

УДК 533.6:519.63

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ

А. М. Липанов, С. А. Карсканов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426067 Ижевск

E-mails: ipm@udman.ru, ser@udman.ru

Анализируются результаты параметрического исследования нестационарных ламинарных потоков. Решаются трехмерные нестационарные уравнения гидромеханики для сжимаемой среды. Рассматривается диапазон значений характерного числа Рейнольдса $Re = 400 \div 900$. Показано, что при $Re = 415$ ламинарное течение в плоском канале перестает быть стационарным и при увеличении числа Рейнольдса интенсивность нестационарных процессов нарастает, возмущения проникают в глубь канала, отрывные зоны теряют устойчивость. Однако в окрестности выхода течение имеет тенденцию к стабилизации, хотя и остается нестационарным. Перехода к турбулентному течению в рассматриваемом диапазоне значений числа Рейнольдса не происходит.

Ключевые слова: уравнения гидромеханики, число Рейнольдса, число Маха, число Прандтля, область интегрирования, отрывная зона.

В работах [1, 2] исследовались параметрически стационарные ламинарные потоки в канале, которые при значениях числа Рейнольдса $Re \leq 90$ остаются симметричными, а при $Re > 90$ приобретают несимметричную структуру, что хорошо заметно в окрестности входа в канал. Вдали от входа в канал асимметричность исчезает, и поток становится одномерным.

В данной работе анализируются результаты теоретического исследования нестационарных ламинарных потоков.

В окрестности значения числа Рейнольдса $Re \approx 400$ стационарный поток теряет устойчивость и становится нестационарным. В работе [3] такой вариант потери устойчивости полагался переходом к турбулентности, но А. Т. Федорченко показал, что это переход не к турбулентному, а к нестационарному ламинарному потоку [4]. Переход к турбулентным потокам происходит при значениях числа Рейнольдса $Re > Re_{cr}$.

Как и в работах [1, 2], рассматривается система нестационарных трехмерных уравнений гидромеханики. Используются следующие безразмерные переменные: t — время; x, y, z — соответственно продольная, вертикальная и нормальная к ним поперечная пространственные координаты, образующие левую систему координат; p, ρ, U, V, W, E — гидромеханические параметры (давление, плотность, компоненты вектора скорости потока и удельная энергия соответственно).

Задача решается для канала, показанного на рис. 1. Координатам x, y, z соответствуют компоненты U, V, W вектора скорости потока. Граничные условия на входе в канал задавались в плоскости вертикальных стенок уступов. Рассматриваемые в работе течения газа в плоском канале в диапазоне значений числа Рейнольдса $Re = 400 \div 900$ характерны

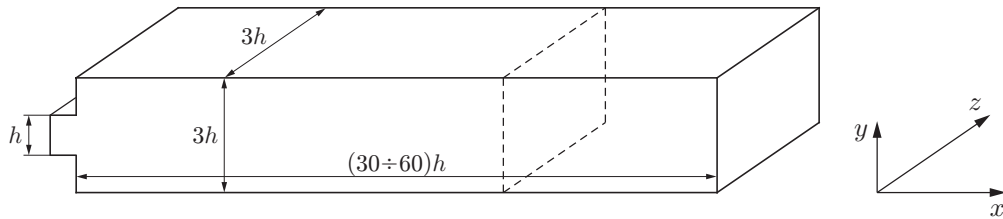


Рис. 1. Область интегрирования

для различных технических устройств и испытательных установок (каналы газодинамической связи в летательных аппаратах, вентиляторы, турбины, аэродинамические трубы и др.).

В качестве масштабов использовались: для линейных величин — длина ступеньки h , равная ширине канала на его входе; для скоростей — максимальное значение продольной компоненты U_Λ вектора скорости потока на входе в канал; для давления и плотности — давление p_Λ и плотность ρ_Λ , соответствующие U_Λ . На основе этих величин сформированы числа Рейнольдса, Маха, Прандтля. При этом полагалось, что $M = 0,6$, $Pr = 0,7$. Вязкость $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и теплопроводность $\lambda = 0,03$ Вт/(м·К) считались постоянными, так как уровень температур в задаче близок к нормальному, а температура при указанных значениях скоростей практически не меняется.

Рассматривается дозвуковой поток в канале длиной $L = 60$, высотой $2H = 3$, равной его ширине в поперечном направлении. При этом разностная сетка состояла из 1 022 301 ($601 \times 81 \times 21$) узлов. Число расчетных точек разностной сетки выбиралось таким образом, чтобы погрешность приближенного решения составляла не более 0,1 %. Расчеты проводились с использованием многопроцессорной вычислительной системы с 20 процессорами Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН. Область интегрирования однонаправленно делилась на равные подобласти вдоль оси x .

Интегрирование уравнений гидромеханики по времени осуществлялось методом Рунге — Кутты со вторым порядком точности. Интегрирование по пространственным переменным выполнялось с восьмым порядком точности. Внутри области интегрирования производные аппроксимировались центральными разностями восьмого порядка на девяти-точечном шаблоне. В окрестности границ производные вычислялись по значениям внутренних точек методом конечных разностей, однако в этом случае вследствие несимметричности шаблона он был расширен до десяти точек для сохранения восьмого порядка точности при интегрировании по пространству. Для вычисления диффузионных членов, содержащих производные второго порядка, использовались формулы для вторых производных. Более подробно данный метод изложен в работе [5], в которой показано, что при моделировании турбулентного течения при $Re = 10^4$, $M = 0,6$ в таком же канале на такой же пространственной сетке с использованием аппроксимации производных восьмого порядка по пространству и второго порядка по времени погрешность не превышает 0,1 %. Течения, рассмотренные в настоящей работе, более упорядочены и имеют характерные числа Рейнольдса $Re < 10^4$, поэтому в данном случае точность полученных численных результатов не ниже.

На входе в канал задавались компоненты U_0 , V_0 , W_0 вектора скорости потока. При этом

$$U_0 = \varphi(y, \delta_U) + C_1(p_0 - \langle p \rangle)\varphi(y, \delta_S); \quad (1)$$

$$\varphi(y, \delta_\xi) = \begin{cases} 1 - (1 - y/\delta_\xi)^N, & 0 \leq y \leq \delta_\xi, \\ 1, & \delta_\xi < y \leq h - \delta_\xi, \\ 1 - ((y - h + \delta_\xi)/\delta_\xi)^N, & h - \delta_\xi < y \leq h, \end{cases}$$

где индекс ξ принимает значения U, S ; S — энтропийная функция; p_0 — давление на входе в канал, получаемое в процессе решения задачи; $\langle p \rangle$ — среднее значение давления на входе в канал (осреднение проводится только в плоскости входа, на которой задаются граничные условия); коэффициент C_1 определяется по формуле $C_1 = 1/(kM)$; $k = 1,4$ — отношение теплоемкостей; $\delta_U = 0,2$, $\delta_S = 0,1$ — безразмерные толщины динамического и теплового пограничных слоев; N — порядок точности аппроксимации.

Согласно работе [4] второе слагаемое в условии (1) используется для вывода за пределы области интегрирования возмущений, достигающих левой (входной) границы канала. Компоненты V_0, W_0 принимались равными нулю:

$$V_0 = W_0 = 0. \quad (2)$$

Кроме того, на входе в канал для ядра потока задавалось условие изоэнтропичности

$$p_0 = S_0 \rho_0^k.$$

В этом случае соотношение для вычисления безразмерной температуры с учетом наличия пограничного слоя имеет вид

$$T = 1 + (S_0 p^{(k-1)/k} - 1) \varphi(y, \delta_S),$$

где S_0 — безразмерная энтропийная функция (в расчетах полагалось $S_0 = 1$).

При $x = L$ на выходе из канала задавалось условие

$$p_L = p_{ext} + C_2(m_L - \langle m \rangle), \quad (3)$$

где $m = \iint_{S(x)} \rho U dy dz$ — расход газа через поперечное сечение x канала в данный момент

времени; $\langle m \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L m dx$ — средний по длине канала расход в данный момент времени;

m_L — расход на выходе из канала; p_{ext} — давление окружающей среды, т. е. внешнее давление (в безразмерном виде $p_{ext} = 1$); коэффициент $C_2 = kM/(2H + \langle m \rangle M)$; H — полувысота канала (в направлении координаты y).

Согласно работе [4] второе слагаемое в условии (3) используется для вывода возмущений за пределы области интегрирования при достижении ими правой (выходной) границы канала. Остальные гидромеханические параметры на выходе определяются экстраполяцией с использованием “мягких” граничных условий.

На обтекаемых поверхностях, которые рассматривались как адиабатические, задавались условие прилипания

$$U = V = W = 0$$

и условие адиабатичности

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

т. е. рассматривались такие уровни температуры в движущейся среде, когда теплообменом со стенками можно пренебречь.

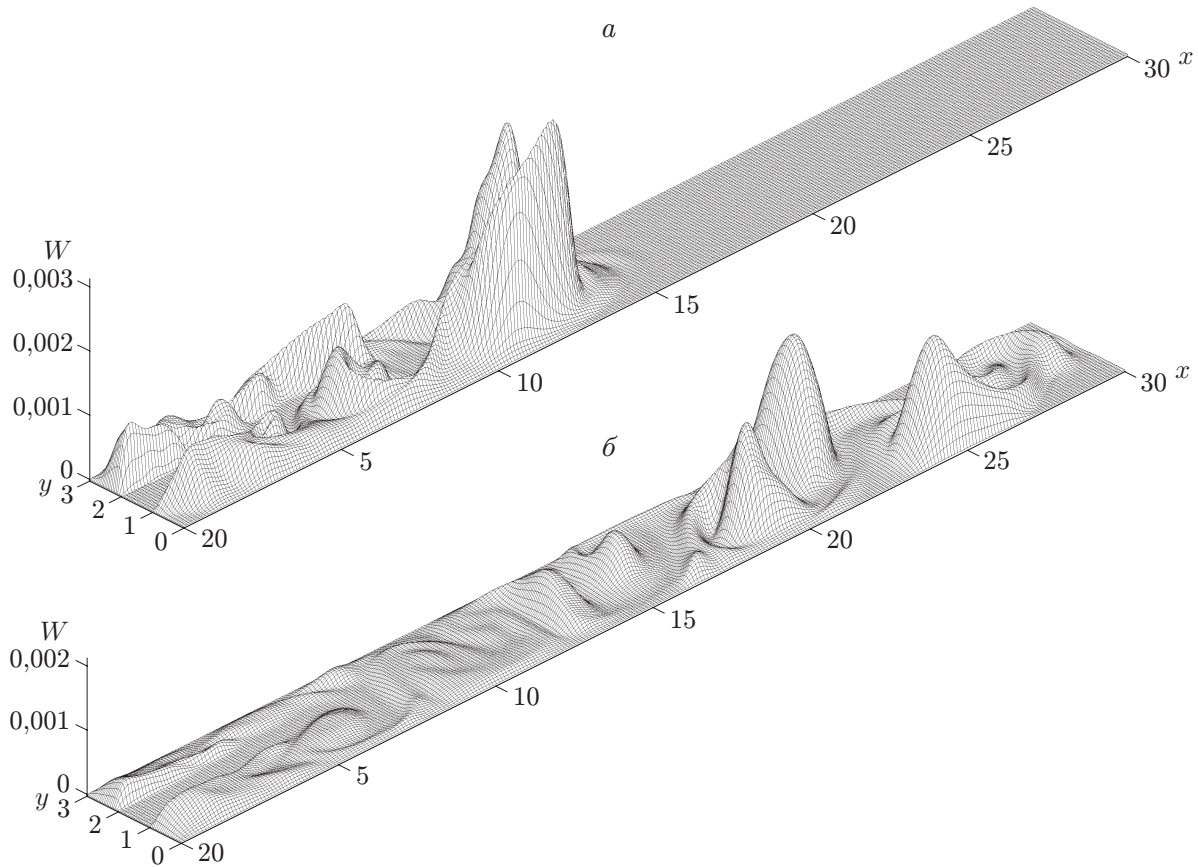


Рис. 2. Эволюция поперечной (третьей) компоненты W вектора скорости потока во времени при $Re = 800$:
 $a - t = 28$; $b - t = 60$

Одна из плоскостей xy выбиралась в качестве начала отсчета переменной z , и на расстоянии от этой плоскости, равном $\pm H_z$, задавались условия периодичности

$$U_+ = U_-, \quad V_+ = V_-, \quad W_+ = W_-, \quad p_+ = p_-, \quad \rho_+ = \rho_-.$$

Расстояние H_z выбиралось методом проб на основе асимптотической сходимости с заданной точностью результатов вычислений и принималось равным 1,5.

Кроме того, на входе в канал задавалось трехмерное возмущение в начальный момент времени, для чего вместо условий (2) использовались равенства

$$V_0 = W_0 = 0,1U_0.$$

Такой трехмерный поток на входе в канал поддерживался в течение определенного времени, которое определялось на основе численного эксперимента. В работе [5] показано, что достаточно 100 шагов (0,2 безразмерные единицы) интегрирования по времени, чтобы в турбулентном диапазоне значений гидромеханических параметров в рассматриваемой двумерной области интегрирования поток оставался трехмерным при сколь угодно продолжительном решении задачи. Затухание же третьей компоненты W вектора скорости потока свидетельствует о том, что рассматриваемая область значений гидромеханических параметров является ламинарной.

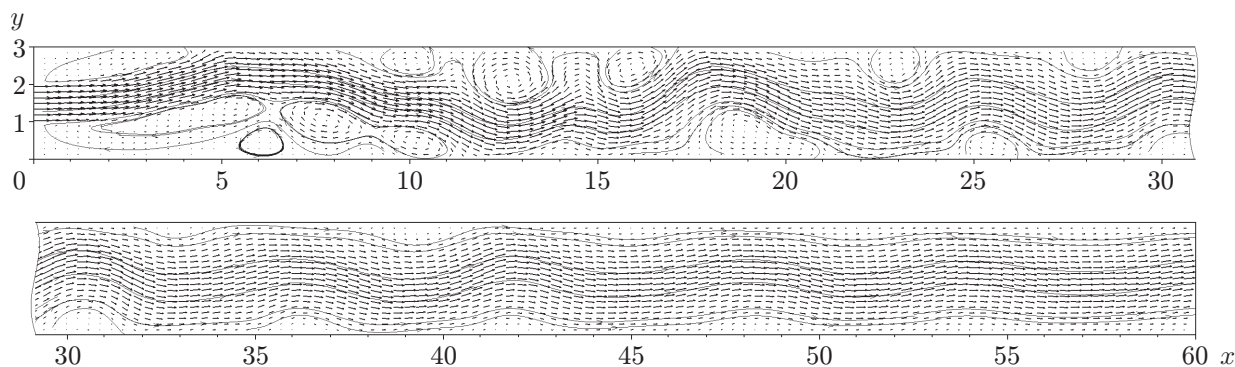


Рис. 3. Векторы скорости потока и линии тока струи в момент времени $t = 400$ при $Re = 600$

После 100 шагов интегрирования по времени вновь использовались условия (2). В этот момент безразмерное время $t = 0,2$. На рис. 2 показана эволюция поперечной (третьей) компоненты W вектора скорости потока в канале при $Re = 800$. Видно, что при $t = 60$ (см. рис. 2, б) движением охвачена вся область интегрирования длиной 30 единиц. Фронт возмущения скорости, который находится в окрестности правой границы канала, достаточно интенсивен ($W = 0,002$) по сравнению с фронтом возмущения при $t = 28$ ($W = 0,003$) (см. рис. 2, а). Однако в остальном объеме канала возмущения уже на два порядка меньше, чем при $t = 28$, поэтому при $t > 60$ даже в случае $Re = 800$ поток становится двумерным. Это свидетельствует о том, что диапазон значений гидромеханических параметров является ламинарным, поскольку трехмерность — один из признаков турбулентных потоков.

На рис. 3 приведены линии тока в момент времени $t = 400$ при $Re = 600$. Движение газа нестационарное, с образованием возвратных течений не только в окрестности входа в канал, но и далее вниз по потоку до значения $x = 40$. Однако в окрестности левой границы канала нестационарные явления наиболее выражены: отрывные зоны увеличиваются, в них располагается по нескольку дробящихся и сливающихся вихрей. Начиная со значения $x = 17$ отрывные зоны содержат по одному крупному вихрю. Далее вниз по потоку при $x > 17$ максимальный поперечный размер отрывных зон постепенно уменьшается. При достаточно больших значениях x отрывные зоны с возвратным течением периодически заменяются зонами с замедленным течением, над которыми поток несколько отклоняется. Возникая то внизу, то сверху канала, эти зоны отклоняют поток соответственно то вверх, то вниз. При $Re > 700$ происходит обратный процесс: зоны с замедленным течением вблизи стенки периодически превращаются в вихри, образуя отрывные зоны с возвратным течением. Это обусловлено влиянием на течение увеличивающегося числа Рейнольдса и условий прилипания. Влияние вязкости вблизи стенки, также вызванное условиями прилипания, проявляется в торможении газа, который при увеличении числа Рейнольдса и инерционных сил отстает от основного потока. В результате линии тока смещаются, происходят отрывы с возвратным течением. Однако в целом при увеличении координаты x колебания в потоке уменьшаются, несмотря на то что при $x = 60$ он остается существенно нестационарным. При увеличении числа Рейнольдса отрывные зоны с возвратным течением (вихри) проникают дальше в глубь канала. В табл. 1 приведены максимальные значения расстояний x_{\max} на верхней и нижней стенках, которых достигают вихри, при различных числах Рейнольдса.

При увеличении числа Рейнольдса форма движущихся по каналу вихрей также меняется. При $Re = 700$ вихри имеют форму эллипса, вытянутого вдоль оси x , при $Re > 700$

Таблица 1

Максимальные значения расстояний
на верхней и нижней стенках, которых достигают вихри

Re	$x_{\max} _{y=3}$	$x_{\max} _{y=0}$
600	41,5	40,90
700	42,8	45,70
800	45,2	47,40
900	50,9	53,75

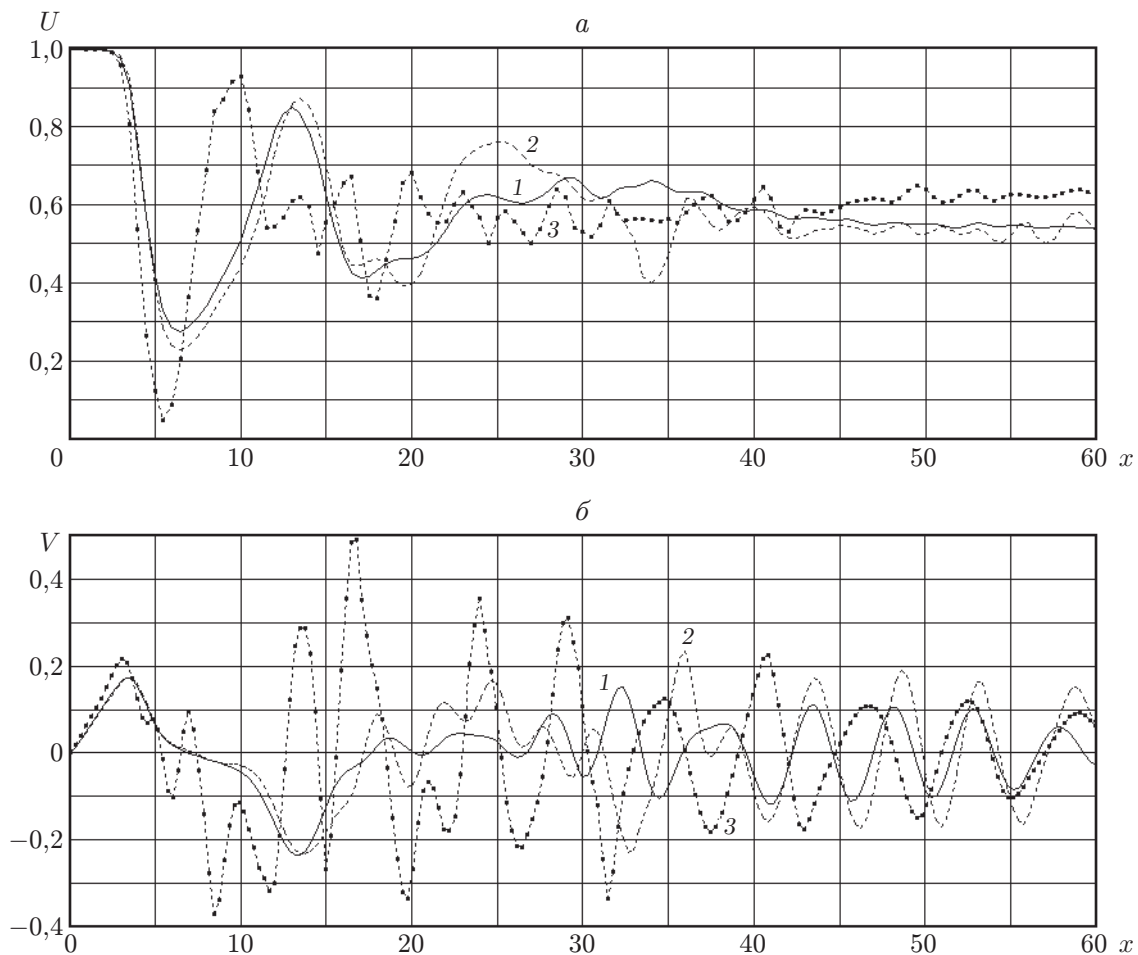


Рис. 4. Изменение продольной (а) и вертикальной (б) компонент вектора скорости потока по длине канала в момент времени $t = 400$ при $y = 1,5$, $z = 0$ и различных значениях числа Рейнольдса:

1 — $Re = 430$, 2 — $Re = 500$, 3 — $Re = 600$

Таблица 2

Максимумы (U_{\max} , V_{\max}) и минимумы (U_{\min} , V_{\min})
 продольной и вертикальной компонент вектора скорости потока
 на оси симметрии канала

Re	U_{\max}	U_{\min}	V_{\max}	V_{\min}
430	0,998	0,269	0,174	-0,248
500	0,999	0,225	0,319	-0,302
600	1,036	0,020	0,557	-0,543
700	1,070	-0,087	0,663	-0,789
800	1,096	-0,184	0,753	-0,893
900	1,117	-0,279	0,817	-0,975

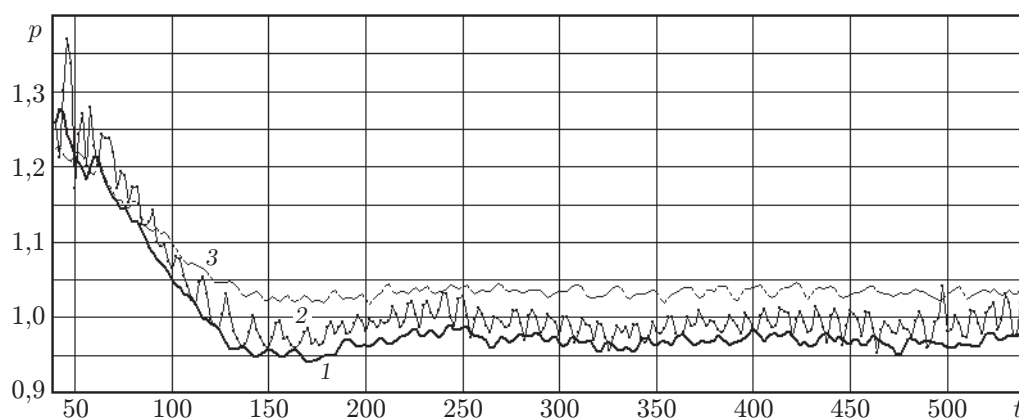


Рис. 5. Зависимость давления от безразмерного времени при $y = 1,5$, $z = 0$, $Re = 600$ в различных точках на оси канала:
 1 — $x = 1$, 2 — $x = 10$, 3 — $x = 45$

вихри начинают вытягиваться в направлении оси y и при $Re = 900$ принимают форму эллипса, вытянутого вдоль оси y .

На рис. 4 приведены зависимости продольной и вертикальной компонент вектора скорости от координаты x при $y = 1,5$, $z = 0$ и различных значениях числа Рейнольдса в момент времени $t = 400$. Видно, что при увеличении x продольная компонента U стабилизируется. Вертикальная компонента V вектора скорости потока при $y = 1,5$, $z = 0$ является колеблющейся функцией координаты x . При увеличении числа Рейнольдса эта колебательность возрастает, при увеличении координат x амплитуды колебаний V уменьшаются. Тем не менее при $x = 60$, $Re = 600$ эти колебания еще значительны. Аналогичный характер изменения U , V наблюдается и при $Re > 600$. Несмотря на то что при увеличении числа Рейнольдса максимальные отклонения компонент U , V также увеличиваются, они не превышают некоторого уровня (табл. 2). Аналогичные тенденции наблюдаются при изменении U_{\min} , V_{\min} .

Наиболее значительные изменения U и V происходят в отрывных зонах в окрестности левой границы канала.

На рис. 5 приведена зависимость давления от времени при $Re = 600$ в трех точках канала: в окрестности левой границы ($x = 1$), при $x = 10$ и $x = 45$. Видно, что характер изменения кривых примерно одинаковый. Сначала давление уменьшается, а при $t > 140$ становится практически постоянным. Локальные изменения давления не превышают 3%. Аналогичные результаты получены и при других значениях числа Рейнольдса.

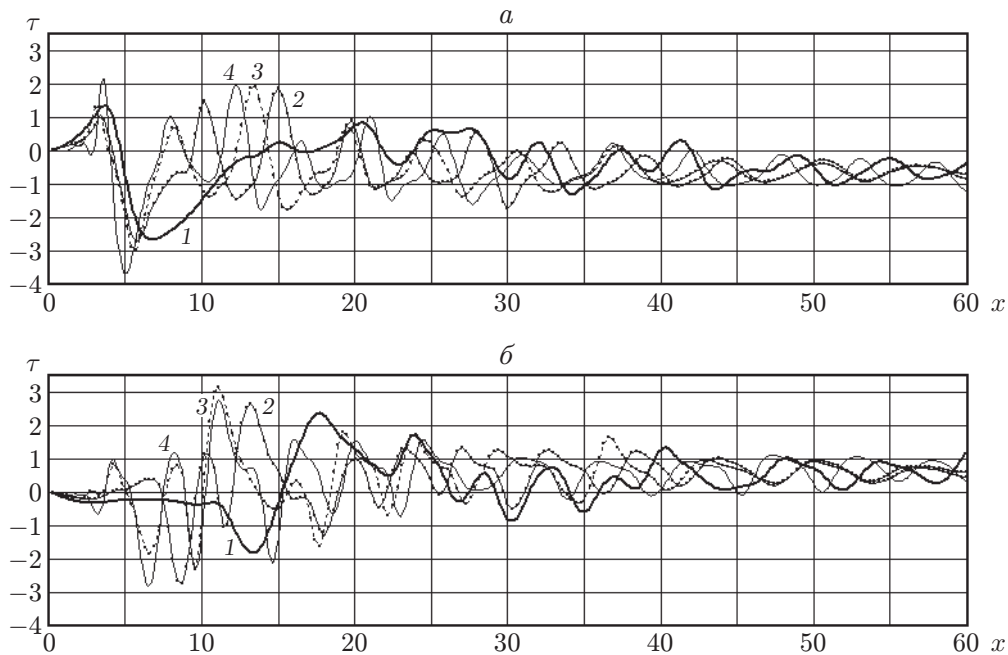


Рис. 6. Зависимость напряжения трения на стенках канала в момент времени $t = 500$ при различных значениях числа Рейнольдса:
 а — верхняя стенка ($y = 3$); б — нижняя стенка ($y = 0$); 1 — $Re = 500$, 2 — $Re = 600$,
 3 — $Re = 700$, 4 — $Re = 900$

На рис. 6 приведены зависимости касательных напряжений трения ($\tau|_{y=0} = \partial U / \partial y$) на верхней и нижней стенках канала от координаты x при различных значениях числа Рейнольдса в момент времени $t = 500$. В условиях нестационарного изменения гидромеханические параметры представляют собой колеблющиеся функции координаты x с амплитудой, постепенно затухающей вниз по потоку.

В работе [2] показано, что при отклонении потока в окрестности левой границы канала вверх протяженность нижней отрывной зоны (до значения $x \approx 12$) становится значительно больше протяженности верхней отрывной зоны (до значения $x \approx 4$). При $Re = 400 \div 900$ наблюдается аналогичная картина, однако отрывные зоны становятся нестационарными. Кроме того, при увеличении числа Рейнольдса эти зоны теряют устойчивость, вихри начинают срывать вниз по потоку. На рис. 6 видно, что на нижней стенке отрывная зона теряет устойчивость раньше, причем при $Re = 500$ кривая не пересекается с осью в области нижней отрывной зоны (до значения $x \approx 12$). Это свидетельствует о том, что при $Re > 500$ вблизи нижней стенки в окрестности входа в канал поток несколько раз меняет направление. При $Re < 500$ течение имеет достаточно большую устойчивую нижнюю отрывную зону (до значения $x \approx 14$), хотя и нестационарную. На верхней стенке в соответствующей зоне (до значения $x \approx 4$) пересечения с осью кривых напряжения трения отсутствуют до значения числа Рейнольдса $Re = 900$. Таким образом, можно сделать вывод, что верхняя отрывная зона более устойчива, чем нижняя отрывная зона.

В окрестности правой границы канала касательные напряжения трения имеют разные знаки: на верхней границе напряжение трения отрицательное, на нижней — положительное, т. е. пересечения с осью отсутствуют. При этом по модулю значения касательных напряжений трения примерно одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Липанов А. М., Карсканов С. А.** Установление и эволюция параметров симметричного ламинарного потока в плоском канале с внезапным расширением // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 35–42.
2. **Липанов А. М., Карсканов С. А.** Исследование установившихся ламинарных потоков, подвергнутых воздействию начального возмущения // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 11–19.
3. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
4. **Федорченко А. Т.** Численное исследование нестационарных дозвуковых течений вязкого газа во внезапно расширяющемся плоском канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 32–41.
5. **Липанов А. М.** Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А. М. Липанов, Ю. Ф. Кисаров, И. Г. Ключников. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.

*Поступила в редакцию 13/IX 2007 г.,
в окончательном варианте — 25/II 2009 г.*