

М. В. Лотфуллин, С. И. Филиппов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА В ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Наличие в потоке границ раздела сред оказывает существенное влияние на характер обтекания и силы, действующие на крыло. В плоском случае граница раздела является линией тока, при переходе через которую скорость терпит тангенциальный разрыв, и для построения комплексного потенциала течения требуется отыскание кусочно-аналитической функции с неизвестной линией скачка в области течения. В рамках теории волн малой амплитуды для достаточно больших отстояний контура от границ раздела моделирование линий раздела непрерывно распределенными особенностями позволяет решить широкий круг задач [1—4] с точным выполнением условия на контуре.

В настоящей работе метод распределения особенностей применяется для решения задачи обтекания профиля потоком двухслойной весомой жидкости со свободной поверхностью при расположении профиля в нижнем слое жидкости. Эта задача связана с явлением «мертвой воды» [5], которое обусловлено образованием волн на границе жидкостей разной плотности. Отметим работу [6], где предпринята попытка решения задачи методом [7]. Однако исследование в [6] ограничено выводом интегрального уравнения, изучен контур непрерывной кривизны и не затронут вопрос определения циркуляции.

1. Рассмотрим в системе координат, связанной с профилем C , установившийся поток идеальной несжимаемой весомой жидкости, ограниченный свободной поверхностью E_1 и состоящий из слоя толщины H плотности ρ_1 и бесконечно глубокого слоя плотности ρ_2 с границей раздела жидкостей E_2 . Ось Ox направлена навстречу потоку, ось Oy — вертикально вверх, а начало координат лежит на середине хорды C . Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны невозмущенным границам раздела и равны $-V_j$ ($j = 1, 2$).

В предположении потенциальности течения задача сводится к определению комплексных потенциалов возмущенного течения $W_j^0(z)$ в соответствующих областях D_j , где D_1 представляет полосу $h - H \leq y \leq h$, а D_2 — полуплоскость $y \leq h - H$, за исключением области, ограниченной контуром C .

Обозначим $W_j^0(z) = V_j W_j(z)$, $m^- = \rho_1 V_1^2 / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2)$, $m^+ = \rho_2 V_2^2 / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2)$, $m = m^+ - m^-$, $v_1 = g/V_1^2$, $v_2 = g(\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2)$. Тогда в рамках теории волн малой амплитуды граничные условия задачи для аналитической вне C функции $W_j(z)$ запишутся в виде условия непротекания на профиле при $z \in C$

$$(1.1) \quad \text{Im } W_2(z) = y + \psi_0 \quad (\psi_0 = \text{const});$$

условия на свободной поверхности

$$(1.2) \quad \text{Re}[dW_1(z)/dz + iv_1 W_1(z)] = 0, \quad y = h;$$

динамического и кинематического условий на границе раздела жидкостей

$$(1.3) \quad \text{Re}[m^+ dW_2(z)/dz - m^- dW_1(z)/dz + iv_2 W_2(z)] = 0, \quad y = h - H;$$

$$(1.4) \quad \text{Im}[W_2(z) - W_1(z)] = 0, \quad y = h - H$$

и условия на бесконечности

$$(1.5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |dW_j(z)/dz| = 0.$$

2. Метод решения задачи заключается в распределении особенностей с интенсивностями $\mu_1(x + ih)$, $\mu_2(x + ih - iH)$ по невозмущенному уровню свободной поверхности E_1 и линии раздела жидкостей E_2 . Рассмотрим вначале бесциркуляционное обтекание профиля C . Потенциал течения можно представить в виде

$$(2.1) \quad W_{\Sigma}(z) = W_{\infty}(z) + v_1(z) + v_2(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

где $W_{\infty}(z)$ — комплексный потенциал возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_k} \frac{\mu_k(t) dt}{z-t}, \quad \Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_k} F_k(z, t) \mu_k(t) dt \quad (k = 1, 2).$$

Предполагаем, что интегралы $v_k(z)$ существуют.

В соответствующей области D_j потенциалу $W_{\Sigma}(z)$ будем придавать еще индекс j , поскольку функция $v_2(z)$ на границе E_2 при подходах из D_1 и D_2 принимает разные предельные значения. Функции $F_k(z, t)$ строятся в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милн-Томсона об окружности [8] так, чтобы удовлетворить условию (1.1):

$$F_k[f(\zeta), f(\tau)] = [\chi_k(\zeta, \tau) + G_k(\zeta, \tau)]/f'(\tau), \quad G_k(\zeta, \tau) = 1/[\bar{\tau}^2(\zeta - 1/\bar{\tau})], \\ \chi_k(\zeta, \tau) = [f(\zeta) - f(\tau) - f'(\tau)(\zeta - \tau)]/(\zeta - \tau)/[f(\zeta) - f(\tau)].$$

Здесь $z = f(\zeta)$ — конформное отображение внешности круга C^0 : $|\zeta| = 1$ на внешность профиля, причем $f(\infty) = \infty$, $\zeta_0 = -1$ отвечает задней кромке профиля z_0 , $\tau = f^{-1}(t)$ при $t \in E_k$.

3. Для определения $\mu_k(t)$ используем условия (1.2)–(1.5). Проведем преобразование координат $z = z_1 + ih$. Подставив (2.1) в (1.2), при $y_1 = 0$ получим

$$(3.1) \quad \text{Re} \left\{ \frac{dv_1(z_1)}{dz_1} + iv_1 v_1(z_1) + \left(\frac{d}{dz_1} + iv_1 \right) [\Omega(z_1) + v_2(z_1)] \right\}_{z_1=x_1-i0} = 0$$

($\Omega(z_1) = W_{\infty}(z_1) + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_1)$). Условие (3.1) представляет собой сингулярное интегральное уравнение относительно $\mu_1(t)$. Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (3.1) эквивалентно уравнению

$$\text{Re} \left\{ \frac{dv_1(z_1)}{dz_1} + iv_1 v_1(z_1) + \left(\frac{d}{dz_1} - iv_1 \right) [\bar{\Omega}(z_1) + \bar{v}_2(z_1)] \right\} = 0, \quad z_1 = x_1.$$

Так как $v_1(z_1)$, $\bar{v}_2(z_1)$, $\bar{\Omega}(z_1)$ регулярны в полуплоскости $y_1 \leq 0$, то в ней

$$(3.2) \quad \frac{dv_1}{dz_1} + iv_1 v_1 + \left(\frac{d}{dz_1} - iv_1 \right) [\bar{\Omega}(z_1) + \bar{v}_2(z_1)] = iv_1 N$$

(N — вещественная постоянная). Из условия (1.5), если положить $v_1(+\infty) = v_2(+\infty) = 0$, следует, что $N = 0$. Решая (3.2) относительно $v_1(z_1)$ и находя действительную часть предела при $z_1 \rightarrow x_1$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), в переменных ζ при $z_1 = f(\zeta) - ih$ имеем

$$(3.3) \quad \mu_1(\zeta_1) = \Phi_1(\zeta_1) + \text{Im} \int_{T_1} L_1(\zeta_1, \tau) \mu_1(\tau) d\tau + \text{Im} \int_{T_2} L_2(\zeta_1, \tau) \mu_2(\tau) d\tau,$$

$$\Phi_1(\zeta_1) = 2\text{Re} \left\{ W_{\infty}(\zeta_1) - 2\exp[iv_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp[-iv_1 f(v)] W'_{\infty}(v) dv \right\},$$

$$W_{\infty}(\zeta_1) = -(K\zeta_1 + \bar{K}/\zeta_1) + f(\zeta_1), \quad K = f'_{\zeta}(\infty),$$

$$L_1(\zeta_1, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ \chi_1(\zeta_1, \tau) + G_1(\zeta_1, \tau) - \right. \\ \left. - 2 \exp [i v_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp [-i v_1 f(v)] [G'_{1v}(v, \tau) + \chi'_{1v}(v, \tau)] dv \right\},$$

$$L_2(\zeta_1, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1/(\zeta_1 - \tau) + G_2(\zeta_1, \tau) - \right. \\ \left. - 2 \exp [i v_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp [-i v_1 f(v)] [-1/(v - \tau)^2 + G'_{2v}(v, \tau)] dv \right\},$$

где $T_1: \zeta_1 = f^{-1}(x + ih)$, $T_2: \zeta_2 = f^{-1}(x + ih - iH)$ — образы невозмущенных границ раздела сред в параметрической плоскости.

Для получения второго уравнения для $\mu_h(t)$ рассмотрим условия на линии раздела жидкостей, куда перенесем ось абсцисс, т. е. проведем преобразование координат $z = z_2 + ih - iH$. Потенциал в виде (2.1) удовлетворяет условию (1.4). Из (1.3), проведя последовательность операций (3.1), (3.2), в которых $v_1(z_2)$ операции сопряжения не подвергается, найдем

$$(3.4) \quad \mu_2(\zeta_2) = \varphi_2(\zeta_2) + \operatorname{Im} \int_{T_2} L_2(\zeta_2, \tau) \mu_2(\tau) d\tau + \operatorname{Im} \int_{T_1} L_3(\zeta_2, \tau) \mu_1(\tau) d\tau,$$

$$\varphi_2(\zeta_2) = -2 \operatorname{Re} \left\{ W_{\infty}(\zeta_2) - 2m^+ \exp [i v_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp [-i v_2 f(v)] W'_{\infty}(v) dv \right\},$$

$$L_2(\zeta_2, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ G_2(\zeta_2, \tau) + \chi_2(\zeta_2, \tau) - \right. \\ \left. - 2m^+ \exp [i v_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp [-i v_2 f(v)] [G'_{2v}(v, \tau) + \chi'_{2v}(v, \tau)] dv \right\},$$

$$L_3(\zeta_2, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ f'(\tau)/[f(\zeta_2) - \bar{f}(\tau) - 2i(h - H)] + G_1(\zeta_2, \tau) + \chi_1(\zeta_2, \tau) - \right. \\ \left. - 2m^+ \exp [i v_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp [-i v_2 f(v)] [G'_{1v}(v, \tau) + \chi'_{1v}(v, \tau)] dv + \right. \\ \left. + 2m^- \exp [i v_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp [-i v_2 f(v)] \frac{f'(\tau) f'(v)}{[f(v) - \bar{f}(\tau) - 2i(h - H)]^2} dv \right\}.$$

4. В случае циркуляционного обтекания профиля C комплексный потенциал будем искать в форме

$$(4.1) \quad W_j(z) = W_{\infty j}(z) + \Gamma_1 W_{\Gamma j}(z).$$

Здесь $\Gamma_1 = \Gamma/V_2$; Γ — значение циркуляции; $W_{\Gamma j}(z)$ — кусочно-аналитическая вне C функция, удовлетворяющая условиям (1.2)–(1.5) и условиям

$$(4.2) \quad \operatorname{Im} W_{\Gamma 2}(z) = \psi_1, z \in C (\psi_1 = \text{const}), \Delta_c W_{\Gamma 2}(z) = 1$$

(Δ_c — приращение функции при обходе контура C). Функция $W_{\Gamma j}(z)$ отыскивается в виде, аналогичном (2.1), где $\mu_h(t)$ нужно заменить на $\mu_{\Gamma h}(t)$, а $W_{\infty}(z)$ — на $W_{\Gamma \infty}(z)$. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{v(z)}{z - z_{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - 1/\bar{\zeta}_{\Gamma}}{\zeta - \zeta_{\Gamma}}$$

($z_\Gamma = f(\zeta_\Gamma) \notin D_1 \cup D_2$ — произвольно выбранная точка). Можно заметить, что функция

$$W_{\Gamma_\infty}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{v(z)}{z - z_\Gamma}, \quad z \in D_1 \cup D_2$$

удовлетворяет условиям (1.4), (4.2), поэтому потенциал $W_{\Gamma_j}(z)$ также удовлетворяет этим условиям.

Система интегральных уравнений для $\mu_{\Gamma_k}(t)$ получается также из условий (1.2), (1.3) и приводится к виду (3.3), (3.4) с теми же ядрами L_n ($n = 1, \dots, 4$) и следующими свободными частями:

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma_1}(\zeta_1) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{In} \frac{(\zeta_1 - 1/\bar{\zeta}_\Gamma)[f(\zeta_1) - f(\zeta_\Gamma)]}{(\zeta_1 - \zeta_\Gamma)[f(\zeta_1) - \bar{f}(\zeta_\Gamma) - 2ih]} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp[i\nu_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp[-i\nu_1 f(v)] [1/(v - 1/\bar{\zeta}_\Gamma) + \right. \\ &\quad \left. + f'(v)/[f(v) - f(\zeta_\Gamma)] - 1/(v - \zeta_\Gamma)] dv \right\}, \\ \varphi_{\Gamma_2}(\zeta_2) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{In} \frac{(\zeta_2 - 1/\bar{\zeta}_\Gamma)[f(\zeta_2) - f(\zeta_\Gamma)]}{(\zeta_2 - \zeta_\Gamma)[f(\zeta_2) - \bar{f}(\zeta_\Gamma) - 2i(h - H)]} - \right. \\ &\quad \left. - 2m^+ \exp[i\nu_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp[-i\nu_2 f(v)] [1/(v - 1/\bar{\zeta}_\Gamma) + f'(v)/[f(v) - f(\zeta_\Gamma)] - \right. \\ &\quad \left. - 1/(v - \zeta_\Gamma)] dv + 2m^- \exp[i\nu_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \frac{f'(v) \exp[-i\nu_2 f(v)]}{f(v) - \bar{f}(\zeta_\Gamma) - 2i(h - H)} dv \right\}. \end{aligned}$$

При выводе уравнений для $\mu_{\Gamma_k}(t)$ слагаемое, содержащее $\operatorname{In}(z - z_\Gamma)$, в сопряжении не участвует.

Значение циркуляции Γ_1 находится из постулата Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{2\pi \operatorname{Im}(-K + \bar{K}/\zeta_a^2) + \operatorname{Re}[J_1(\zeta_a) + J_2(\zeta_a)]}{\operatorname{Re}[1/(\zeta_a - 1/\bar{\zeta}_\Gamma) - 1/(\zeta_a - \zeta_\Gamma) - J_{\Gamma_1}(\zeta_a) - J_{\Gamma_2}(\zeta_a)]}, \\ J_k(\zeta_a) &= \int_{T_k} I(\zeta_a, \tau) \mu_k(\tau) d\tau, \quad J_{\Gamma_k}(\zeta_a) = \int_{T_k} I(\zeta_a, \tau) \mu_{\Gamma_k}(\tau) d\tau, \\ I(\zeta_a, \tau) &= 1/(\zeta_a - \tau)^2 + 1/[\tau(\zeta_a - 1/\bar{\tau})]^2. \end{aligned}$$

5. Форма свободной поверхности и линии раздела жидкостей отыскивается на основании соотношений [9]

$$(5.1) \quad \delta_1(x_1) = \frac{1}{v_1} \operatorname{Re} \left[\frac{dW_1(z_1)}{dz_1} \right] \quad \text{при } y_1 = 0;$$

$$(5.2) \quad \delta_2(x_2) = \frac{1}{v_2} \operatorname{Re} \left[m^+ \frac{dW_2(z_2)}{dz_2} - m^- \frac{dW_1(z_2)}{dz_2} \right] \quad \text{при } y_2 = 0$$

($\delta_k(x_k)$ — возвышение границы раздела сред над невозмущенным уровнем).

Ввиду наличия в выражениях (5.1), (5.2) особых интегралов содержащие их слагаемые преобразуются на основании свойств производных от интегралов типа Коши [10]. Окончательно имеем

$$(5.3) \quad \delta_1(\zeta_1) = \frac{1}{v_1} \operatorname{Re} \left\{ \Omega_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i f'(\zeta)} \int_{T_2} [-1/(\zeta - \tau)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + G'_{2\zeta}(\zeta, \tau) \mu_2^0(\tau) d\tau \Big\}_{\zeta=\zeta_1} + \mu_1^{0'}(\zeta_1)/[2v_1 f'(\zeta_1)], \quad \delta_2(\zeta_2) = \\
& = \frac{m}{v_2} \left\{ \Omega_2(\zeta) + \frac{1}{2\pi i f'(\zeta)} \int_{T_1} \left[-1/(\zeta - \tau)^2 + G'_{1\zeta}(\zeta, \tau) \right] \mu_1^0(\tau) d\tau \right\}_{\zeta=\zeta_2} + \\
& \quad + \mu_2^{0'}(\zeta_2)/[2v_2 f'(\zeta_2)], \\
\Omega_h(\zeta) & = \frac{1}{f'(\zeta)} \left\{ W'_{\infty}(\zeta) + \Gamma_1 W'_{\Gamma\infty}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{T_h} [\chi'_{h\zeta}(\zeta, \tau) + G'_{h\zeta}(\zeta, \tau)] d\tau \right\}, \\
\mu_h^0(\tau) & = \mu_h(\tau) + \Gamma_1 \mu_{\Gamma h}(\tau).
\end{aligned}$$

6. Для решения систем интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода (3.3), (3.4) применяется метод последовательных приближений. За нулевое приближение можно взять решение уравнения (3.3) при $\mu_2(\tau) = 0$, что дает решение задачи обтекания профиля под свободной поверхностью однородной жидкости. Нулевым приближением может служить также решение уравнения (3.4) при $\mu_1(\tau) = 0$, что соответствует решению задачи о движении профиля под поверхностью раздела двух жидкостей разной плотности. Полученные из решения (3.3) значения μ_1 подставляются в уравнение (3.4), а μ_2 из (3.4) — в (3.3). Процесс повторяется до выполнения заданного порядка точности. Аналогичным образом решается система для определения $\mu_{\Gamma h}$. Вычислив по формуле (4.4) значение циркуляции, можем определить комплексный потенциал π , следовательно, найти по формуле Чаплыгина [6]

$$X - iY = \frac{i\rho_2}{2} \oint_{C^0} \left[\frac{dW_2^0(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 \frac{d\zeta}{f'(\zeta)} - i\rho_2 V_2 \Gamma$$

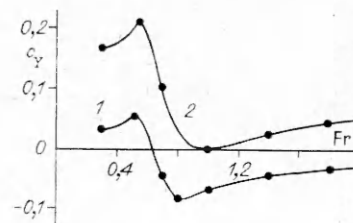
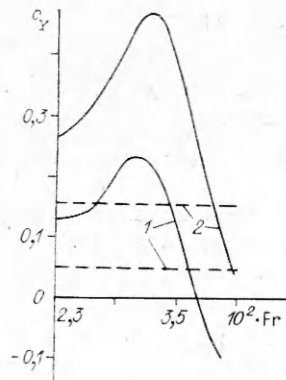
подъемную силу Y и волновое сопротивление X . По формуле

$$c_p = 1 - \left| \frac{1}{f'(\zeta)} \frac{dW_2^0(\zeta)}{d\zeta} \right|^2 / V_2^2$$

определяется коэффициент давления на профиле. Вид свободной поверхности и линии раздела жидкостей рассчитывается по (5.3), где значения производных плотностей особенностей находятся из продифференцированных уравнений (3.3), (3.4).

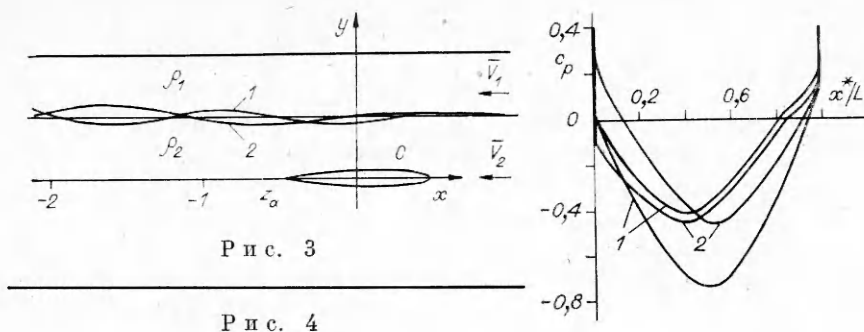
Конформное отображение внешности круга на внешность профиля осуществлялось методом [11]. Расчеты проводились на РС АТ. В частном случае потока весомой жидкости с одной границей раздела получены известные данные [2, 4, 9, 12] для кругового цилиндра и крылового профиля.

На рис. 1—4 представлены результаты расчетов для профиля НАСА 66₁—012. На рис. 1, 2 даны результаты расчетов коэффициента



Р и с. 2

Р и с. 1



Р и с. 3

Р и с. 4

подъемной силы $c_Y = 2Y/(\rho_2 V_2^2 L)$ в зависимости от числа Фруда $Fr = V_2/\sqrt{gL}$ при следующих параметрах потока: $h/L = 0,8$, $H/L = 0,4$, $\rho_2/\rho_1 = 1,01$, $V_2 = V_1$, $\alpha = 0$; 1° (линии 1, 2) ($L = 1$ — длина хорды профиля, α — угол атаки). Выделение интервала малых Fr (рис. 1) ($Fr < Fr^*$) связано с тем, что, как показали расчеты, именно при малых Fr (при заданных H/L , ρ_2/ρ_1 $Fr^* = 0,0632$) за профилем на границе раздела жидкостей существуют периодические волны с амплитудами, значительно превосходящими амплитуды волн на свободной поверхности. Заметим, что проведение расчетов вблизи критического Fr^* с достаточной точностью требует большого количества времени. В связи с этим результаты расчетов приведены с некоторым отступлением от Fr^* . Примеры расчета внутренних волн при $Fr = 0,032$; $0,038$ (линии 1, 2) для $\alpha = 0$ представлены на рис. 3. Свободная поверхность при таких Fr остается фактически не возмущенной (явление «мертвой воды»). На рис. 4 при тех же параметрах изображено распределение давления по профилю в зависимости от расстояния x^*/L , отсчитываемого от носика по хорде профиля. Штриховыми линиями и точками на рис. 1, 2 представлены характеристики для задачи обтекания профиля под свободной поверхностью однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2$). Как видно на рис. 2, при $Fr > Fr^*$ влияние границы раздела жидкостей в сравнении с влиянием свободной поверхности становится незначительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Черепенин Н. Д. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Тр. семин. по краевым задачам.— Казань: Казан. ун-т, 1973.— Вып. 10.
2. Филиппов С. И. Движение круглого цилиндра в потоке многослойной весомой жидкости // Тр. семин. по краевым задачам.— Казань: Казан. ун-т, 1990.— Вып. 24.
3. Лотфуллин М. В. Исследование движения системы двух профилей под свободной поверхностью весомой жидкости // Тр. Николаевского кораблестроительного ин-та.— 1979.— Вып. 152.
4. Лотфуллин М. В., Филиппов С. И. Движение профиля под свободной поверхностью весомой жидкости конечной глубины // Тр. семин. по краевым задачам.— Казань: Казан. ун-т, 1990.— Вып. 25.
5. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению «мертвой воды» // Журнал геофизики.— 1934.— Т. 4, № 3(13).
6. Войценья В. С. Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей // Тр. Новочеркасского политех. ин-та.— 1959.— Т. 104.
7. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел // Тр. конф. по теории волнового сопротивления.— М.: ЦАГИ, 1937.
8. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика.— М.: Мир, 1964.
9. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
11. Лотфуллин М. В. Численный метод конформного отображения односвязных областей // Тр. семин. по краевым задачам.— Казань: Казан. ун-т, 1985.— Вып. 22.
12. Giesing J. P., Smith A. M. O. Potential flow about two-dimensional hydrofoils // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 28, N 1.

г. Казань

Поступила 11/III 1991 г.,
в окончательном варианте — 24/VI 1991 г.