



**АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ
ПО ГИДРОРАЗРЫВУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЕЙ**

А. М. Коврижных¹, В. Д. Барышников²

¹*Высшее военное командное училище МО РФ, E-mail: amkovr@mail.ru,
ул. Иванова 49, Новосибирск 630117, Россия*

²*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: v-baryshnikov@yandex.ru,
Красный пр. 54, Новосибирск 630091, Россия*

Рассматривается задача об упругопластическом деформировании и разрушении горных пород вокруг цилиндрической и сферической полостей под действием внутреннего и внешнего давлений. Традиционно давление при гидроразрыве определяется по теории максимального нормального напряжения. Однако известные лабораторные экспериментальные исследования не подтверждаются этой теорией. Предлагается предельное давление определять по другим экспериментально обоснованным критериям разрушения.

Упругопластическое деформирование и разрушение горных пород, гидроразрыв, критерии разрушения

**ANALYSIS OF THEORETICAL AND EXPERIMENTAL RESULTS
OF HYDRAULIC FRACTURING OF CYLINDRICAL AND SPHERICAL CAVITIES**

A. M. Kovrizhnykh¹ and V. D. Baryshnikov²

¹*Higher Military Command School of the Ministry of Defense of the Russian Federation,
E-mail: amkovr@mail.ru, ul. Ivanova 49, Novosibirsk 630117, Russia*

²*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: v-baryshnikov@yandex.ru, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The problem on elastoplastic deformation and failure of rocks around cylindrical and spherical cavities under the action of internal and external pressure is considered. The pressure during hydraulic fracturing is customary determined by the theory of maximum normal stress. However, the known laboratory experimental studies are not confirmed by this theory. For this reason, it is proposed to determine the limiting pressure using different experimentally justified failure criteria.

Elastoplastic deformation and rock failure, hydraulic fracturing, failure criteria

В практике горного дела известны две сферы применения гидроразрыва скважин как технологический метод разрушения горных пород, так и метод контроля действующих в массиве напряжений — измерительный гидроразрыв [1–8]. Разработка месторождений полезных ископаемых открытым или подземным способом всегда сопровождается деформированием и разрушением горных пород, поэтому умение управлять данным процессом с минимальными энергетическими затратами имеет большое значение в горном деле. Применяемые способы управления процессом разрушения горных пород должны отвечать современному уровню развития науки и техники, соответствовать непрерывно изменяющимся горно-геологическим условиям, развитию технологии горных работ, ужесточению требований к безопасности и экономичности горного производства. В этой связи можно выделить два основных аспекта: 1) предсказание начала разрушения — прогноз по времени и масштабам; 2) регулирование — управление процессом разрушения в нужном направлении. Такое предсказание при добыче полезного ископаемого помогает найти рациональные способы разрушения геоматериала, а при поддержании горных выработок — выбрать рациональный вид крепи, обеспечивающий безопасное ведение горных работ.

Перечисленные проблемы являются предметом исследования физики и механики необратимого деформирования и разрушения породного массива. Существующие в настоящее время теории пластичности и прочности материалов не отражают в полном объеме результаты экспериментальных исследований, либо их практическое использование связано с преодолением больших математических трудностей. Поэтому практика выдвигает следующие требования к предлагаемым теориям пластичности и разрушения: во-первых, чтобы они отражали фактические свойства материала, т. е. результаты экспериментов на горных породах; во-вторых, чтобы позволяли достаточно просто решать конкретные прикладные задачи механики горных пород. В данной работе с применением теории максимального пластического сдвига решаются задачи упругопластического деформирования и разрушения горных пород вокруг сферической и цилиндрической полостей под действием внутреннего и внешнего давлений.

Несмотря на практическую важность прикладных задач механики горных пород, посвященных гидроразрыву пласта (ГРП) и упругопластическому деформированию породного массива вокруг выработок и скважин, в настоящее время отсутствуют решения, позволяющие достоверно оценивать упругопластическое разрушение в этих задачах. Известно, что достоверность научных исследований ГРП обеспечивается экспериментальными результатами в этой области, корректным использованием математических моделей по упругопластическому разрушению, полученных в некоторых частных случаях из общих уже известных классических теорий хрупкого разрушения, хорошим количественным соответствием результатов расчета с данными экспериментов.

Подробный обзор теоретических и экспериментальных работ, посвященных гидравлическому разрыву можно найти в [1–3, 6–11]. Традиционно считается, что для определения величины предельного давления и направления трещины гидроразрыв используется критерий максимального нормального напряжения [6]. Однако имеющиеся в литературе экспериментальные исследования [4, 5] не подтверждаются ни одним из критериев упруго хрупкого разрушения как по предельной величины нагрузки, так и по направлению трещины вызванной этой нагрузкой [5]. Результаты лабораторного экспериментального исследования по разрушению цилиндрической и сферической полостей, проведенных в образцах горных пород, показывают, что для твердо-хрупких горных пород этот критерий может применяться только для небольших значений внешнего гидростатического давления. Для мягко-пластических горных пород теория максимального нормального напряжения не согласуется с результатами экспериментов [9, 12].

Решение задач упругопластического деформирования по определению напряженного состояния вокруг скважины является важным практическим приложением к механике гидравлического разрыва. Наиболее известными упруго-хрупкими решением данной проблемы считаются исследования [1–3]. Скважина представляет собой протяженную цилиндрическую полость радиуса $r = a$, нагруженную внутренним давлением p . Внешнее гидростатическое горное давление обозначим q . Упругое решение этой задачи для напряжений имеет вид:

$$\sigma_r = -q + (q - p) \frac{a^2}{r^2}, \sigma_\theta = -q - (q - p) \frac{a^2}{r^2}. \quad (1)$$

Разрушение хрупких горных пород начинается, когда на контуре $r = a$ выполняется критерий Кулона – Мора. Применяя этот критерий и формулы (1), найдем давление разрыва [12–14]

$$p_* = q(1 + \sin \varphi) + k(1 - \sin \varphi), \quad (2)$$

где φ — угол внутреннего трения; k — предел текучести (прочности). Плоскость разрыва скважины проходит через образующую и составляет с направлением r угол $\pi/4 - \varphi/2$. Когда $\varphi = 0$ получаем критерий Треска $p_* = q + \sigma_s/2$. Если $\varphi = \pi/2$, то из (2) следует критерий максимального нормального напряжения, $p_* = 2q + 2k$.

Аналогичным образом решается задача о нагружении сферической полости внутренним давлением. Для хрупких горных пород разрушение происходит, когда на контуре $r = a$ выполняется критерий Кулона–Мора. Давление разрыва для сферической полости определяется по формуле [12]

$$p_* = 3q \frac{1 + \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} + 4k \frac{1 + \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}. \quad (3)$$

Если в (3) $\varphi = 0$, то $p_* = q + 4k/3$, при $\varphi = \pi/2$ давление разрыва $p_* = 3q + 4k$.

Механизм ГРП исследован экспериментально и теоретически, причем экспериментальные исследования выполнялись как в лабораторных, так и в производственных (натурных) условиях [9–11]. Как правило, лабораторные исследования разрушения материалов гидроразрывом проводятся на цилиндрических образцах, внутри которых высверлено отверстие (камера). Результаты опытов показывают, что предельное давление при гидроразрыве горных пород почти во всех случаях больше этого показателя, вычисленного по любой теории упруго хрупкого разрушения, что можно объяснить образованием пластической зоны вокруг отверстия образца [9–11]. В работе [9], например, представлены результаты лабораторных экспериментов по цилиндрическому и сферическому гидроразрыву. Опыты проводились на изготовленных из горных пород цилиндрических ядрах диаметром 10 см и длиной 12 см. Отбор ядер осуществлялся по однородности и различию механических свойств горных пород от твердо-хрупких до мягко-пластических. В отобранных ядрах пробуривались цилиндрические и сферические полости, в которые посредством запрессованной стальной трубки подавалась жидкость под давлением p . Кроме того, ядро нагружалось внешним боковым давлением q и осевым усилием.

Гидроразрыв цилиндрической полости. В [9, 10] приводится упругопластическое решение задачи о гидроразрыве цилиндрической полости внутренним давлением p при отсутствии внешнего давления q . Для этого частного случая получена формула, устанавливающая зависимость давления разрыва p_* от предельного максимального пластического сдвига γ_* . Чем больше пластический сдвиг γ_* , тем больше пластическая зона и давление p_* . Минимальное давление разрыва получается при упруго-хрупком разрушении при $\gamma_* = 0$. На основе этих результатов в [14] высказано предложение о возможности построения метода решения задачи о деформировании и разрушении горных пород вокруг цилиндрической и сферической полостей, основанного на деформационном критерии предельного пластического сдвига. Однако расчетных формул и сравнения теоретических и экспериментальных результатов в [14] не представлено. Поэтому далее приведем подробное аналитическое решение упругопластических задач с применением критерия Треска–Сен-Венана. Для плоской деформации толстостенного цилиндра с внутренним и внешним радиусами $r = a$ и $r = b$. Применяя в упругой области закон Гука и граничные условия $\sigma_r = -q$, когда $r = b$ и $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$ при $r = c$, получим решение:

$$\sigma_\theta = -q + kc^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad \sigma_r = -q - kc^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right). \quad (4)$$

Из анализа упругих напряжений видно, что в пластической зоне $a \leq r \leq c$ справедливо неравенство $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$, тогда из уравнение равновесия с применением критерия пластичности и граничного условия для σ_r на поверхности $r = a$ вычислим напряжения:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad \sigma_r = -p + 2k \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_z = \nu (\sigma_\theta + \sigma_r). \quad (5)$$

Из условия непрерывности σ_r на упругопластической границе получим

$$\frac{p}{k} = \frac{q}{k} + 1 + \ln \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}. \quad (6)$$

В пластической зоне необратимая деформация представляет собой сдвиг γ в направлении действия максимального касательного напряжения, который определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d\gamma}{dr} + \frac{2\gamma}{r} + \frac{4(1-\nu)k}{\mu} \frac{1}{r} = 0, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)k}{\mu} \left(\frac{c^2}{r^2} - 1 \right). \quad (7)$$

Разрушение в области $a \leq r \leq c$ наступает, когда сдвиг γ в (7) достигает предельной величины γ_* . Наибольшее значение γ достигается при $r = a$ и поэтому разрушение начинается с внутренней поверхности трубы. Если обозначим c_* — радиус фронта разрушения, тогда при $c_* = a$ из (7) имеем:

$$\frac{c_*^2}{c^2} = \frac{c_*^2}{a^2} = 1 + \frac{\mu\gamma_*}{2(1-\nu)k}. \quad (8)$$

Из (8) и (6) найдем предельное давление, при котором начинается разрушение цилиндрической полости

$$\frac{p_*}{k} = \frac{q}{k} + 1 + \ln \left(1 + \frac{\mu\gamma_*}{2(1-\nu)k} \right) - \frac{a^2}{b^2} \left(1 + \frac{\mu\gamma_*}{2(1-\nu)k} \right). \quad (9)$$

Расчетные зависимости давления разрыва p от внешнего давления q для цилиндрической полости показаны на рис. 1 (сплошная линия — расчет по теории предельного пластического сдвига; пунктирная — по теории максимального нормального напряжения; штрихпунктирная — по теории максимального касательного напряжения. Результаты экспериментов изображены светлыми кружками).

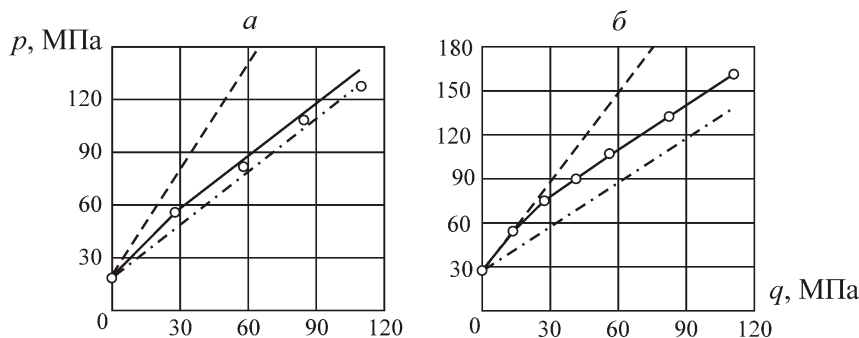


Рис.1 . Зависимость давления разрыва цилиндрической полости от внешнего давления для горной породы: *a* — мягко-пластической; *б* — твердо-хрупкой

Гидроразрыв сферической полости. Рассмотрим задачу о гидравлическом разрыве сферической полости радиуса $r = a$, нагруженной внутренним давлением p и гидростатическим внешним давлением $\sigma_r = -q$ при $r = b$. В неограниченном породном массиве $b = \infty$ и до проведения полости следует принять $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -q$, а все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. На контуре сферической полости $\sigma_r = -p$ при $r = a$. При небольших значениях разности $q - p$ пластических деформаций не возникает, потому справедливо упругое решение:

$$\sigma_r = -q - (p - q) \frac{a^3}{r^3}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -q + (p - q) \frac{a^3}{2r^3}, \quad \frac{u}{r} = \frac{p - q}{4\mu} \frac{a^3}{r^3}. \quad (10)$$

Если $p - q \geq 4k/3$, то для идеального упругопластического материала вокруг сферической полости образуется пластическая зона, в которой:

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_r + 2k, \quad \sigma_r = -p + \frac{4}{3}k \ln \frac{r^3}{a^3}, \quad (11)$$

В упругой области $c \leq r \leq b$, когда $b < \infty$ имеем:

$$\sigma_\theta = -q + \frac{4}{3}kc^3 \left(\frac{1}{2r^3} + \frac{1}{b^3} \right), \quad \sigma_r = -q - \frac{4}{3}kc^3 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right). \quad (12)$$

Из условия непрерывности радиального напряжения σ_r на упругопластической границе при $r = c$, учитывая (12) и (11), получим:

$$\frac{p_*}{k} = \frac{q}{k} + \frac{4}{3} \left(1 + \ln \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^3}{b^3} \right). \quad (13)$$

Из (13) можно найти зависимость давления разрыва сферической полости от давления q , приложенного к внешней поверхности $r = b$. Для определения деформаций горных пород в пластической зоне $a \leq r \leq c$ воспользуемся соотношениями состояния полной пластичности [12, 13]:

$$\varepsilon_r = -\gamma + \frac{1}{E}\sigma_r - \frac{2\nu}{E}\sigma_\theta, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{\gamma}{2} - \frac{1-\nu}{E}\sigma_\theta - \frac{\nu}{E}\sigma_r. \quad (14)$$

Учитывая (11), (14) и подставляя ε_r , ε_θ в условие совместности деформаций, получим дифференциальное уравнение для расчета пластического сдвига γ :

$$\frac{d\gamma}{dr} + \frac{3\gamma}{r} + \frac{12(1-\nu)k}{E} \frac{1}{r} = 0.$$

Учитывая, что при $r = c$ необратимый сдвиг $\gamma = 0$, найдем решение:

$$\gamma = \frac{4(1-\nu)k}{E} \left(\frac{c^3}{r^3} - 1 \right). \quad (15)$$

Наибольшее значение γ принимает при $r = a$, поэтому разрушение начнется с поверхности сферической полости, когда $\gamma = \gamma_*$. Это условие позволяет вычислить радиус пластической зоны в начальный момент разрушения:

$$\frac{c^3}{a^3} = 1 + \frac{E\gamma_*}{4(1-\nu)k}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13), получим

$$\frac{p_*}{k} = \frac{q}{k} + \frac{4}{3} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{E\gamma_*}{4(1-\nu)k} \right) - \frac{a^3}{b^3} \left(1 + \frac{E\gamma_*}{4(1-\nu)k} \right) \right]. \quad (17)$$

Расчетные зависимости давления разрыва от внешнего давления q для сферической полости показаны на рис. 2: сплошной линией — расчет по теории предельного пластического сдвига; пунктирной — по теории максимального нормального напряжения; штрихпунктирной — по теории максимального касательного напряжения. Результаты экспериментов изображены темными кружками.

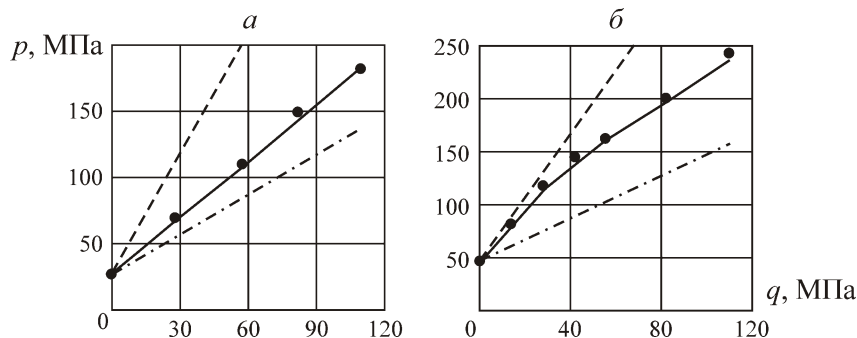


Рис. 2. Зависимость давления разрыва сферической полости от внешнего давления для горной породы: а — мягко-пластической; б — твердо-хрупкой

ВЫВОДЫ

В работе получены аналитические решения упругопластических задач по гидроразрыву кернов горных пород с пробуренной цилиндрической или сферической полостью, нагруженной внутренним давлением. Кроме того, цилиндры нагружались внешним боковым давлением и осевым усилием. Основой этих решений являются зависимости давления разрыва от внешнего давления и предельного максимального пластического сдвига. Проведено сравнение аналитических решений с данными опытов, которое показало, что теоретический расчеты по критерию предельного пластического сдвига лучше согласуются с результатами опытов, чем критерии максимального нормального и касательного напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Khristianovitch S. A. and Zheltov Y. P.** About hydraulic fracturing of an oil plast, *Izvestia of the USSR Academy of Sciences, Department of Technical Sciences*, 1955, vol. 5, pp. 3–41. [**Христианович С. А., Желтов Ю. П.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // *Известия АН СССР. ОТН.* — 1955. — № 5. — С. 3–41.]
2. **Khristianovitch S. A. and Zheltov Y. P.** Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid fluids, Moscow, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1955, 34 pp. (Reports to the Fourth World Petroleum Congress in Rome). [**Христианович С. А., Желтов Ю. П.** Образование вертикальных трещин при помощи очень вязкой жидкости. — М.: Изд-во АН СССР. — 1955. — 34 с. (Докл. на IV Междунар. нефт. конгр., Рим, 6-15 июня 1955 г.)]
3. **Hubbert M. K. and Willis D. G.** *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. Trans., AIME, 1957, vol. 210, pp. 153–166.
4. **Nadai A.** *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York; Toronto and London, 1950, 648 pp. [**Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. — 648 с.]
5. **Failure.** *Mathematical Foundations of Failure Theory*, vol. 2, New York and London, Academic Press, 1968. [**Разрушение.** Математические основы теории разрушения. Т. 2. — М.: Мир, 1975. — С. 336–520.]
6. **Kurlenya M. V., Leont'ev A. V., and Popov S. N.** Development of Hydraulic Fracturing for Studying of the Stressed State of a Rock Mass, *Journal of Mining Science*, 1994, no. 1, pp. 3–20. [**Курленя М. В., Леонтьев А. В., Попов С. Н.** Развитие метода гидроразрыва для исследования напряженного состояния массива горных пород // *ФТПРПИ.* — 1994. — № 1. — С. 3–20.]
7. **Azarov A. V., Kurlenya M. V., Serdyukov S. V., and Patutin A. V.** Fracture development near the free surface in an isotropic poroelastic medium, *Journal of Mining Science*, 2019, no. 1, pp. 3–11. [**Азаров А. В., Курленя М. В., Сердюков С. В., Патутин А. В.** Особенности развития трещины гидроразрыва вблизи свободной поверхности в изотропной поропругой среде // *ФТПРПИ.* — 2019. — № 1. — С. 33–2011.]
8. **Azarov A. V., Serdyukov S. V., and Patutin A. V.** Investigation of the growth of a hydraulic fracture near a mine working, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 26–31. [**Азаров А. В., Сердюков С. В., Патутин А. В.** Исследование роста трещины гидроразрыва вблизи горной выработки // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 26–31.]
9. **Medlin W. L. and Masse L.** Laboratory Investigation of Fracture Initiation Pressure and Orientation, *J. Society of Petroleum Engineers*, 1979, vol. 19, no. 2, pp. 129–144.
10. **Usachev P. M.** *Hydraulic fracturing*, Moscow, Nedra, 1986, 165 pp. [**Усачев П. М.** Гидравлический разрыв пласта. — М.: Недра, 1986. — 165 с.]
11. **Economides M., Oligney R., and Valkó P.** *Unified Fracture Design. Bridging the Gap between Theory and Practice*, Alvin, Texas, Orsa Press, 2002, 236 pp. [**Экономидес М., Олайни Р., Валько П.** Унифицированный дизайн гидроаэрыва пласта. Теория и практика. — Алвин, шт. Техас: Орса Пресс. — 2002. — 236 с.]

12. **Kovrizhnykh A. M.** On the Loss of stability of Rock around Workings and Holes, *Journal of Mining Science*, 1990, no. 2, pp. 35–46. [**Коврижных А. М.** О потере устойчивости горных пород вокруг выработок и скважин // ФТПРПИ. — 1990. — № 2. — С. 35–46.]
13. **Kovrizhnykh A. M.** Deformation and Fracture of a Material in One-dimensional Problems, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Solid body mesanic*, 2012, no. 2, pp. 93–10. [**Коврижных А. М.** Деформирование и разрушение материала в одномерных упругопластических задачах // Изв. РАН. МТТ. — 2012. — № 2. — С. 93–101.]
14. **Kovrizhnykh A. M. and Kurlenya M. V.** Ultimate pressure determination in hydraulic fracturing of boreholes for different rock failure criteria, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 129–134. [**Коврижных А. М., Курленя М. В.** Определение предельных давлений при гидро-разрыве скважин для различных критериев разрушения горных пород // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 129–134.]