGM(1,n) and its application // *Systems Engineering — Theory & Practice*. — 1997. — Vol. 17. — P. 109–113.
22. **Fang X.** Weighted total least squares: necessary and sufficient conditions, fixed and random parameters // *J. Geodesy*. — 2013. — Vol. 87. — P. 733–749.
23. **Xu X., Hu Z., Su Q., Li Y., Dai J.** Multivariable grey prediction evolution algorithm: A new metaheuristic // *Applied Soft Computing*. — 2020. — Vol. 89. — Article № 106086.

24. **Feng-Xiao W.** Multivariable non-equidistance GM(1,m) model and its application // Systems Engineering and Electronics. — 2007. — Vol. 29. — P. 388–390.

Поступила в редакцию 1 декабря 2023 г.

После исправления 19 марта 2024 г.

Принята к печати 19 апреля 2024 г.

