

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАСТЯЖЕНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЛИСТА

С. С. Одинг

(Воронеж)

Растяжение листа ограничено величиной критической деформации, соответствующей образованию локального утонения материала в виде шейки. В работе решается задача об устойчивости пластического растяжения биметаллического листа в условиях плоской деформации. Решение строится на основе теории конечных деформаций жестко-пластического материала.

1. Рассматривается пластическое растяжение биметаллического листа с заданным законом изменения длины. Процесс потери устойчивости в этом случае можно представить как непрерывный процесс смены равновесных форм. Поэтому критическую деформацию, при которой зарождается шейка, можно определять бифуркационным методом.

Поскольку рассматриваемая потеря устойчивости деформирования происходит при развитых пластических деформациях, пренебрегаем упругими деформациями и принимаем модель жестко-пластического материала с изотропным упрочнением.

Кривые течения материалов слоев биметаллического листа  $\sigma_e^{(1)} = \sigma_e^{(1)}(e_e)$  и  $\sigma_e^{(2)} = \sigma_e^{(2)}(e_e)$  считаются заданными. Здесь индексом 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к разным слоям листа,  $\sigma_e = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$  — интенсивность напряжений,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\sigma = (1/3)\sigma_{mn}\delta_{mn}$  — гидростатическое давление,  $e_e$  — накопленная пластическая деформация.

Задача состоит в определении наименьшей в истории нагружения деформации  $e_{e_0}$ , начиная с которой дальнейший процесс деформирования возможен с образованием шейки.

В качестве уравнений состояния принимаем уравнения деформационной теории пластичности, записанные для конечных деформаций в виде

$$(1.1) \quad s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{e_e} e_{ij},$$

где  $e_{ij}$  — логарифмические деформации;  $e_e = \sqrt{(2/3)e_{ij}e_{ij}}$  — интенсивность логарифмических деформаций. Использование в уравнениях (1.1) логарифмических деформаций связано с тем обстоятельством, что при больших деформациях только для логарифмических деформаций условие несжимаемости материала  $e_{ij}\delta_{ij} = 0$  не противоречит уравнениям (1.1).

Бифуркация процесса в исследуемом состоянии  $A$  заключается в том, что наряду с невозмущенным деформированием в состоянии  $A$  возможно возмущенное деформирование в некотором состоянии  $B$ . Причем состояния  $A$  и  $B$  бесконечно близки друг к другу.

Введем декартову систему координат в состоянии  $A$  таким образом, чтобы для одной и той же частицы связь между координатами  $x_i$  в состоянии  $B$  и координатами  $x_i$  в состоянии  $A$  можно было записать в виде

$$(1.2) \quad x_i' = x_i + u_i,$$

где  $u_i$  — бесконечно малое дополнительное перемещение частицы. Тогда

$$(1.3) \quad dx_i' = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j.$$

Здесь и в дальнейшем индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате  $x_i$ .

Рассматривая определитель системы (1.3) с точностью до бесконечно малых первого порядка, получим условие несжимаемости среды в виде

$$(1.4) \quad u_{k,k} = 0.$$

Оператор дифференцирования некоторой величины  $a$  по координате  $x'_i$  выражается через дифференцирование той же величины по координате  $x_i$  следующим образом:

$$(1.5) \quad \partial a / \partial x'_i = (\delta_{ik} - u_{k,i}) a_{,k}.$$

Сравнивая состояния  $A$  и  $B$ , представим все величины в возмущенном состоянии  $B$  в виде

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}, \quad e'_{ij} = e_{ij}^0 + e_{ij}, \quad u'_i = u_i^0 + u_i,$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $u_i$  — соответственно бесконечно малые дополнительные компоненты тензора напряжений, тензора логарифмических деформаций и перемещений. Верхним индексом 0 обозначены величины, относящиеся к невозмущенному состоянию  $A$ . Наряду с тензором логарифмических деформаций  $e'_{ij}$  рассматривается соосный с ним тензор конечных деформаций Альманси

$$(1.6) \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x'_j} \right).$$

В результате линеаризации (1.6), используя (1.5), получим

$$(1.7) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - (u_{i,k}^0 u_{k,j} + u_{j,k}^0 u_{k,i}) + (u_{n,i}^0 u_{n,m}^0 u_{m,j} + u_{n,j}^0 u_{n,m}^0 u_{m,i}).$$

Связь между главными компонентами и главными дополнительными компонентами этих тензоров деформаций имеет вид

$$(1.8) \quad e'_k = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon'_k); \quad e_k = \varepsilon_k / (1 - 2\varepsilon_k^0).$$

Ограничившись в дальнейшем рассмотрением однородного докритического состояния и совместив оси координат  $x_i$  с главными направлениями тензора деформаций невозмущенного состояния, будем иметь

$$(1.9) \quad \begin{aligned} |e_{ij} = \varepsilon_{ij} / (1 - 2\varepsilon_i^0) \text{ при } i = j \text{ (не } \sum \text{ по } i, j), \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} (e_i^0 - e_j^0) / (\varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0) \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

Кроме того, (1.7) переписется в виде

$$(1.10) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(1 - 2\varepsilon_i^0) u_{i,j} + (1 - 2\varepsilon_j^0) u_{j,i}] \text{ (не } \sum \text{ по } i, j).$$

Подставив (1.10) в (1.9), имеем

$$(1.11) \quad e_{ij} = u_{i,j} \text{ при } i = j, \quad e_{ij} = B_{ij} u_{i,j} + B_{ji} u_{j,i} \text{ при } i \neq j \text{ (не } \sum \text{ по } i, j),$$

$$\text{где} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon_i^0) \frac{e_i^0 - e_j^0}{\varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0} = \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \quad e_i^0 = \ln \lambda_i.$$

Записывая уравнения равновесия элемента среды в состояниях  $A$  и  $B$ , вычитая одно из другого и используя (1.5), получим

$$(1.12) \quad \sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,k}^0 u_{k,j} = 0.$$

В результате линеаризации уравнений состояния (1.1) в принятых обозначениях имеем

$$(1.13) \quad s_{ij} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{2}{3} e_{ij} + A_{ij} (\eta K - 1) e_e \right\},$$

где

$$\sigma_e = \eta e_e; K = \frac{e_e^0}{\sigma_e^0}; A_{ij} = \frac{s_{ij}^0}{\sigma_e^0} = \frac{2}{3} \frac{e_{ij}^0}{e_e^0}.$$

Дополнительная интенсивность деформаций

$$(1.14) \quad e_e = A_{mn} e_{mn}.$$

Граничные условия для несжимаемого материала в наших обозначениях перепишем из работы [1]

$$(1.15) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ki}^0 u_{j,k}) v_j^0 dS = \delta (P_i dS),$$

где  $dS$  — элементарная площадь поверхности;  $v_j^0$  — компоненты единичного вектора нормали поверхности тела в невозмущенном состоянии;  $P_i dS$  — компоненты вектора поверхностной нагрузки.

2. Исследуем устойчивость двуслоного растяжения биметаллического листа в условиях плоской деформации. В приближенной постановке Лейбензона — Ишлинского задача о плоском растяжении одинарного листа решена в [2].

Рассмотрим решение задачи для некоторого слоя листа. В растянутом слое листа в направлениях  $x$  и  $z$  возникнут напряжения  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$ . Ось  $y$  направлена по нормали к поверхности листа. Докритическое состояние считаем плоским, однородным:

$$\sigma_y^0 = s_{xy}^0 = s_{xz}^0 = s_{yz}^0 = 0, \sigma_z^0 = \sigma_x^0/2; e_z^0 = 0, e_e^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x^0.$$

Как и в работе [2], предполагаем, что потеря устойчивости проявляется в виде достаточно протяженной шейки, направление которой совпадает с осью  $z$ . При сделанных допущениях система уравнений (1.4), (1.11)—(1.14) сводится к одному уравнению

$$(2.1) \quad \left( \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\alpha \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) u_y = 0,$$

$$\text{где} \quad \alpha = \frac{\eta K}{B_{xy}} - \frac{1}{l^2} (1 - \lambda_x^4); \beta = \lambda_x^4, e_x^0 = \ln \lambda_x.$$

Решение уравнения ищем в виде

$$(2.2) \quad u_y = \varphi(t) \cos \lambda x, \quad t = \lambda y.$$

При этом из условия несжимаемости (1.4) следует

$$u_x = -\varphi'(t) \sin \lambda x.$$

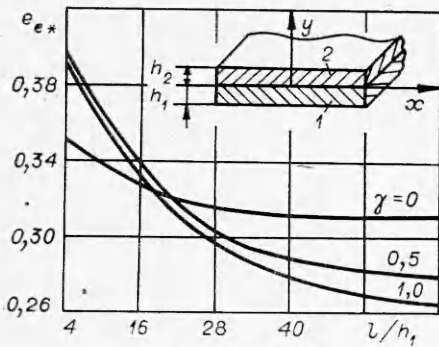
Обозначив через  $h_1$  и  $h_2$  текущие толщины слоев биметаллического листа в исследуемый момент времени, перейдем к безразмерным координатам. Начало координат поместим на поверхности раздела двух слоев. Тогда для первого (нижнего) слоя листа  $-1 \leq y \leq 0$ , для второго (верхнего)  $0 \leq y \leq \gamma$ , где  $\gamma = h_2/h_1$ .

Решение уравнений (2.1) при условии (2.2) для первого и соответственно для второго слоя листа имеет вид

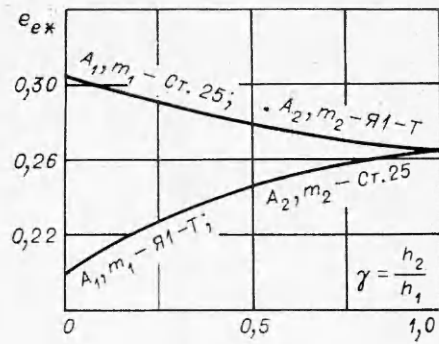
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (C_{11} \cos v_1 t + C_{12} \sin v_1 t) e^{\mu_1 t} + (C_{13} \cos v_1 t + C_{14} \sin v_1 t) e^{-\mu_1 t}, \\ \varphi_2 &= (C_{21} \cos v_2 t + C_{22} \sin v_2 t) e^{\mu_2 t} + (C_{23} \cos v_2 t + C_{24} \sin v_2 t) e^{-\mu_2 t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{(\beta + \alpha_1)/2}; \quad v_1 = \sqrt{(\beta - \alpha_1)/2}; \\ \mu_2 &= \sqrt{(\beta + \alpha_2)/2}; \quad v_2 = \sqrt{(\beta - \alpha_2)/2}; \\ \alpha_1 &= \frac{\eta_1 K_1}{B_{xy}} - \frac{1}{2} (1 - \lambda_x^4); \quad \alpha_2 = \frac{\eta_2 K_2}{B_{xy}} - \frac{1}{2} (1 - \lambda_x^4). \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Постоянные интегрирования  $C_{ij}$  определим из условия отсутствия нагрузок на свободных поверхностях листа (при  $y = -1$  и  $y = \gamma$ ) и из условия непрерывности компонент перемещений  $u'_x, u'_y$  и компонент напряжений  $\sigma_y, s_{xy}$  на границе раздела двух слоев (при  $y = 0$ ).

Из (1.15) получим на возмущенных поверхностях при  $y = -1$

$$s_{xy}^{(1)} - \frac{2}{3} \sigma_e^{0(1)} \frac{\partial}{\partial x} u_y^{(1)} = 0, \sigma_y^{(1)} = 0;$$

при  $y = \gamma$

$$s_{xy}^{(2)} - \frac{2}{3} \sigma_e^{0(2)} \frac{\partial}{\partial x} u_y^{(2)} = 0, \sigma_y^{(2)} = 0;$$

при  $y = 0$

$$s_{xy}^{(1)} - \frac{2}{3} \sigma_e^{0(1)} \frac{\partial}{\partial x} u_y^{(1)} = s_{xy}^{(2)} - \frac{2}{3} \sigma_e^{0(2)} \frac{\partial}{\partial x} u_y^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}.$$

Расписывая эти условия, получим систему восьми однородных алгебраических уравнений относительно восьми постоянных  $C_{ij}$ . Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю.

Поскольку закон изменения длины листа задан, параметр  $\lambda$ , характеризующий протяженность шейки, определяем из условия отсутствия возмущений осевого перемещения  $u_x$  на концах листа, т. е. при  $x = \pm l/2$   $u_x = 0$ . Здесь  $l$  — текущая длина листа.

Используем степенную аппроксимацию кривых течения материалов слоев листа

$$\sigma_e^{(1)} = A_1 e_e^{m_1}, \sigma_e^{(2)} = A_2 e_e^{m_2}.$$

Счет выполняли для биметаллического листа из стали Я1-Т ( $A = 1010 \text{ МН/м}^2, m = 0,263$ ) и стали Ст. 25 ( $A = 690 \text{ МН/м}^2, m = 0,170$ ). На фиг. 1 показана зависимость критической деформации  $e_{e*}$  от безразмерной длины  $l/h_1$  биметаллического листа в зависимости от соотношения толщин слоев. Видно, что если при растяжении сплошного листа ( $\gamma = 0$ ) эта зависимость проявляет себя лишь при малых длинах, то в случае растяжения биметаллических листов длина оказывает существенное влияние на критическую деформацию  $e_{e*}$ , соответствующую моменту возникновения шейки. На фиг. 2 показано влияние соотношения толщины  $\gamma$  слоев биметаллического листа на критическую деформацию для листов бесконечной длины (при  $l \rightarrow \infty$  или  $\lambda \rightarrow 0$ ). Анализ результатов показал, что для биметаллических листов бесконечной длины, как и для сплошных листов, полученная критическая деформация совпала с деформацией, определенной из условия достижения максимума осевой нагрузки.

Поступила 23 III 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Об учете деформационной анизотропии в задачах устойчивости изотропных упругих тел.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
2. Дель Г. Д., Одинг С. С. Устойчивость двусосного пластического растяжения изотропного листа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.

УДК 539.374

### УПРУГОИЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ ТРУБ

Г. И. Быховцев, В. П. Зебриков  
(Куйбышев)

Кручение идеальных упругопластических стержней рассматривалось в [1—5]. Решение упругопластических задач методом возмущений рассматривалось в работах, обсуждение которых можно найти в [6]. При решении задач для двусвязных областей методы, разработанные в [6], применимы только тогда, когда один из контуров полностью охвачен пластической зоной. Ниже предлагается модификация метода возмущений, которая позволяет рассматривать развитие пластических зон с охватом только части контура пластической зоной, при этом используется идея [7] разложения решения по параметру нагружения.

1. При кручении упругопластических труб в упругой области напряжения выражаются через функцию напряжений по формулам

$$(1.1) \quad \tau_r = (1/r)\partial u/\partial\theta, \quad \tau_\theta = -\partial u/\partial r.$$

Функция напряжений  $u$  удовлетворяет уравнению

$$(1.2) \quad \Delta u = -2G\omega,$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $\omega$  — угол закручивания. В пластической области выполняется условие текучести

$$(1.3) \quad (\partial u/\partial r)^2 + (1/r^2)(\partial u/\partial\theta)^2 = K^2.$$

На границе контуров имеем

$$(1.4) \quad du/ds = 0.$$

На упругопластической границе  $u$  и  $du/dn$  должны быть непрерывны. Для односвязной области условия (1.3), (1.4) однозначно определяют напряженное состояние по заданной закрутке. Для многосвязной области, интегрируя соотношение (1.4), получаем

$$(1.5) \quad u = c_p,$$

причем постоянная  $c_p$  на каждом контуре своя, только на одном из ее контуров ее можно положить равной нулю. Для определения значений  $c_p$  из (1.5) необходимо воспользоваться аналогом теоремы Бредта в упругопластических телах, который сформулирован в [8].

2. Рассмотрим кручение эксцентрической трубы. Контур поперечного сечения трубы (фиг. 1) зададим уравнениями

$$(2.1) \quad L_1: r = \delta \cos \theta + \sqrt{r_1^2 - \delta^2 \sin^2 \theta} \approx r_1 + \delta \cos \theta - \frac{\delta^2}{2r_1} \sin^2 \theta, \quad L_2: r = r_2.$$

Решение упругой задачи получено в [9, 10]. Функцию напряжения можно получить в упругой области, используя метод возмущений. Ограничиваясь степенями не выше  $\delta^2$ , имеем

$$(2.2) \quad u_0 = G\omega \left( \frac{r_2^2 - r^2}{2} + \delta K_1 \left( \frac{r_2^2}{r} - r \right) \cos \theta + \delta^2 K_2 \left( \frac{r_2^4}{r^2} - r^2 \right) \cos 2\theta \right),$$

где

$$K_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad K_2 = \frac{-\frac{1}{2}r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)(r_2^4 - r_1^4)}.$$