

4. Ярема С. Я., Иваницкая Г. С. Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // ФХММ.— 1986.— Т. 22, № 1.
5. Шлянников В. Н. Смешанные моды развития трещин при сложном напряженном состоянии // Завод. лаб.— 1990.— № 6.
6. Долгоруков В. А. Упругопластические характеристики состояния материалов для плоских несимметричных задач механики трещин при двухосном нагружении: Автореф. дис. канд. техн. наук.— М., 1992.
7. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.— Киев: Наук. думка, 1976.
8. Красовский А. Я. Хрупкость металлов при низких температурах.— Киев: Наук. думка, 1980.
9. Шлянников В. Н., Иваньшин Н. А. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин сложной формы при двухосном нагружении произвольного направления // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1983.— № 4.
10. Дель Г. Д., Соляник А. С., Чебаевский Б. П. Определение предельных нагрузок для тела с трещиной по критериям сопротивления материалов // ФХММ.— 1977.— Т. 13, № 4.

г. Казань

Поступила 8/VI 1992 г.,  
в окончательном варианте — 7/IX 1992 г.

УДК 539.3:624.07:629.7

*В. Н. Максименко*

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ И РАСКРЫВАЮЩИХ ТРЕЩИНУ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СКАЧКАМ СМЕЩЕНИЙ ЕЕ БЕРЕГОВ

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), контролирующие рост трещин, согласно принципу суперпозиции, можно вычислить через распределение номинальных (раскрывающих) напряжений, действующих на месте трещины в неповрежденной конструкции. В эксплуатируемой конструкции указанные напряжения могут существенно отличаться от расчетных. Различные расчетно-экспериментальные методы используются для определения номинальных напряжений (вырезание слоев, сверление отверстий, нанесение надрезов [1—5]) и КИН по полям деформаций в области перед вершиной трещины (тензометрия, регистрация раскрытия вблизи вершины трещины с помощью датчиков или компьютерной обработки визуальных изображений, лазерные спекл-методы, фотоупругие и голографические методы [4—10] и др.). К недостаткам указанных методов в большинстве случаев относятся: трудоемкость этапов механической обработки, ограниченность процедур расчета какой-нибудь конкретной конфигурацией, определенный произвол и недостаточная обоснованность их использования.

В настоящей работе на основе интегральных представлений решений задач упругого равновесия анизотропных пластин, ослабленных криволинейным разрезом (трещиной), предложен метод, позволяющий по найденным для нескольких точек экспериментальным скачкам смещений берегов трещины рассчитывать КИН первого и второго рода, а также распределение номинальных напряжений на линии трещины в сложных составных элементах конструкций из металлических сплавов и композитных материалов. Проведена оценка точности и эффективности предложенного подхода путем математического моделирования ряда практически важных задач и сопоставления с данными экспериментов.

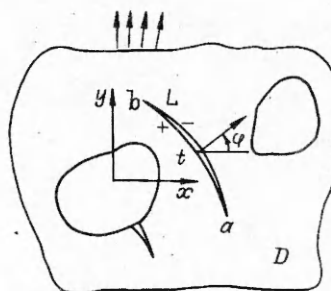
1. Выделим в нагруженной конструкции плоский элемент, представляющий собой пластину из упругого прямолинейно анизотропного (в частности, изотропного) материала и занимающий в плоскости  $xOy$  конечную

область  $D$  с системой отверстий и трещин. Геометрия конструктивного элемента приведена на рис. 1.

Допустим, что разрез (трещина)  $L$  сквозной и его берега свободны от внешних усилий, а нагружение конструкции таково, что при отсутствии разреза  $L$  на его месте в конструкции реализуется плоское напряженное состояние.

Требуется по известным значениям скачков смещений  $G(t) = [(u + iv)^+ - (u + iv)^-] = g_1(t) + ig_2(t)$  на берегах разреза (рис. 1) определить КИН.

Напряжения в пластине в окрестности дефекта можно выразить через две аналитические функции:



Р и с. 1

$$(1.1) \quad (\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 (\mu_v^2, -\mu_v, 1) \Phi_v(z_v) \right\},$$

где  $z_v = x + iy$ ;  $\mu_v$  — корни соответствующего характеристического уравнения с положительными мнимыми частями [11].

Следуя [12], функции  $\Phi_v(z_v)$  запишем в виде

$$(1.2) \quad \Phi_v(z_v) = \sum_{j=0}^1 \Phi_{vj}(z_v);$$

$$(1.3) \quad \Phi_{v1}(z_v) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_v(\tau) d\tau_v}{\tau_v - z_v};$$

$$(1.4) \quad a(t) \omega_1(t) + b(t) \overline{\omega_1(t)} + \omega_2(t) = 0,$$

$$a(t) = a_0 \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \quad b(t) = b_0 \frac{\overline{M_1(t)}}{M_2(t)},$$

$$a_0 = (\mu_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1}, \quad b_0 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1}.$$

Здесь  $\Phi_{v0}(z_v)$  определяют основное напряженное состояние, а  $\Phi_{v1}(z_v)$  — возмущенное напряженное состояние, возникающее из-за наличия разреза  $L$ ;  $\varphi = \varphi(t)$  — угол между нормалью  $n$  к левому берегу разреза  $L$  в точке  $t$  и осью  $x$ ;  $ds$  — элемент дуги контура  $L$ ;  $\omega_1(t)$  принадлежит к классу функций, не ограниченных на концах  $a, b$  разреза  $L$  [13], т. е. ее можно представить в форме

$$(1.5) \quad \omega_1(t) = \frac{\Omega^*(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \quad (t \in L),$$

где  $\Omega^*(t)$  — функция класса  $H$  на  $L$  в окрестности концов разреза [13];  $\sqrt{(t-a)(t-b)}$  — любая определенная ветвь, непрерывно изменяющаяся на  $L$ .

С учетом (1.3) и соотношений

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 (p_v, q_v) \varphi_v(z_v) \right\}, \quad \varphi'_v(z_v) = \Phi_v(z_v)$$

находим, что скачок смещений  $w(t)$  на  $L$  имеет вид

$$(1.6) \quad G(t) = \sum_{v=1}^2 \left\{ (p_v + iq_v) \int_{a_j}^t \omega_v(\tau) d\tau_v + (\bar{p}_v + i\bar{q}_v) \int_{a_j}^t \overline{\omega_v(\tau)} d\bar{\tau}_v \right\}.$$

С помощью (1.6) легко установить физическую сущность функций  $\omega_1(t)$ . Дифференцируя (1.6), получим

$$(1.7) \quad \frac{dw}{dt} = \sum_{v=1}^2 \left\{ (p_v + iq_v) M_v(t) \omega_v(t) + (\bar{p}_v + i\bar{q}_v) M_v(t) \overline{\omega_v(t)} \right\}.$$

Таким образом, из (1.4), (1.7) следует, что  $\omega_v(t)$  непосредственно выражаются через производные от скачков смещений на  $L$ :

$$(1.8) \quad \omega_1(t) = \frac{W(t) [A(t) - a(t)] - \overline{W(t)} [B(t) - b(t)]}{|A(t) - a(t)|^2 + |B(t) - b(t)|^2},$$

$$\omega_2(t) = -a(t) \omega_1(t) - b(t) \overline{\omega_1(t)},$$

$$W(t) = \left( \overline{p_2} \frac{dg_2(t)}{ds} - \overline{q_2} \frac{dg_1(t)}{ds} \right) [(\overline{p_2} q_2 - p_2 \overline{q_2}) M_2(t)]^{-1},$$

$$A(t) = A_0 M_1(t) / M_2(t), \quad B(t) = \overline{B_0 M_1(t)} / M_2(t),$$

$$A_0 = (\overline{p_2} q_1 - p_1 \overline{q_2}) (\overline{p_2} q_2 - p_2 \overline{q_2})^{-1}, \quad \overline{B_0} = (\overline{p_2} \overline{q_1} - \overline{p_1} \overline{q_2}) (\overline{p_2} q_2 - p_2 \overline{q_2})^{-1}.$$

Заметим, что для рассматриваемого случая внутренней трещины из условий непрерывности смещений в вершинах трещин и (1.6) получим дополнительное условие для  $\omega_1(t)$ :

$$(1.9) \quad \int_L \omega_1(\tau) d\tau_1 = 0.$$

Пусть уравнение контура  $L$  описывается соотношением  $t = \tau(\eta)$  ( $a = \tau(-1)$ ,  $b = \tau(1)$ ), где  $\eta$  — безразмерный действительный параметр. Тогда функцию  $\omega_1(t)$  с учетом (1.5) можно представить в виде

$$(1.10) \quad \omega_1(t) = \omega_1[\tau(\eta)] = \chi(\eta) = \chi^0(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2}.$$

Определив  $\omega_1(t)$  (а значит, и  $\chi^0(\pm 1)$ ) через производные от скачков смещений на  $L$  по формуле (1.8), из (1.1), (1.2), (1.9) получим асимптотические формулы для напряжений в окрестности  $c = \tau(\mp 1)$  концов разреза  $L$ :

$$(1.11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = \operatorname{Re} \left\{ \left( \pm \frac{ds}{d\eta} \Big|_{\eta=\pm 1} \right)^{1/2} \sum_{v=1}^2 (\mu_v^2, -\mu_v, 1) C_v(\vartheta) \right\},$$

$$C_v(\vartheta) = \Omega_v [M_v(c) (\cos \vartheta + \mu_v \sin \vartheta)^{-1}]^{1/2},$$

$$\Omega_1 = \chi^0(\pm 1), \quad \Omega_2 = -a(c) \Omega_1 - b(c) \overline{\Omega_1},$$

а также КИН отрыва и сдвига первого и второго рода  $K_{1,2}$  [14].

2. Представим потенциалы  $\Phi_v(z_v)$  для рассматриваемой пластины с трещиной в виде

$$(2.1) \quad \Phi_v(z_v) = \sum_{j=0}^2 \Phi_{vj}^*(z_v),$$

где  $\Phi_{v1}^*(z_v) \equiv \Phi_{v1}(z_v)$  (см. (1.3)), а потенциалы  $\Phi_v^*(z_v) = \sum_{j=1}^2 \Phi_{vj}^*(z_v)$  соответствуют случаю, когда приложенные к телу внешние нагрузки равны нулю всюду, исключая берега разреза  $L$ . Тогда, очевидно, потенциалы  $\Phi_{v0}^*(z_v)$  определяют номинальные напряжения в неповрежденной пластине от действия той же системы внешних усилий.

Подставив (2.1) в краевые условия на  $L$  [12], имеем

$$(2.2) \quad a(t) \Phi_1^*(t_1) + b(t) \overline{\Phi_1^*(t_1)} + \Phi_2^*(t_2) = 0.$$

С учетом (1.3), (1.4) и свойств потенциалов  $\Phi_{v0}^*(z_v)$  из (2.1), (2.2) получим

$$(2.3) \quad X_n^0(t) + \overline{\mu_2} Y_n^0(t) = (\overline{\mu_2} - \mu_2) M_2(t) \sum_{j=1}^2 \{a(t) \Phi_{1j}^*(t_1) + b(t) \overline{\Phi_{1j}^*(t_1)} + \Phi_{2j}^*(t_2)\}$$

( $X_n^0(t) ds$ ,  $Y_n^0(t) ds$  — проекции номинальных усилий, действующих на элемент дуги  $ds$  контура  $L$  в пластине без трещины).

Рассмотрим три частных случая сформулированной выше задачи.

А. Пусть поврежденный элемент представляет собой бесконечную пластину с трещиной  $L$ , тогда  $\Phi_{v2}^*(z_v) \equiv 0$  и после некоторых преобразований из

(2.3) с учетом (1.3) получим явное выражение номинальных усилий на линии дефекта через функцию  $\omega_1(t)$ :

(2.4)

$$X_n^0(t) + \bar{\mu}_2 Y_n^0(t) = C(t) \left\{ \int_L \frac{\omega_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_L [K_1(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_2(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}] ds \right\},$$

$$C(t) = M_1(t) (\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1) (\pi i)^{-1},$$

$$K_1(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} + \frac{b(\bar{\tau}) - b(\bar{t})}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\},$$

$$K_2(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - \bar{t}_1} + \frac{a(\bar{\tau}) - a(\bar{t})}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\}.$$

Если трещина расположена вдоль прямой, то уравнение (2.4) существенно упрощается:  $K_1(t, \tau) = K_2(t, \tau) \equiv 0$ . Например, для трещины  $L = \{|x| < a, y = 0\}$  номинальные напряжения  $\sigma_v^0(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}^0(x, 0)$ , действующие на месте трещины  $L$  в бесконечной пластине, даются формулой

$$(2.5) \quad \tau_{xy}^0(x, 0) + \bar{\mu}_2 \sigma_v^0(x, 0) = \frac{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\omega_1(\tau) d\tau}{\tau - x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением трещин типа I и осуществляя аналогично тому, как это сделано в [12], предельный переход в (1.3), (2.5) к случаю изотропной среды, приходим к соотношениям [4].

Б. Пусть нагруженная системой внешних усилий пластина занимает полуплоскость  $D = \{x > 0\}$  и ослаблена трещиной  $L$ , выходящей или расположенной близко к прямолинейной кромке  $x = 0$  пластины. Тогда, согласно [12],

$$(2.6) \quad \Phi_{v2}^*(z_v) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{l_v s_v \overline{\omega_1(\tau)} d\bar{\tau}_1}{s_v z_v - \bar{\tau}_1} + \frac{n_v m_v \overline{\omega_2(\tau)} d\bar{\tau}_2}{m_v z_v - \bar{\tau}_2} \right\},$$

$$l_v = \frac{\mu_{3-v} - \bar{\mu}_1}{\mu_v - \mu_{3-v}}, \quad n_v = \frac{\mu_{3-v} - \bar{\mu}_2}{\mu_v - \mu_{3-v}}, \quad s_v = \frac{\bar{\mu}_1}{\mu_v}, \quad m_v = \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_v} \quad (v = 1, 2).$$

Так построенные потенциалы  $\Phi_v^*(z_v)$  автоматически удовлетворяют нулевым краевым условиям по напряжениям на крае полуплоскости  $x = 0$  и на бесконечности. С учетом (2.1), (2.6) из (2.3) тем же способом найдем, что номинальные напряжения на линии трещины определяются соотношением вида (2.3). В данном случае ядра  $K_j(t, \tau)$  имеют более сложный вид и из-за громоздкости не приводятся.

В. Пусть область  $D$ , занятая пластиной, представляет собой бесконечную плоскость  $xOy$  вне эллиптического отверстия  $\Lambda = \{(x/a)^2 + (y/a)^2 = 1\}$ , а трещина  $L$  (внутренняя или краевая) расположена возле  $\Lambda$ . Тогда выраженные через функцию  $\omega_1(t)$  замкнутые аналитические представления потенциалов  $\Phi_{v2}^*(z_v)$ , автоматически удовлетворяющие краевым условиям на свободном от внешних усилий крае эллиптического отверстия  $\Lambda$  и затухающие на бесконечности, даны в [15]. С учетом результатов [15] получим, что и в рассматриваемой задаче номинальные напряжения на линии  $L$  в неповрежденной пластине по-прежнему определяются через функцию  $\omega_1(t)$  соотношениями (2.4) (явный вид  $K_j(t, \tau)$  из-за громоздкости не приводим).

Согласно принципу Сен-Венана, соотношения (2.4), (2.5) (случай А) будут достаточно точно аппроксимировать распределение номинальных напряжений на месте трещины и для конечных пластин, если область возмущенного напряженного состояния, возникающая из наличия разреза  $L$ , локализована и не распространяется до границ пластины. Если дефект расположен возле: 1) прямолинейной кромки пластины, 2) эллиптического отверстия или границы тела, являющейся дугой эллипса, а влиянием других границ тела можно пренебречь, то для определения номинальных напряжений следует воспользоваться соотношениями (2.4) для случаев Б, В соответственно.

3. Пусть известны значения скачков смещений вдоль оси  $x$   $g_1^p = (u^+ - u^-)^p$  и оси  $y$   $g_2^q = (v^+ - v^-)^q$  берегов трещины в произвольных точках  $t_p = \tau(\beta_p) \in L$  ( $p = \overline{1, N_1}$ ) и  $t_{N_1+q} = \tau(\beta_{N_1+q}) \in L$  ( $q = \overline{1, N_2}$ ) соответственно\*.

Представим функцию  $G(t)$  в виде аппроксимирующего ряда по функциям Чебышева второго рода  $U_k(\beta) = \sin(k \arccos \beta)$  [16]:

$$(3.1) \quad G(t) = G(\tau(\beta)) = G^*(\beta) = \sum_{k=1}^M A_k U_k(\beta).$$

Здесь  $A_k = a_k + ib_k$  — неизвестные комплексные постоянные.

Для определения  $A_k$  воспользуемся методом наименьших квадратов. С этой целью рассмотрим функционал

$$S(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_M, b_M) = \sum_{p=1}^{N_1} \left( \sum_{k=1}^M a_k U_k(\beta_p) - g_1^p \right)^2 + \sum_{q=1}^{N_2} \left( \sum_{k=1}^M b_k U_k(\beta_{N_1+q}) - g_2^q \right)^2.$$

Тогда необходимое условие экстремума дает систему  $2M$  линейных алгебраических уравнений для нахождения  $a_j, b_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ):

$$(3.2) \quad \frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \sum_{p=1}^{N_1} \left( \sum_{k=1}^M a_k U_k(\beta_p) - g_1^p \right) U_j(\beta_p) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_j} = 2 \sum_{q=1}^{N_2} \left( \sum_{k=1}^M b_k U_k(\beta_{N_1+q}) - g_2^q \right) U_j(\beta_{N_1+q}) = 0.$$

Определив из (3.2)  $A_k$ , на основании (3.1) и соотношения [16]

$$\frac{dU_k(\beta)}{d\beta} = -\frac{kT_k(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T_k(\beta) = \cos(k \arccos \beta) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

запишем выражение производной от скачков смещений:

$$(3.3) \quad \frac{dG}{d\beta} = \frac{g_1^0(\beta) + ig_2^0(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \sum_{k=1}^M k A_k T_k(\beta).$$

Согласно (1.8), (1.10), (3.3), имеем

$$(3.4) \quad \chi^0(\beta) = \frac{W_0(\beta) [A(t) - a(t)] - \overline{W_0(\beta)} [B(t) - b(t)]}{|A(t) - a(t)|^2 + |B(t) - b(t)|^2} \left( \frac{ds}{d\beta} \right)^{-1},$$

$$W_0(\beta) = [\overline{p_2} g_2^0(\beta) - \overline{q_2} g_1^0(\beta)] [(\overline{p_2} q_2 - p_2 \overline{q_2}) M_2(t) \Gamma]^{-1}.$$

Зная  $\chi^0(\beta)$ , по формулам (1.11) получим КИН и асимптотические формулы для напряжений в окрестности вершин трещин.

С учетом замены переменных (1.10) уравнение (2.4) можно представить в виде

$$(3.5) \quad X_n^0(t) + \overline{\mu_2} Y_n^0(t) = \int_{-1}^1 \left\{ \left[ \frac{F(\beta, \eta)}{\eta - \beta} + k_1(\beta, \eta) \right] \chi^0(\eta) + k_2(\beta, \eta) \overline{\chi^0(\eta)} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

$$F(\beta, \eta) = \frac{(\eta - \beta) \dot{\tau}(\eta)}{\tau_1(\eta) - \tau_1(\beta)} C(\beta), \quad C(\beta) = C(\tau(\beta)),$$

$$k_1(\beta, \eta) = \frac{ds}{d\eta} K_1[\tau(\beta), \tau(\eta)] C(\beta), \quad \dot{\tau}(\beta) = \frac{d\tau}{d\beta},$$

$$k_2(\beta, \eta) = \frac{ds}{d\eta} K_2[\tau(\beta), \tau(\eta)] C(\beta),$$

где  $F(\beta, \eta), k_j(\beta, \eta)$  ( $j = 1, 2$ ) — непрерывные функции.

\* Точки  $t_j = \tau(\beta_j)$  ( $j = \overline{1, N_1 + N_2}$ ) могут, в частности, и совпадать между собой.

Для вычисления интеграла в (3.5) воспользуемся формулой [17]

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi^0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} K(\beta, \eta) d\eta = \frac{\pi}{R} \sum_{m=1}^R \chi^0(\eta_m) K(\beta, \eta_m),$$

$$\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2R} \pi \quad (m = \overline{1, R}),$$

справедливой для регулярных интегралов при любых  $\beta$ , а для сингулярных интегралов при

$$\beta = \beta_r = \cos \frac{\pi}{R} r \quad (r = \overline{1, R-1})$$

(количество узлов  $R$  — произвольное натуральное число). Тогда приходим к квадратурной формуле для определения номинальных усилий в чебышевских узлах  $t_r = \tau(\beta_r)$  ( $r = \overline{1, R-1}$ ):

$$X_n^0(t_r) + \bar{\mu}_2 Y_n^0(t_r) = \frac{\pi}{R} \sum_{m=1}^R \{k_1^*(\beta_r, \eta_m) \chi^0(\eta_m) + k_2(\beta_r, \eta_m) \overline{\chi^0(\eta_m)}\},$$

$$k_1^*(\beta, \eta) = \frac{F(\beta, \eta)}{\eta - \beta} + k_1(\beta, \eta).$$

4. С практической точки зрения изложенная методика расчета КИН  $K_{12}$  и номинальных напряжений на линии дефекта полезна лишь в том случае, если можно получить приемлемые результаты на основе измерения смещений берегов трещины в небольшом числе точек, удаленных от вершины. Для исследования погрешности предлагаемого подхода в зависимости от числа и расположения точек, где определяется смещение берегов, был проведен вычислительный эксперимент. Данные для изотропного материала получены путем предельного перехода в параметрах анизотропии в численном решении.

В качестве методических примеров выбраны следующие типы задач для изотропных пластин с трещинами типа I: а) центральная трещина в растягиваемой полосе конечной ширины,  $a/W = 0,7$ ; б) краевая трещина в растягиваемой полуплоскости; в) внутренняя трещина в растягиваемой полуплоскости,  $d/a = 0,1$ ; г) отверстие с краевой трещиной в растягиваемой плоскости,  $a/r = 0,1$ ; д) трещина у отверстия в растягиваемой плоскости,  $a/r = 1$ ,  $d/a = 0,1$ ; е) бесконечная пластина с трещиной, берега которой нагружены парой симметрично расположенных сосредоточенных сил,  $b/a = 0,5$  (рис. 2, а—е). Решения этих задач или имеют замкнутые выражения [14], или получены с помощью пакета программ по методу СИУ [12, 15]. При расчете КИН по формулам (1.11), (3.1)—(3.4) использовались значения раскрытия трещины в одном — пяти узлах, расположенных на контуре трещины в точках с координатами  $\hat{\beta}_k^{(1)} = x_k/a = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$  и  $\hat{\beta}_k^{(2)} = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$  ( $k = \overline{1, 5}$ ).

В табл. 1 приведены значения погрешности вычисления КИН отрыва  $\bar{K}_1$  в левой и правой вершине трещины  $\delta(\mp a)$  в зависимости от количества точек  $p$  ( $p = \overline{1, 5}$ ) с координатами  $\beta_k^{(p)}$  ( $k = \overline{1, p}$ ), где задавались (измерялись) раскрытия трещины. Решения для семейств узлов  $\{\beta_k^{(1)}\}$ ,  $\{\beta_k^{(2)}\}$  ( $k = \overline{1, p}$ ) даны над и под чертой соответственно. Здесь и далее в расчетах число членов аппроксимирующего ряда  $M$  в формуле (3.1) полагалось равным  $p$ .

В табл. 2 для задачи д приводится для сравнения погрешность  $\delta(\pm a)$  результатов расчетов при восьми различных вариантах ( $N = \overline{1, 8}$ ) замера раскрытия трещины в двух и четырех узлах, расположенных симметрично относительно центра трещины; положительные координаты выбранных узлов отмечены знаком +.

Анализ приведенных в табл. 1, 2 результатов расчетов показывает, что для задач а—д предлагаемый метод обеспечивает определение КИН по

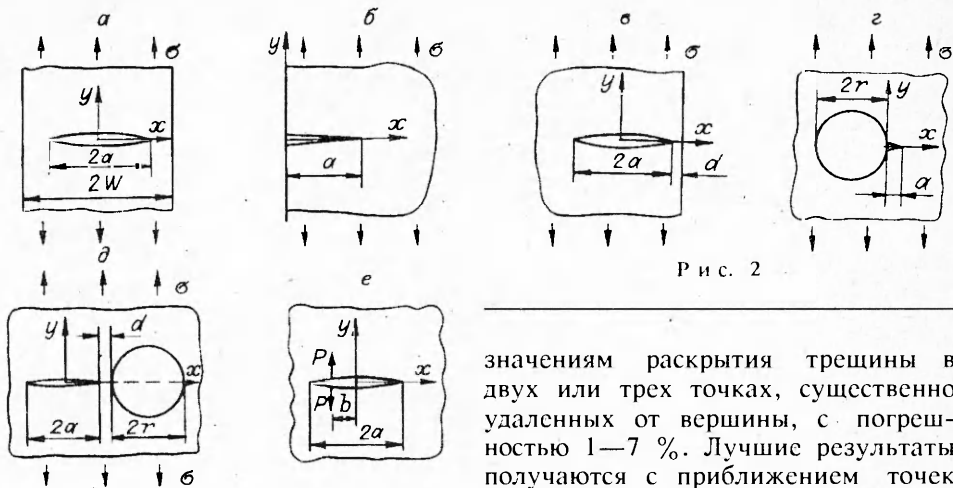


Рис. 2

значениям раскрытия трещины в двух или трех точках, существенно удаленных от вершины, с погрешностью 1—7%. Лучшие результаты получаются с приближением точек наблюдения к вершине трещины и

увеличением их числа. Если нагрузки приложены к берегам дефекта и носят локальный характер (например, трещина на нагруженном отверстие), сходимость метода несколько ухудшается (см. табл. 1, задача е).

Воспользуемся полученными в [4] экспериментальными данными по раскрытию берегов центральной трещины в растягиваемой усилиями  $\sigma = 100$  МПа полосе из стали S45C (рис. 2, а,  $2W = 35$  мм, толщина листа 2 мм). Они показаны по полудлине трещины на рис. 3 точками 1, 2 для  $a = 3,3$  и 4,2 мм. В соответствии с предложенной методикой по этим экспериментальным данным были восстановлены определенные соотношением (3.1) раскрытия трещины  $G(t)$  при  $M = 1$  (линии), а также рассчитаны КИН  $K_1$  и номинальные напряжения на линии трещины. Погрешность определения КИН относительно теоретического решения [14] составила 1,6 и 5,4% при  $a = 3,3$  и 4,2 мм. Погрешность рассчитанных по формуле (2.5) номинальных напряжений относительно  $\sigma = 100$  МПа соответственно 3,9 и 9,0%.

Приведенные результаты численного моделирования и сопоставления с данными эксперимента свидетельствуют о высокой точности и достоверности предлагаемой методики. К ее достоинствам можно отнести малую трудоемкость, универсальность (различная форма конструктивно-го элемента, произвольность расположения, формы и типа трещины,

Таблица 1

Тип задачи	Количество точек $p$									
	1		2		3		4		5	
	$\delta(-a)$	$\delta(a)$	$\delta(-a)$	$\delta(a)$	$\delta(-a)$	$\delta(a)$	$\delta(-a)$	$\delta(a)$	$\delta(-a)$	$\delta(a)$
а	-3,4	-3,4	-4,0	-2,8	0,2	0,1	0,1	0,1	-2,2	-0,1
	-3,4	-3,4	-4,9	-2,1	-0,2	-0,1	-0,4	-0,1	-1,4	-0,1
б	—	29,0	—	25,8	—	10,4	—	-1,4	—	-0,3
	—	23,1	—	-17,8	—	6,8	—	-1,3	—	-0,1
в	11,4	-23,3	-8,9	-9,3	8,3	-1,4	-7,0	1,6	1,3	2,0
	13,3	-22,0	-11,8	-7,8	12,4	-0,5	-10,5	1,9	-44,2	1,3
г	—	34,4	—	-23,9	—	11,1	—	-2,8	—	0,2
	—	28,2	—	-16,2	—	6,9	—	-1,8	—	0,1
д	12,8	-36,2	-12,6	-21,9	16,1	-11,1	-29,5	-3,8	56,7	-0,3
	15,2	-34,9	-17,5	-19,8	26,3	-9,0	-53,8	-2,3	121,6	0,3
е	-24,0	128,1	54,6	-107	136,9	57,1	223,8	-17,4	316,4	2,3
	-32,8	101,7	36,1	-67,2	107,4	27,1	181,9	-5,7	260,1	0,4



Таблица 2

Число узлов	N	$\beta_k$										$\delta(-a)$	$\delta(a)$	
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9			
2	1	+		+									-12,6	-21,9
	2			+		+							-24,0	-17,6
	3					+		+					-46,5	-12,2
	4							+		+			-92,4	-5,7
	5		+		+								-17,5	-19,8
	6				+		+						-33,5	-15,0
	7						+		+				-65,1	-9,0
	8								+		+		-132,1	-2,3
4	1			+	+								-4,1	-8,6
	2					+	+						-3,3	-6,7
	3							+	+				-2,0	-3,9
	4									+	+		-0,6	-0,6
	5		+		+								-3,7	-8,9
	6				+		+						-3,3	-7,2
	7						+		+				-2,3	-4,5
	8								+		+		-0,8	-1,0

изотропные и анизотропные материалы и т. д.), возможность достоверного определения напряжения на месте трещины в неповрежденной конструкции, а также КИН первого и второго рода по данным раскрытия трещин в двух-трех точках, удаленных от вершины. Простота и эффективность предложенной методики позволяют рекомендовать ее к практическому применению для решения задач оценки прочности и прогнозирования ресурса конструкций.

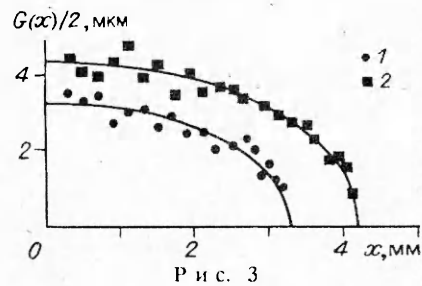


Рис. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rubicki E. F., Shadley J. R., Shealy W. S. An consistent-splitting model for experimental residual stress analysis // *Exp. Mech.* — 1983. — V. 23, N 4.
2. Rendler N. J., Vigness I. Hole-drilling strain-gage method of measuring residual stress // *Exp. Mech.* — 1966. — V. 6, N 12.
3. Чжен В., Финни И. Метод измерения осесимметричных продольных остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрах, сваренных кольцевым швом // *Теор. основы инж. расчетов.* — М.: Мир, 1985. — № 3.
4. Torri T., Houda K., Fujibayashi T., Hamano T. A method of evaluating crack opening stress distributions and stress intensity factors based on opening displacements along a crack // *JASME Intern. J. Ser. 1.* — 1990. — V. 33, N 2.
5. Vainstok V. A., Kravets P. Y. Estimation of stress intensity factors and nominal stresses from discrete COD values // *Engng Fract. Mech.* — 1991. — V. 38, N 4, 5.
6. Дементьев А. Д. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений в вершине сквозной трещины по данным тензометрии // *Учен. зап. ЦАГИ.* — 1987. — Т. 18, № 5.
7. Chiang F. P., Haveesh T. V. Three dimensional crack tip deformation measured by laser speckles // *Proc. SEM Conf. Exp. Mech., Las Vegas, June, 1985.* — Brook field, 1985.
8. Determination of mixed mode stress intensity factor using digital image correlation/B. R. Durig, S. R. McNeill, M. A. Sutton a. o. // *6th Congr. Exp. Mech., Portland, 1988: Proc.* — London, 1988. — V. 1.
9. Miura N., Sakai S., Okamura H. A determination of mode I stress intensity factor from photoelastic isochromatic fringe patterns assisted by image processing technique // *9th Intern. Conf. Exp. Mech., Copenhagen, 1990: Proc.* — Copenhagen, 1990.
10. Narendran N., Shukla A., Leicher S. Application of fiber optic sensors to fracture mechanics problems // *Engng Fract. Mech.* — 1991. — V. 38, N 6.



11. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: ГИТТЛ, 1957.
12. Максименко В. Н. Задача о трещине в анизотропной полуплоскости, подкрепленной упругими накладками // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— Новосибирск, 1970.— Вып. 99.
13. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.
14. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т./Под ред. В. В. Панасюка.— Киев: Наук. думка, 1988.
15. Максименко В. Н. Предельное равновесие анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием и системой трещин сложной формы // Учен. зап. ЦАГИ.— 1987.— Т. 18, № 3.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
17. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985.

г. Новосибирск

Поступила 28/X 1992 г.

УДК 533.932:533.601.18

В. З. Корн, В. А. Шувалов

### ЗОНДОВАЯ ДИАГНОСТИКА ПОТОКА ЧАСТИЦ, ДЕСОРБИРУЕМЫХ С ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА СТРУЕЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Динамическое взаимодействие тел с потоком разреженного газа характеризуется многообразием процессов и явлений, протекающих на межфазной границе. Если энергия набегающих частиц превосходит  $\sim 5$  эВ, процессы энергообмена и передачи импульса сопровождаются рассеянием поверхностных загрязнений, слоев адсорбированных газов, десорбцией частиц с поверхности и т. д. Контроль и изучение этих процессов существенно важны с феноменологической и прикладной точек зрения для баланса процессов передачи импульса, массопереноса и энергообмена на границе двух фаз. Измерение параметров потоков масс, рассеиваемых набегающими частицами, обычно осуществляется весовым методом [1, 2]. При этом не удается выделить в балансовом составе долю частиц, десорбируемых с поверхности за счет рассеяния набегающим потоком адсорбированных слоев и покрытий, и долю потерь, обусловленных эрозией материала поверхности [3]. В то же время такое разделение существенно необходимо при описании массопереноса в системе газ — поверхность, процессов передачи импульса и энергии на межфазной границе.

В данной работе приведены метод и результаты экспериментального исследования параметров частиц, десорбируемых с поверхности в результате бомбардировки ее набегающим потоком разреженной плазмы. Показано, что предлагаемый метод позволяет выделить долю адсорбированных поверхностью твердого тела частиц, оценить их параметры.

1. Тело, помещенное в высокоскоростной поток разреженной плазмы, подвергается воздействию как набегающих нейтральных и заряженных частиц, ускоренных в приэлектродном слое, так и десорбируемых с поверхности из-за интенсивной ее бомбардировки частиц. Десорбция частиц, стимулированная набегающим потоком, вызывает в определенном диапазоне потенциалов поверхности увеличение суммарного импульса, переносимого на поверхность тела. При детальном рассмотрении баланса сил, действующих на тело в потоке разреженной плазмы, включая совокупность всех частиц, интегральный импульс, переданный телу, может быть определен в виде

$$F_{\Sigma}^{(1)}(V) = F_r(V) + F_e(V) + \Delta F$$

для свободной от адсорбента поверхности и

$$F_{\Sigma}^{(2)}(V) = F_r(V) + F_e(V) + \Delta F + F_d$$

© В. З. Корн, В. А. Шувалов, 1993