

13. Богданов А. Н., Куликовский В. А. Распространение нестационарных слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе, подверженном действию внешнего излучения // ПМТФ.— 1990.— № 5.
14. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
15. Богданов А. Н., Куликовский В. А. Стационарные сверхзвуковые течения колебательно-возбужденного газа около тонких тел // ПМТФ.— 1993.— № 1.
16. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений.— М.: ИЛ, 1960.
17. Зауер Р. Течения сжимаемой жидкости.— М.: ИЛ, 1954.

г. Москва

Поступила 10/XII 1991 г.

УДК 537.86/87 : 530.182; 533.6.013.42

В. П. Реутов

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ПЛАСТИН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЛАБОСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ

Изучение установившихся колебаний пластин в потоках жидкости и газа (нелинейного панельного флаттера) позволяет определить реальный уровень вибраций обтекаемой поверхности. В настоящее время имеется большое число работ по нелинейному флаттеру пластин в сверхзвуковом однородном потоке (см., например, [1—3]). В [4] продемонстрирована возможность возникновения динамического хаоса при сверхзвуковом панельном флаттере. Решение аналогичной задачи для дозвукового течения связано с принципиальной необходимостью учета взаимодействия прогиба пластин с пограничным слоем этого течения.

В данной работе изучается нелинейный флаттер одной пластины и системы из двух смежных пластин с закрепленными краями, находящихся под турбулентным пограничным слоем слабосжимаемого (существенно дозвукового) течения. Пластины состыкованы вплотную последовательно по течению на одном уровне с жесткой плоской поверхностью. Плотность неподвижной среды с противоположной стороны поверхности предполагается пренебрежимо малой. Выясняется возможность возникновения динамического хаоса в такой системе. Анализ основывается на результатах работ [5, 6], в которых определялся линейный отклик среднего течения на одноименные гармонические колебания пластинок.

1. Аналитические аппроксимации для элементов матрицы присоединенных упругостей. Следуя [6], рассмотрим колебания смежных пластинок в плоскопараллельном потоке, профиль скорости которого совпадает с профилем продольной скорости среднего течения в турбулентном пограничном слое. Прогиб каждой пластинки будем аппроксимировать первой модой галеркинских разложений, использованного в [6], где даны также граничные условия на краях пластин и ограничения на их геометрические размеры. Для силового отклика течения на гармонические ($\sim e^{-i\omega t}$) колебания пластин можно записать выражение вида [6]

$$(1.1) \quad F_{1,2\omega}^{(0)} = -\rho u_{\infty}^2 k_0 (G A_{1,2\omega} + G_{1,2} A_{2,1\omega}).$$

Здесь и далее сохранены обозначения [6]: $A_{j\omega}$ — амплитуда первой моды прогиба j -й пластинки; G и $G_{1,2}$ — элементы матрицы безразмерных присоединенных упругостей (для колебаний на первой моде); ρ — плотность движущейся жидкости; δ — толщина пограничного слоя; $k_0 = \pi/L_1$ (L_1 — размер пластин по потоку); верхний индекс (0) означает приближение несжимаемой жидкости.

Для описания негармонических колебаний пластин с нулевыми начальными возмущениями в потоке будем рассматривать (1.1) как связь

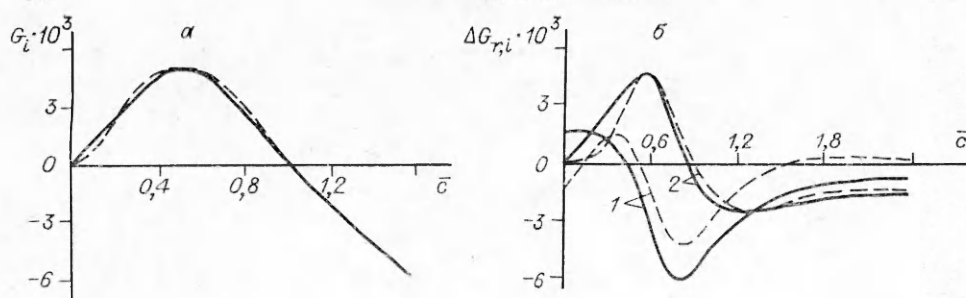


Рис. 1

преобразований Лапласа переменных $F_{1,2}^{(0)}(t)$ и $A_{1,2}(t)$ *. Это возможно в силу определения функций частоты G и $G_{1,2}$ как аналитических продолжений с контура интегрирования в обратном преобразовании Лапласа на действительную ось комплексной плоскости ω [5].

Для практической реализации переходов от (1.1) к временному представлению введем аппроксимацию G и $G_{1,2}$ аналитическими функциями ω . Потребуем, чтобы эти аппроксимации обеспечивали совпадение полученных с их помощью контрольных частотных зависимостей с аналогичными зависимостями, построенными по результатам вычисления G и $G_{1,2}$ в ограниченном интервале действительных значений ω . Будем исходить из представления G и $G_{1,2}$ в виде суммы главной части, которая совпадает с квазипотенциальным приближением для этих функций (см. [6]), и малых добавок, обусловленных диссипативными процессами. Аппроксимации запишем в безразмерных переменных $k_0 = k_0 \delta$, $\bar{c} = \omega/k_0 u_\infty$, использованных в [6]:

$$(1.2) \quad G = -(a_0 \bar{c}^2 + d_0) + \beta [\varphi(\bar{c}) - ig_0 \bar{c}];$$

$$(1.3) \quad \varphi = \frac{iq_0 \bar{c} + s_0}{\bar{c}^2 + i\sigma_0 \bar{c} - c_0^2};$$

$$(1.4) \quad G_1 = -(a_1 \bar{c}^2 - ib_1 \bar{c} + d_1), \quad G_2 = -(a_1 \bar{c}^2 + ib_1 \bar{c} + d_1) - \beta_1 \varphi_1(\bar{c});$$

$$(1.5) \quad \varphi_1 = \frac{iq_1 \bar{c} + s_1}{\bar{c}^2 + i\sigma_1 \bar{c} - c_1^2}.$$

Параметры квазипотенциальных составляющих в (1.2), (1.4) при $k_0 = 1$, $R = 8 \cdot 10^4$ и отношении размеров пластины $L_2/L_1 = 3$ имеют вид [6] $a_0 = 1,8$, $d_0 = 0,46$, $a_1 = 0,54$, $b_1 = 0,43$, $d_1 = 0,10$. Подбор параметров диссипативных добавок производился из условия совпадения рассчитанных в [6] функций G_i и $\Delta G_{r,i}$ ($\Delta G = G_1^* - G_2$) с их аналогами $\beta(\varphi_i - g_0 \bar{c})$ и $\beta_1 \varphi_{1,r,i}$ в контрольных точках. При тех же значениях k_0 , R было найдено $\beta = 0,005$, $q_0 = 0,76$, $s_0 = -1,38$, $\sigma_0 = 1,18$, $c_0 = 0,75$, $g_0 = 1,17$, $\beta_1 = 0,0079$, $q_1 = -0,7$, $s_1 = -0,20$, $\sigma_1 = 0,56$, $c_1 = 0,75$. На рис. 1, а, б штриховые линии — исходные функции G_i и $\Delta G_{r,i}$, а сплошные — их аппроксимации (1 — ΔG_r , 2 — ΔG_i). Коэффициенты β , β_1 в (1.2), (1.4) использовались для нормировки функций $\varphi - ig_0 \bar{c}$ и φ_1 : полагалось $\varphi_i - g_0 \bar{c} = 1$ и $\varphi_{1,i} = 1$ в точках первого (считая от $\bar{c} = 0$) максимума G_i и ΔG_i соответственно.

Вопрос об однозначности представлений (1.2) — (1.5) следует рассматривать в рамках общей проблемы определения аналитической передаточной функции по ее действительной или мнимой части, заданной при действительных частотах ω . Передаточная функция находится однозначно, если можно установить однозначную связь между ее действительной и мнимой частями на действительной оси комплексной плоскости ω .

* Комплексный параметр ω связан с традиционным параметром преобразования Лапласа p соотношением $p = -i\omega$.

В электродинамике подобная связь для диэлектрической восприимчивости известна как соотношения Крамерса — Кронига [7]. Она существует в том случае, когда передаточная функция описывает релаксационный отклик среды. Формально это выражается в отсутствии у передаточной функции особенностей в верхней полуплоскости и стремлении ее к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \omega \geq 0$.

Если предположить, что слагаемое $-\beta g_0 \bar{c}$ в выражении (1.2) для G_i аппроксимирует (в ограниченном частотном интервале) неубывающую часть асимптотики G_i при больших ω , то второе слагаемое $\beta \varphi_i$ можно отождествить с мнимой частью релаксационного отклика течения. Тогда выражение (1.5), дающее требуемый профиль G_i при действительных ω , однозначно определяет этот отклик в виде аналитической функции частоты ω . Матричные элементы $G_{1,2}$ изначально представляем в виде $G_{1,2} = -(a_1 \bar{c}^2 + b_1 \bar{c} + d_1) + z_{1,2}$, где аналитические функции $z_{1,2}(\omega)$ удовлетворяют условию $z_{1,2} \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \omega \geq 0$ и не имеют особенностей в верхней полуплоскости. Выразим $z_{1,2}$ через малую разность $\Delta G = G_1^* - G_2$, которая определяет диссипацию энергии колебаний. Для этого введем аналитические функции $\Phi_1(\omega)$ и $\Phi_2(\omega)$, удовлетворяющие при действительных ω условиям $\Phi_{1r} = \Delta G_r$, $\Phi_{2i} = \Delta G_i$. Составляя комбинации $(G_1 + G_2)_i$ и $(G_1 - G_2)_r$, получим искомые выражения: $z_{1,2} = \frac{1}{2} (\pm \Phi_1 - \Phi_2)$. В частности, если ΔG_r и ΔG_i являются действительной и мнимой частью одной и той же аналитической функции $\Phi(\omega)$ ($\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$), получим $z_1 = 0$ и $z_2 = -\Phi$. Как видно из рис. 1, б, именно такая ситуация приближенно реализуется в нашем случае, причем $\Phi \approx \beta_1 \varphi_1$.

Отсутствие диссипативной составляющей в выражении (1.4) для G_1 говорит о направленности диссипативной связи вниз по потоку (от пластины 1 к пластине 2). Физически это связано с конвекцией затухающих вихревых возмущений, о которых говорилось выше. Подчеркнем, что слабая невзаимная диссипативная связь между пластинами реализуется на фоне большой взаимной связи консервативного типа*.

2. Динамическая модель для изгибных колебаний пластин в пограничном слое. Отклик течения (1.1) входит в качестве вынуждающей силы в уравнение возбуждения для амплитуд прогиба пластин на первой моде:

$$(2.1) \quad \gamma \frac{d^2 A_j}{dt^2} + 2r \frac{dA_j}{dt} + (Dk_0^4 - Nk_0^2) A_j + \frac{3D}{h^2} k_0^4 A_j^3 = F_j(t), \quad j = 1, 2$$

(обозначения даны в [6]). Нелинейность отклика течения в данном случае можно грубо оценить как величину порядка $|k_0 A_j|^2$. Изгибная нелинейность в (2.1) приводит к ограничению роста A_j на уровне порядка толщины пластинки h (см. п. 5). Поэтому для достаточно тонких пластин представляет интерес анализ уравнения (2.1) с линейным откликом течения (1.1).

Введем для решения (2.1) новые безразмерные переменные: $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, $\bar{A}_{1,2} = A_{1,2}/h$, $V = u_\infty k_0/\omega_0$, $\omega_0 = [(Dk_0^4 - Nk_0^2)/\gamma_0]^{1/2}$ ($\gamma_0 = \gamma + \rho/k_0$). Исходя из выражений (1.2) — (1.5), определим вспомогательные переменные $\zeta_{1,2}(\tau)$ и $\eta(\tau)$ с помощью связей $\zeta_{1,2}(\tau) = \varphi\left(\frac{\bar{\omega}}{V}\right) \bar{A}_{1,2}(\bar{\omega})$, $\eta(\tau) = \varphi_1\left(\frac{\bar{\omega}}{V}\right) \bar{A}_{1\bar{\omega}}$, где нижний индекс $\bar{\omega}$ означает преобразование Лапласа по τ . Эти связи можно привести к полиномиальной форме относительно $\bar{\omega}$, что позволяет перейти от них к дифференциальным уравнениям. В полный отклик F_j наряду с «несжимаемой» составляющей (1.1) следует включить также добавки $F_{1,2}^{(a)}$, обусловленные излучением звука [6].

* Этим данная модель связи между пластинками отличается от предложенной в [8] модели однонаправленной консервативной связи между вихревыми структурами в сдвиговом потоке (см. также [9]).

Запишем сначала систему уравнений для одной пластинки (крышки над $A_{1,2}$ далее опускаем):

$$(2.2a) \quad m_0 \ddot{A}_1 + 2\bar{r} \dot{A}_1 - d_s A_1 + 3\kappa A_1^3 = \\ = -\alpha_1 \beta (V^2 \zeta_1 + V g_0 \dot{A}_1) + \frac{\xi}{m_0} (d_s - 9\kappa A_1^2) \dot{A}_1;$$

$$(2.2б) \quad \ddot{\zeta}_1 + \sigma_0 V \dot{\zeta}_1 + V^2 c_0^2 \zeta_1 = q_0 V \dot{A}_1 - s_0 V^2 A_1.$$

Здесь точками обозначены производные по τ ; $\kappa = (1 - N/k_0^2 D)^{-1}$; $\xi = \frac{4}{\pi^2} \alpha_1 \frac{L_2 \omega}{c_a} \ll 1$ (c_a — скорость звука); $d_s = \alpha_1 d_0 V^2 - 1$; $m_0 = \alpha + \alpha_1 a_0$; $\alpha = \gamma/\gamma_0$; $\alpha_1 = 1 - \alpha$. Вклад радиационных потерь (член $\sim \xi$) записан в уравнении (2.2a) в преобразованном виде. Первоначальное его представление $\xi \ddot{A}_1$ приводит к уравнению с малым параметром при старшей производной, которое допускает существование «быстрых движений» [10, 11]. Для таких движений (с характерным временем $\sim \xi$) неприменимо мультипольное разложение поля давления, в первом приближении которого была получена радиационная компонента отклика среды. Чтобы понизить порядок исходного уравнения, слагаемое $\xi \ddot{A}_1$ преобразовывалось путем подстановки в него выражения для \dot{A} из этого же уравнения, после чего отбрасывались члены порядка ξ^2 , $\bar{r}\xi$, $\beta\xi$. Эта процедура приводит к уравнению (2.2a), в котором радиационные потери трансформируются в эффективное нелинейное поглощение.

Уравнения для пары смежных пластинок строятся аналогичным образом и имеют вид

$$(2.3) \quad m_0 \ddot{A}_1 + \alpha_1 a_1 \ddot{A}_2 = -2\bar{r} \dot{A}_1 + d_s A_1 + \alpha_1 V b_1 \dot{A}_2 + \\ + \alpha_1 V^2 d_1 A_2 - 3\kappa A_1^3 - \alpha_1 \beta (V^2 \zeta_1 + V g_0 \dot{A}_1) + f_a;$$

$$(2.4) \quad m_0 \ddot{A}_2 + \alpha_1 a_1 \ddot{A}_1 = -2\bar{r} \dot{A}_2 + d_s A_2 - \alpha_1 V b_1 \dot{A}_1 + \\ + \alpha_1 V^2 d_1 A_1 - 3\kappa A_2^3 - \alpha_1 \beta (V^2 \zeta_2 + V g_0 \dot{A}_2) + \alpha_1 \beta_1 V^2 \eta + f_a; \\ f_a = \frac{\xi}{m_0} [(d_s - 9\kappa A_1^2) \dot{A}_1 + (d_s - 9\kappa A_2^2) \dot{A}_2];$$

$$(2.5) \quad \ddot{\zeta}_{1,2} + \sigma_0 V \dot{\zeta}_{1,2} + V^2 c_0^2 \zeta_{1,2} = q_0 V \dot{A}_{1,2} - s_0 V^2 A_{1,2};$$

$$(2.6) \quad \ddot{\eta} + \sigma_1 V \dot{\eta} + V^2 c_1^2 \eta = q_1 V \dot{A}_1 - s_1 V^2 A_1.$$

При определении члена радиационных потерь f_a в (2.2), (2.3) кроме упоминавшихся выше величин второго порядка отбрасывались также члены порядка произведения ξ на коэффициенты связи a_1 , b_1 , d_1 , β_1 . Коэффициент κ можно исключить из полученных уравнений с помощью перехода к новым переменным $u_{j \text{ нов}} = u_j \sqrt{\kappa}$ ($u_j = \dot{A}_{1,2}$, $\zeta_{1,2}$, η). Имея в виду такую замену переменных, можно без ущерба общности положить в (2.2) — (2.6) $\kappa = 1$.

При численном решении систем (2.2) и (2.3) — (2.6) в дальнейшем используются параметры отклика среды, указанные в п. 1. Кроме того, полагается $\alpha = 0,2$ ($\alpha_1 = 0,8$), что соответствует преобладанию присоединенной массы над собственной массой пластинки [5, 6]. Следует помнить, что изменение безразмерной скорости потока V при фиксированных значениях остальных параметров в (1.2) — (1.5) связано с предположением об их слабой зависимости от числа Рейнольдса. Такое приближение можно считать удовлетворительным при изменении V в 1,5 — 2 раза.

3. Динамика консервативной системы. Качественные особенности решений систем уравнений (2.2) и (2.3) — (2.6) можно объяснить, рассматривая решения консервативной задачи, которая получается из

(2.2) — (2.6) при $\bar{r}, \xi, \beta, \beta_1 = 0$. Для одной пластинки в этом случае из (2.2a) следует уравнение Дюффинга [12—15]

$$(3.1) \quad m_0 \ddot{A}_1 - d_s A_1 + 3A_1^3 = 0.$$

Фазовый портрет (3.1) на плоскости A_1, \dot{A}_1 при $d_s > 0$ (скорость V больше порога дивергенции $V_c = 1/\sqrt{\alpha_1 d_0}$) имеет характерную форму «очков». На каждой фазовой траектории сохраняется энергия

$$(3.2) \quad H = \frac{1}{2} m_0 \dot{A}_1^2 - \frac{1}{2} d_s A_1^2 + \frac{3}{4} A_1^4 = \text{const.}$$

Квадратичные члены в (3.2) определяют энергию бесконечно малых отклонений от нулевого состояния равновесия. При $d_s > 0$ потенциальная энергия (член $\sim A_1^2$) отрицательна, тогда как кинетическая (член $\sim \dot{A}_1^2$) всегда положительна. Именно благодаря разным знакам этих составляющих и возможен неограниченный (в рамках линейной модели) рост $|A_1|$ и $|\dot{A}_1|$ при постоянстве полной энергии. На возникновение неустойчивости указывает инфинитный характер линий постоянной энергии в окрестности нулевого состояния равновесия (седло на фазовом портрете (3.1)). Появление отрицательной потенциальной энергии связано с неравновесным характером системы и является формальным выражением возможности обратимого преобразования энергии течения (посредством работы сил давления) в кинетическую энергию колебаний пластинки с присоединенной к ней массой жидкости. В нелинейной задаче (с учетом члена $\sim A^4$ в (3.2)) потенциальная энергия становится положительной с ростом A_1 . Это определяет ограничение неустойчивости, так как после достижения потенциальной энергией значения, равного const в (3.2), дальнейший рост A_1 уже невозможен.

Данная энергетическая трактовка возникновения статической неустойчивости может быть обобщена на случай произвольного числа связанных пластин. Более того, она применима для широкого круга консервативных неравновесных систем, а также для волновых полей в консервативных неравновесных средах. Следуя [16], будем называть возникающие в таких системах (средах) неустойчивости реактивными. Им соответствуют комплексно-сопряженные корни характеристического (дисперсионного) уравнения с действительными коэффициентами. Обобщая проведенные выше рассуждения, существование реактивной неустойчивости следует связать с отсутствием знаковой определенности энергии как квадратичной формы обобщенных координат и скоростей (импульсов), образующих фазовое пространство системы*. Именно в этом случае в фазовом пространстве возникают инфинитные изоэнергетические поверхности, на которых лежат сепаратрисы и другие инфинитные фазовые траектории.

Дивергенция пары пластинок при указанных в п. 1 значениях параметров возникает при $V > V_{c1} \approx 1,48$, причем в области $V_{c1} < V < V_{c2} \approx 1,85$ характеристическое уравнение имеет один мнимый корень, а при $V > V_{c2}$ — два таких корня [6]. В результате решения уравнений консервативной задачи для двух связанных пластинок в области их дивергенции с начальными условиями для $A_{1,2}$ и $\dot{A}_{1,2}$ в виде малых «затравок» обнаружено сложное поведение фазовых траекторий. След фазовой траектории на плоскостях A_1, \dot{A}_1 и A_2, \dot{A}_2 в данном случае заполняет область в виде симметричной относительно осей координат «бабочки» подобно тому, как это имеет место для уравнения Дюффинга с периодической внешней силой (см. [14], с. 55). Приведем средние параметры такой стохастичности при $V = 2$: $\langle A_{1,2} \rangle \approx 0$, $A_{1,2*} = \langle A_{1,2} - \langle A_{1,2} \rangle \rangle^{1/2} \approx 0,4$, $K = (A_1 - \langle A_1 \rangle)(A_2 - \langle A_2 \rangle) / A_{1*} A_{2*} \approx 0,69$ ($\langle \dots \rangle$ означает усреднение по времени τ). Отрицательный знак коэффициента корреляции K указывает

* В случае распределенной системы рассматривается фазовое пространство для одной пространственной фурье-гармоники волнового поля [17].

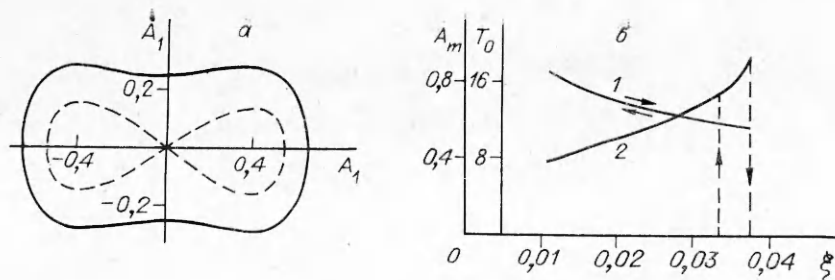


Рис. 2

на преимущественно противофазный прогиб пластин (механизм этого явления обсуждался в [5]). Как известно, одним из главных критериев динамического хаоса является наличие положительных ляпуновских показателей, наибольший из которых λ_m определяет инкремент экспоненциального разбегания фазовых траекторий [13, 14]. При $V=2$ было найдено значение $\lambda_m \approx 0,067$ при характерной частоте колебаний $\bar{\omega} \sim 0,3$ (о методах вычисления λ_m см. [14, 15]).

При $\bar{r}, \xi \ll 1, \beta = 0$ из (2.1) для скорости изменения энергии отдельной пластинки получим

$$(3.3) \quad \frac{d\tilde{H}}{dt} = -2\bar{r}\dot{A}_1^2 - \frac{\xi}{m_0^2}(d_s A_1 - 3A_1^3)^2 \leq 0,$$

где $\tilde{H} = H - (\xi/m_0)(d_s - 3A_1^2)A_1 \approx H$. Из (3.1) следует, что нормальная диссипация (потери) приводит к уменьшению «квазиэнергии» H до тех пор, пока не будет достигнут один из ее локальных минимумов, совпадающий с локальным минимумом H . При этом устанавливается одно из двух ненулевых состояний равновесия пластинки.

Опираясь на проведенный анализ, можно заключить, что характер реактивной неустойчивости не имеет принципиального значения для возникновения автоколебаний (нелинейного флаттера). Флаттер возможен как при осцилляторной, так и при квазистатической неустойчивости, если потери в пластинках компенсируются аномальной диссипацией — необратимым отбором энергии у потока*.

4. Нелинейный флаттер пластин. Рассмотрим уравнения (2.2) — (2.6) при наличии усиления колебаний пластин потоком ($\beta, \beta_1 \neq 0$). К системе (2.2) для одной пластинки можно применить метод усреднения по нелинейным колебаниям (см., например, [12]). В качестве малых параметров при этом используются \bar{r}, ξ и $\beta \ll 1$, а порождающее семейство периодических решений определяется уравнением (3.1). Качественные результаты такого подхода можно предсказать, применяя частотную характеристику скорости поступления энергии при квазигармонических колебаниях пластинки $\chi(\bar{\omega})$. При $\xi = 0$ получим $\chi(\bar{\omega}) \sim \alpha_1 V^2 G_i(\bar{\omega}/V) - 2r\bar{\omega}$. Частота колебаний нелинейного осциллятора (3.1) растет при увеличении их амплитуды (при $d_s > 0$ это относится к периодическим фазовым траекториям, охватывающим сепаратрисный контур). Когда частота попадает в область с $\chi < 0$, рост амплитуды прекращается и устанавливается стационарный режим. Радиационные потери, как следует из (3.3), могут только уменьшить амплитуду автоколебаний.

Эти соображения подтверждаются результатами численного решения (2.2), которое проводилось с начальными условиями $\xi_1(0) = \dot{\xi}_1(0) = 0$ и $|A_1(0)|, |\dot{A}_1(0)| \ll 1$. При $d_s > 0$ предельный цикл на плоскости A_1, \dot{A}_1 всегда охватывает сепаратрисный контур уравнения (3.1). На рис. 2, а показаны такой предельный цикл, полученный при $V=2, \bar{r}=0,004$,

* Аномальная диссипация при сверхзвуковом флаттере панели в однородном потоке обусловлена излучением в свободное пространство акустических волн, переносящих отрицательную энергию.

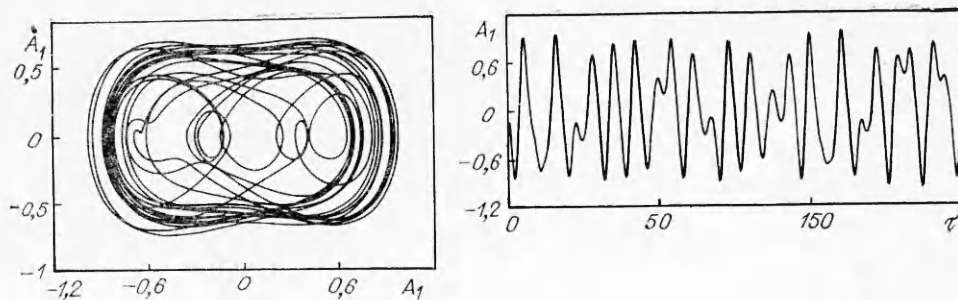


Рис. 3

$\xi = 0,025$, и вложенный в него сепаратрисный контур уравнения (3.1) (штриховая кривая), на рис. 2, б представлена зависимость амплитуды автоколебаний A_m и их периода T_0 (кривые 1, 2) от ξ ($V = 2, \bar{r} = 0,004$). Она имеет гистерезисную петлю, типичную для систем с жестким возбуждением. Пороговое значение $\xi = \xi_1 \approx 0,038$, при котором происходит срыв автоколебаний, отвечает рождению устойчивого предельного цикла, охватывающего сепаратрисный контур, и пары неустойчивых предельных циклов внутри сепаратрисных петель (рис. 2, а). В точке $\xi = \xi_2 \approx 0,033$, в которой скачкообразно возникает генерация колебаний, неустойчивые предельные циклы сливаются с состояниями равновесия типа фокус, передавая им свою неустойчивость. Аналогичный вид имеет зависимость амплитуды и периода автоколебаний от \bar{r} при фиксированном ξ . При $V < V_c \approx 1,65$ наблюдалось мягкое возбуждение автоколебаний.

Система уравнений для пары пластинок решалась с начальными условиями $\xi_{1,2}(0), \zeta_{1,2}(0), \eta(0), \dot{\eta}(0) = 0; |A_{1,2}(0)|, |\dot{A}_{1,2}(0)| \ll 1$. Существование в фазовом пространстве консервативной системы непритягивающего стохастического множества (см. п. 3) приводит к появлению в фазовом пространстве слабодиссипативной системы (2.3)–(2.6) хаотического аттрактора. На рис. 3, 4 представлены результаты расчета основных характеристик установившихся хаотических колебаний при $V = 2, \bar{r} = 0,004, \xi = 0,01$. Спектр мощности прогиба первой пластинки I_1 и взаимный спектр для пары пластин Γ вычислялись по формулам

$$I_1 = \frac{1}{2\pi T} \langle |A_{1\bar{\omega}}|^2 \rangle, \quad \Gamma = \frac{1}{2\pi T} \langle A_{2\bar{\omega}}^* A_{1\bar{\omega}} \rangle,$$

$$A_{1,2\bar{\omega}} = \int_0^T \tilde{A}_{1,2}(\tau) e^{i\bar{\omega}\tau} d\tau, \quad \tilde{A}_{1,2} = A_{1,2} - \frac{1}{T} \int_0^T A_{1,2} d\tau,$$

где T — длина реализации по τ ; $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю (в данном случае производилось усреднение по 60 реализациям длиной $T = 400$ каждая). Зависимость $|\Gamma|^{1/2}$ от $\bar{\omega}$ близка к аналогичной для $I_1^{1/2}$, показанной на рис. 4, а. Фазовая характеристика взаимного спектра $\psi = \arg \Gamma$ приведена на рис. 4, б. При расчете главного ляпуновского показателя для данного режима получено значение $\lambda_m \approx 0,12$.

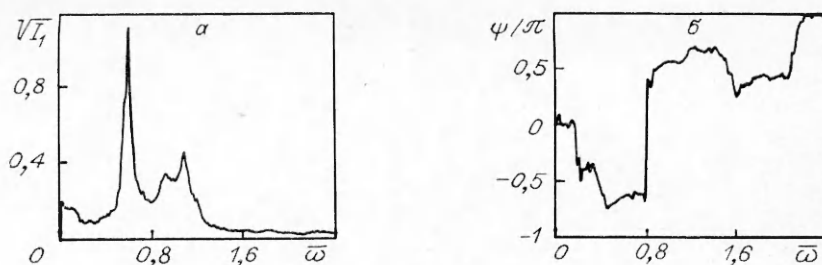


Рис. 4

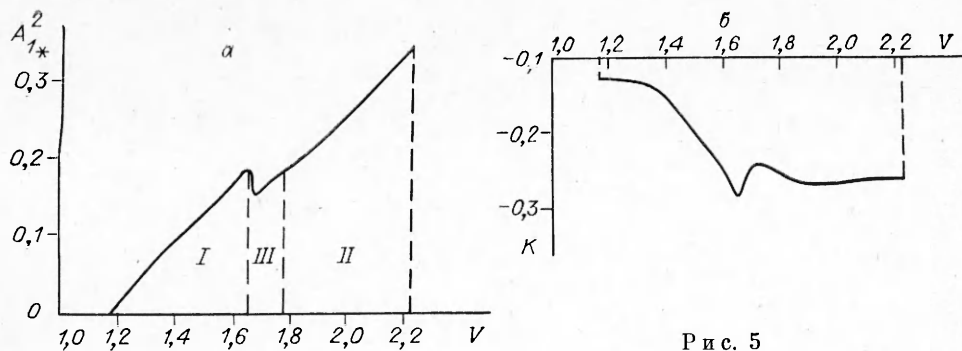


Рис. 5

На рис. 5 показана зависимость интенсивности колебаний прогиба A_{1*}^2 (а) и коэффициента корреляции (б) от V при $\bar{r} = 0,004$ и $\xi = 0,01$. При всех значениях V средние смещения пластин были близки к нулю и выполнялось соотношение $A_{1*} \approx A_{2*}$. В области I генерируются строго периодические автоколебания, подобные описанным выше для одной пластинки (рис. 2, а), в II устанавливается хаотический режим. Переход от регулярных колебаний к хаотическим происходит в относительно узкой области III. В II было получено жесткое возбуждение хаотических автоколебаний (аналогично см. рис. 2, б).

Представленные на рис. 3—5 данные позволяют выяснить происхождение динамического хаоса в этой системе. Независимые пластинки-автогенераторы при введении связи между ними синхронизируются в области скоростей I на рис. 5, а в II происходит потеря синхронизации, обусловленная фазовым перемешиванием под действием консервативных связей. При этом генерируется квазипериодическое колебание, которому соответствует острый пик в частотном спектре на рис. 4, а. Попадание фазовой траектории внутрь сепаратрисного контура отдельного осциллятора (рис. 2, а, 4, а) отвечает сбоям квазипериодического режима, дающим размытый высокочастотный пик в спектре мощности. Согласно рис. 4, б, сдвиг фаз колебаний прогиба пластин в этих двух основных пиках частотного спектра немного смещен от значений $\pm\pi/2$ в сторону противофазного прогиба $\pm\pi$, что определяет отрицательное значение полного коэффициента корреляции. Исчезновение автоколебаний при увеличении V (рис. 5) объясняется действием нелинейного поглощения, которое препятствует увеличению их амплитуды. Расчеты показали, что при $\xi = 0$ автоколебательный режим не исчезает с ростом V . Для независимых пластинок-автогенераторов имеет место аналогичный срыв автоколебаний при увеличении V . Он связан с расширением петли сепаратрисного контура по оси A_1 при возрастании V . При $\xi \neq 0$ предельные циклы на фазовой плоскости несвязанных автогенераторов сближаются с этим контуром, что в конечном счете и приводит к их исчезновению. Автоколебания в системе связанных пластинок при этом также не возникают. Следует иметь в виду, что срыв автоколебаний происходит при значениях V , находящихся на границе применимости одномодового приближения для прогиба пластинок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
2. Ventres C. S., Dowell E. H. Comparison of theory and experiment for nonlinear flutter of loaded plates // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 11. Рус. пер. // ПТК.— 1970.— Т. 8, № 11.
3. Eastep F. E., McIntosh S. C. Analysis of nonlinear panel flutter and response under random excitation or nonlinear aerodynamic loading // AIAA J.— 1971.— V. 9, N 3. Рус. пер. // ПТК.— 1971.— Т. 9, № 3.
4. Dowell E. H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system // J. Sound and Vibr.— 1982.— V. 85, N 3.
5. Реутов В. П. О неустойчивости периодического прогиба панельной поверхности в турбулентном пограничном слое // ПМТФ.— 1992.— № 4.

6. Реутов В. П. О неустойчивости изгибных колебаний пластин в турбулентном пограничном слое // ПМТФ.— 1993.— № 1.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
8. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ.— 1984.— Т. 39, № 12.
9. Рабинович М. И., Суцник М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН.— 1990.— Т. 160, № 1.
10. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
11. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию колебаний.— М.: Наука, 1987.
12. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1969.
13. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и хаотическая динамика.— М.: Наука, 1984.
14. Мун Ф. Хаотические колебания.— М.: Мир, 1990.
15. Шустер Г. Г. Детерминированный хаос: введение.— М.: Мир, 1988.
16. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме.— М.: Мир, 1971.
17. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17, № 4.

г. Нижний Новгород

Поступила 5/VIII 1991 г.,
в окончательном варианте — 20/III 1992 г.

УДК 533.6.011.55

В. Н. Голубкин, В. В. Негода

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КРЫЛЬЕВ В ГИПЕРЗВУКОВОМ НЕРАВНОВЕСНОМ ПОТОКЕ

Траектории планирующих воздушно-космических аппаратов включают участки гиперзвукового полета под углом атаки, характеризующиеся существенно неравновесным обтеканием нижней поверхности крыла (несущего корпуса) [1, 2]. Для изучения в обозримом виде влияния неравновесных физико-химических процессов на поле обтекания и аэродинамические характеристики крыла весьма плодотворным оказался метод тонкого ударного слоя [3]. В такой постановке путем рассмотрения перемешанной в основном порядке плотности газа в [3] дано обобщение известных решений для треугольного крыла в следующем приближении к ньютоновскому. Используя идеи работ [4, 5], удалось проинтегрировать и систему уравнений пространственного неравновесного ударного слоя на крыле малого удлинения произвольной формы [6, 7]. Эффективный метод численного решения полученной в результате интегрирования двумерной системы уравнений для формы поверхности головного скачка уплотнения предложен в [8]. На основе аналитического решения [4] в [9] сформулирована вариационная задача определения конфигурации крыла с наибольшим аэродинамическим качеством. Несмотря на то что поле обтекания крыла трехмерное в отличие от случаев, рассмотренных в [10], решение сводится к минимизации одномерного функционала. Результаты [9] относятся к предельным случаям обтекания крыла совершенным газом или равновесно реагирующим воздухом.

В данной работе предложена вариационная методика определения формы крыла максимального гиперзвукового качества в следующем приближении к ньютоновскому для общего случая химически неравновесного обтекания. Полученные решения позволили выявить конструктивные особенности, приводящие к повышению аэродинамического качества крыльев и несущих корпусов в релаксирующем гиперзвуковом потоке.

1. Предельная ньютоновская схема гиперзвукового обтекания с бесконечно тонким ударным слоем на поверхности тела и отношением плотностей на совпадающем с ней головном скачке $\rho_\infty/\rho_s^0 = \varepsilon = 0$ дает весьма