УДК 532.513+532.516
DOI: 10.15372/PMTF202415489

ВИНТОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИХ ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Представлен обзор работ, посвященных исследованию винтовых течений жидкости, в которых векторы скорости и вихря коллинеарны. Приводятся новые решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости и уравнений жидкости второго порядка, которые являются двумерными аналогами винтовых течений.

Ключевые слова: винтовые течения, метод дифференциальных связей, уравнения Навье — Стокса, жидкость второго порядка

1. Течения Громеки — Бельтрами. Пусть $\boldsymbol{u}(x,t)$ — трехмерный вектор, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — набор декартовых координат в пространстве $\mathbb{R}^3$, t — время. Ассоциируя вектор $\boldsymbol{u}$ с вектором скорости жидкости, будем называть винтовым течением жидкости такое течение, для которого выполняется соотношение

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

где $\alpha = \text{const}$.

Винтовые течения были открыты в 1881 г. И. С. Громекой [1] (см. также [2]) при изучении стационарных движений идеальной несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями Эйлера

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}\,\nabla p, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{2}$$

Здесь p — давление; $\rho = \text{const} > 0$ — плотность жидкости. Предполагается, что на жидкость не действует поле внешних сил или эти силы потенциальны (в последнем случае уравнения движения можно привести к виду (2) путем введения модифицированного давления). Тогда вследствие (1), (2) давление связано с полем скоростей соотношением

$$p + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})/2 = C \equiv \text{const}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) имеет вид интеграла Бернулли, справедливого для потенциальных стационарных движений идеальной жидкости, несмотря на то что исследуемое движение является вихревым при $\alpha \neq 0$. Применяя к соотношению (1) операцию rot, получаем векторное уравнение Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{u} + \alpha^2\boldsymbol{u} = 0. \tag{4}$$

В 1889 г. Э. Бельтрами независимо обнаружил винтовые течения идеальной жидкости [3]. Перевод работы [3] на английский язык опубликован в 1985 г. [4]. В зарубежной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00213).

литературе решения (1), (2) называются течениями Бельтрами, что не соответствует действительности. Будем называть решения переопределенной системы (1), (2) течениями Громеки — Бельтрами.

2. Решения Стеклова, Богоявленского и Галкина. Уравнения Навье — Стокса могут быть записаны в виде [5]

$$\boldsymbol{v}_t + \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})/2 - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = -\rho^{-1}\,\nabla p + \nu\,\Delta\boldsymbol{v}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Будем искать решения уравнений (5) для винтовых течений вязкой жидкости в виде $\boldsymbol{v} = f(t)\boldsymbol{u}$, где вектор $\boldsymbol{u}(x)$ удовлетворяет соотношению (1). Уравнения (5) справедливы, если положить

$$p + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})/2 = K(t), \tag{6}$$

где $K(t)$ — произвольная функция; функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению $f' + \alpha^2\nu f = 0$. При выводе этого уравнения учтено соотношение

$$\Delta\boldsymbol{v} + \alpha^2\boldsymbol{v} = 0, \tag{7}$$

вытекающее из (4). Таким образом, $f = \mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}$, что позволяет представить винтовые течения вязкой жидкости в виде (6) и

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}\,\boldsymbol{u}(x). \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{u}(x)$ — произвольное решение системы (1).

Решение (6), (8) получено в 1896 г. В. А. Стекловым [6]. В 1919 г. такое же решение было получено В. Тркалом [7].

Среди решений системы (1) имеются так называемые ABC-решения [8], в которых

$$u_1 = A\sin x_3 + C\cos x_2, \qquad u_2 = B\sin x_1 + A\cos x_3, \qquad u_3 = C\sin x_2 + B\cos x_1$$

(A, B, C — постоянные). В работе О. И. Богоявленского [9] найден широкий класс решений системы (1), обобщающий ABC-решения, и на его основе построено семейство точных решений уравнений Навье — Стокса, обладающих функциональным произволом:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}\iint\limits_{S^2}[\sin(\alpha\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) + \cos(\alpha\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k})]\,d\sigma,\\ p + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})/2 = K(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь интеграл берется по любой мере $d\sigma$ на двумерной единичной сфере S^2: $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k})$ — произвольное гладкое векторное поле, касательное к единичной сфере; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k} = 0$; $\alpha \ne 0$ — произвольный параметр. Для специального класса векторных полей $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k})$ и евклидовой меры $d\sigma$ решения (9) имеют солитоноподобные свойства и называются висконами [10, 11].

Если мера $d\sigma$ имеет вид $d\sigma = \delta(\boldsymbol{k}_1) + \ldots + \delta(\boldsymbol{k}_P)$, где δ — мера Дирака, из формулы (9) получаем точные решения

$$\boldsymbol{v}(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}\sum_{i=1}^{P}[\sin(\alpha\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}_i) + \cos(\alpha\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}_i)]. \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{k}_i = 1$; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{k}_i = 0$. Решения (9), как и решения (10), определены во всем пространстве. Если векторы $\boldsymbol{k}_i$ произвольны, то решение (10) является квазипериодической функцией координат. Это решение становится периодическим по переменным x_1, x_2, x_3 при специальном выборе векторов $\boldsymbol{k}_i$ и может иметь прямоугольную или косоугольную решетку периодов [10].

Новое семейство винтовых течений построил В. А. Галкин [12]. Выберем в качестве характерного масштаба длины величину α^{-1}, где α — коэффициент пропорциональности в соотношении (1), а в качестве масштаба времени величину $(\alpha^2\nu)^{-1}$. Область течения D может быть шаром B_R радиусом R, сферическим слоем $B_{R_1,R_2} = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 0 < R_1 < \|x\| < R_2\}$ либо совпадать с пространством $\mathbb{R}^3$. Границу шара B_R обозначим S_R. Пусть значения радиусов сфер S_R, являющихся границами шаровых областей D, удовлетворяют условиям

$$\operatorname{tg}(R) = R, \qquad R \geqslant 0. \tag{11}$$

Обозначим через ρ_k неотрицательные корни уравнения (11), которые упорядочим по возрастанию номеров $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_k < \ldots .$$

При $k \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho_k \approx -\pi/2 + k\pi, \qquad k \gg 1.$$

Положим

$$\bar{u}(r) = r^{-1}\sin(r), \quad r > 0, \qquad \bar{u}(r) = 1, \quad r = 0. \tag{12}$$

Определим для каждой точки $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ с евклидовой нормой $r(x) > 0$ трехпараметрическое семейство векторных полей, зависящее от произвольных параметров $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ и заданное формулами

$$U_a(x) = \left\{ \frac{\bar{u}'(r)}{r} \begin{bmatrix} x_2 & -2 & -x_3 \\ -x_1 & x_3 & -2 \\ -2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\left(\bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r}\right) \begin{bmatrix} x_1x_3 & -(x_2^2+x_3^2) & x_1x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_2 & -(x_1^2+x_3^2) \\ -(x_1^2+x_2^2) & x_1x_3 & x_2x_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

(x_1, x_2, x_3 — безразмерные декартовы координаты). Векторное поле $U_a(x)$ удовлетворяет соотношению (1) с $\alpha = 1$. Таким образом, построено новое семейство винтовых течений, зависящее от трех произвольных параметров a_1, a_2, a_3. Векторное поле $U_a(x)$ может быть продолжено в классе функций $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ в точку $x = 0$. Заметим, что в начале координат верно соотношение

$$\lim_{x\to 0} U_a(x) = U_a(0) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как показано в работе [12], векторное поле $U_a(x)$ является касательным в каждой точке x на сфере S_{ρ_k}, где ρ_k — корни уравнения (11), упорядоченные в порядке возрастания номеров $k \in \mathbb{N}$. Векторное поле $U_a(x)$, определенное на $\mathbb{R}^3$ формулами (13), (14), удовлетворяет следующим дифференциальным тождествам:

$$\operatorname{div} U_a = 0; \tag{15}$$

$$\Delta U_a + U_a = 0; \tag{16}$$

$$(U_a \cdot \nabla)U_a = \frac{1}{2}\nabla(U_a \cdot U_a). \tag{17}$$

Формулы (15)–(17) получены в результате применения указанных операторов к формулам (12)–(14). При обосновании формул (16), (17) учитывается, что функция $\bar{u}(r(x))$, определенная формулами (12), является собственной функцией трехмерного оператора Лапласа, т. е.

$$\Delta\bar{u}(r(x)) + \bar{u}(r(x)) = 0, \qquad r(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Сформулируем основной результат работы [12]. Определим векторное поле

$$V_a(x,t) = U_a(x)\,\mathrm{e}^{-t}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant 0, \tag{18}$$

где t — безразмерное время, и скалярную функцию (безразмерное давление)

$$P(x,t) = -(V_\alpha(x,t), V_\alpha(x,t))/2 + \beta(t), \tag{19}$$

где $\beta(t)$ — произвольная функция времени t. Тогда пара (V_α, P) является решением системы уравнений Навье — Стокса в области $D = \{x \in \mathbb{R}^3\}$. Более того, на границе S_{ρ_k} каждого шара $B_{\rho_k} = \{x \in \mathbb{R}^3\colon \|x\| < \rho_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ выполняются условия скольжения

$$(V_\alpha(x,t), \boldsymbol{n}(x)) = 0, \qquad x \in S_{\rho_k}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{n}(x)$ — вектор нормали к поверхности S_{ρ_k}. Это означает, что формулы (18), (19) являются решением системы уравнений Навье — Стокса с условием (20) в каждом шаре $D = B_{\rho_k}$ и сферическом слое $D = B_{\rho_k\rho_l}$, $1 \leqslant k < l \leqslant +\infty$. Векторное поле скоростей (18), рассматриваемое в области $D = \{x \in \mathbb{R}^3\}$ и сферических слоях $D = \mathbb{R}^3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$, стремится к нулю при $x \to \infty$.

Течения, описываемые решениями (18), (19), имеют слоистую, стратифицированную по сферическим слоям $B_{\rho_k\rho_l}$ структуру. Движение, описываемое этими решениями, является вихревым. В работе [12] приведена картина линий тока в таких течениях и изучены их инвариантные подмножества.

3. Двумерные аналоги винтовых течений. Запишем уравнения Навье — Стокса в случае плоского течения:

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y = -\rho^{-1}p_x + \nu\,\Delta u, \\ v_t + uv_x + vv_y = -\rho^{-1}p_y + \nu\,\Delta v, \\ u_x + v_y = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси x, y декартовой системы координат соответственно. Исключив из системы (21) функцию p путем перекрестного дифференцирования и введя функцию тока ψ с помощью соотношений

$$u = \psi_y, \qquad v = -\psi_x, \tag{22}$$

получаем уравнение для функции тока [5]

$$\frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial y} = \nu\,\Delta\Delta\psi. \tag{23}$$

Добавим к уравнению (23) дифференциальную связь

$$\Delta\psi = -c\psi, \tag{24}$$

где $c = \mathrm{const}$. Из условий совместности уравнений (23), (24) следует равенство

$$\psi_t = -c\nu\psi. \tag{25}$$

Уравнения (24), (25) для одной функции ψ образуют совместную систему. Решение этой системы имеет вид

$$\psi = \varphi(x,y)\,\mathrm{e}^{-c\nu t}, \tag{26}$$

где функция φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + c\varphi = 0. \tag{27}$$

Возвращаясь к уравнениям (21) и используя соотношения (22), (24), находим давление

$$p = K(t) - \rho(u^2 + v^2 + c\psi^2)/2. \tag{28}$$

Заметим, что при заданном поле скоростей функция тока определяется по формулам (22) с точностью до аддитивной функции времени. Это замечание справедливо и для давления. Фиксируя значение функции тока в некоторой точке области течения, можно однозначно определить давление из соотношения (28).

Решение (26) зависит от знака постоянной c. Если $c < 0$, то решение экспоненциально растет со временем. Такое решение не имеет физического смысла. Пусть $c > 0$. Введем обозначение $c = \alpha^2$ и запишем уравнение (27) в виде

$$\Delta\varphi + \alpha^2\varphi = 0. \tag{29}$$

При этом решение (26) принимает вид

$$\psi = \varphi(x, y)\, \mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}. \tag{30}$$

Можно провести аналогию решения (30) с решением Стеклова (8). Во-первых, зависимости обоих решений от времени одинаковы. Во-вторых, оба решения описываются в обозначениях уравнения Гельмгольца, однако в первом случае это уравнение является векторным (уравнение (7)), а во втором случае — скалярным (уравнение (29)). Различие состоит в использовании для давления разных формул: (9) и (28). Кроме того, в решениях, описывающих винтовые течения, имеется линейная связь между вектором скорости и ее вихрем (1), а в решениях, описывающих плоские течения, подобная зависимость (24) имеет место для функции тока и завихренности $\omega \equiv v_x - u_y = \Delta\psi$.

Следует отметить, что оба решения (8) и (30) могут быть получены методом дифференциальных связей [13].

Уравнение (29) допускает разделение переменных, что позволяет представить его решения в виде

$$\varphi = \cos(k_{x,i}x)\sin(k_{y,i}y).$$

Здесь $i \in \mathbb{N}$; $k_{x,i}^2 + k_{y,i}^2 = \alpha^2$. Более общим решением уравнения (29) является решение

$$\varphi = a_1\cos(k_{x,1}x)\sin(k_{y,1}y) + \ldots + a_n\cos(k_{x,n}x)\sin(k_{y,n}y), \tag{31}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные; n — произвольное натуральное число; $k_{x,i}^2 + k_{y,i}^2 = \alpha^2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. При специально выбранных волновых числах $k_{x,i}$ и $k_{y,i}$ решение (31) является периодической функцией x и y. В общем случае получаем почти периодическое решение уравнений Навье — Стокса по пространственным координатам. Если в уравнении (27) $c < 0$, то можно построить его решения вида (31), заменив функцию $\sin(k_{y,i}y)$ на $\operatorname{sh}(k_{y,i}y)$ и $\cos(k_{x,i}x)$ на $\operatorname{ch}(k_{x,i}x)$.

Заметим, что аналогичные (31) решения можно получить, если в качестве независимых переменных в уравнении (29) выбрать x и z, а также y и z. Заменяя в формулах (31) аргументы x и y на y и z, а затем на z и x, в силу (23), (30) получаем решения уравнения для функции тока в новых переменных. Суммируя полученные решения, получаем трехмерные течения вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим вращательно-симметричные решения уравнений Навье — Стокса. Далее r, z — цилиндрические координаты, v_r, v_z, v_φ — радиальная, осевая и окружная компоненты скорости соответственно. Искомые функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\Big),$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu\Big(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\Big),\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Big),\\
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{32}
$$

Последнее уравнение в (32) позволяет ввести функцию тока $\Psi(r,z,t)$, такую что

$$
v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{33}
$$

Исключая давление путем перекрестного дифференцирования первого и третьего уравнений системы (32) и переходя от функций v_r, v_z к функции тока по формулам (33), для функций Ψ и $w = rv_\varphi$ получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
(E\Psi)_t + r[\Psi_r(r^{-2}E\Psi)_z - \Psi_z(r^{-2}E\Psi)_r] = \nu E^2\Psi - r^{-2}(w^2)_z,\\
w_t + r^{-1}(\Psi_r w_z - \Psi_z w_r) = \nu E w,
\end{gathered} \tag{34}
$$

где E — оператор Стокса:

$$
E = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
$$

Вращательно-симметричные аналоги винтовых течений для уравнений Навье — Стокса детально исследованы в работе [14]. Ниже предлагается другой подход к их построению, основанный на методе дифференциальных связей.

Добавим к уравнениям (34) дифференциальную связь

$$
E\Psi = -c\Psi, \tag{35}
$$

где c — постоянная. Условие совместности переопределенной системы (34), (35) имеет вид

$$
(w^2 - c\Psi^2)_z = 0. \tag{36}
$$

Если $c < 0$, то система (34), (35) не имеет нетривиальных решений. В случае $c > 0$ введем обозначение $c = \alpha^2$. Функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$
E\Psi + \alpha^2\Psi = 0, \tag{37}
$$

для w получаем

$$
w = \alpha\Psi. \tag{38}
$$

(При интегрировании уравнения (35) использовалось естественное условие $w \to 0$ при $r \to 0$; кроме того, без потери общности можно считать $\alpha > 0$.)

В силу (34), (36) первое уравнение (34) принимает вид

$$
\Psi_t = -\alpha^2\nu\Psi. \tag{39}
$$

Функция (38) удовлетворяет второму уравнению (34). Из (37), (38) получаем

$$
\Psi = \varphi(r,z)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\nu t}, \tag{40}
$$

где функция φ является произвольным решением уравнения

$$
E\varphi + \alpha^2\varphi = 0. \tag{41}
$$

Таким образом, поле скоростей в рассматриваемом течении определяется по формулам (33) и $v_\varphi = \alpha r^{-1}\Psi$, где функция Ψ имеет вид (40); функция φ удовлетворяет уравнению (41). Выражение для давления записывается следующим образом:

$$p = K(t) - \rho(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)/2. \tag{42}$$

Если $K = \mathrm{const}$, то соотношение (42) принимает вид интеграла Бернулли, который связывает компоненты скорости и давление при потенциальном стационарном течении идеальной жидкости, несмотря на то что изучаемое течение является вихревым нестационарным движением вязкой жидкости. Имеет место аналогия между вращательно-симметричным течением, заданным равенствами (40)–(42), и винтовым течением вязкой жидкости с полем скоростей вида (8).

Следует отметить, что вращательно-симметричное движение, аналогичное винтовому течению, имеет три ненулевые компоненты скорости. Заметим также, что стационарные вращательно-симметричные движения идеальной жидкости (аналоги течений Громеки — Бельтрами) были изучены в работе [15]. В частности, рассмотрены такие течения в круглой трубе и во всем пространстве, описываемые уравнением (37). Следует отметить, что не любое гладкое решение уравнения (37) позволяет получить регулярное поле скоростей. Рассмотрим решение

$$\Psi = \alpha^{-1}\nu[(\alpha r)^2 + \cos(\alpha z)].$$

Этому решению соответствует поле скоростей

$$v_r = -\nu r^{-1}\sin(\alpha z), \quad v_z = 2\alpha\nu, \quad v_\varphi = \nu[\alpha^2 r + r^{-1}\cos(\alpha z)],$$

имеющее особенность на оси симметрии.

4. Винтовые течения жидкости второго порядка и их двумерные аналоги. Модель жидкости второго порядка, сформулированная в работе [16], характеризуется следующей зависимостью тензора напряжений P от кинематических параметров течения:

$$P = -pI + 2\rho\nu D + 2\rho\varkappa\Big(\frac{dD}{dt} + DW - WD\Big). \tag{43}$$

Здесь тензор скоростей деформаций D и тензор завихренности W — симметричная и антисимметричная составляющие тензора $\nabla\boldsymbol{v}$; $\varkappa = \mathrm{const} > 0$ — нормализованный коэффициент релаксационной вязкости; d/dt — оператор полного дифференцирования по времени:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla.$$

Уравнения жидкости второго порядка могут быть записаны в виде [17]

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} - \varkappa\,\Delta\boldsymbol{v}) + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} - \varkappa\,\Delta\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} = -\nabla\Big(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - \varkappa(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{v} + D : D)\Big) + \nu\,\Delta\boldsymbol{v},\\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.\end{gathered} \tag{44}$$

В работе [18] построены винтовые течения жидкости второго порядка, получаемые путем присоединения к системе (44) дифференциальной связи

$$\Delta\boldsymbol{v} = -\alpha^2\boldsymbol{v} \tag{45}$$

и исследования совместности переопределенной системы (44), (45). В результате имеем следующее представление решения этой системы:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\boldsymbol{u}(x), \qquad \Delta\boldsymbol{u} + \alpha^2\boldsymbol{u} = 0, \qquad \lambda = \frac{\alpha^2\nu}{1 + \varkappa\alpha^2},\\ p = -\rho\Big[\Big(\frac{1}{2} + \varkappa\alpha^2\Big)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \varkappa D : D\Big] + K(t).\end{gathered} \tag{46}$$

Если $\varkappa = 0$, то решение (46) переходит в решение Стеклова уравнений Навье — Стокса. В работе [18] приведены аналоги решений Богоявленского, описанных в п. **2**, для уравнений жидкости второго порядка. Отличие решений уравнений Навье — Стокса от решений (46) состоит в декременте затухания полей скорости и давления. Если в первом случае декремент затухания равен $\alpha^2\nu$, то во втором случае его зависимость от параметра α (третья формула (46)) более сложная. Заметим, что величина α^{-1}, обратная параметру α, является характерным масштабом длины в вихревых течениях. Случай больших α соответствует мелкомасштабным по пространственным координатам возмущениям. Предельный переход $\alpha \to \infty$ в выражении для λ приводит к равенству $\lambda_\infty = \varkappa^{-2}\nu$.

Рассмотрим плоские движения жидкости второго порядка. Уравнения импульса таких движений получаются путем подстановки в уравнение $\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \operatorname{div} P$ выражения (43) для тензора напряжений. Не представляя уравнения движения для компонент скорости u, v и давления, запишем уравнение для функции тока ψ

$$\frac{\partial\,(\Delta\psi - \varkappa\,\Delta^2\psi)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\Delta\psi, \psi)}{\partial\,(x, y)} = \nu\,\Delta^2\psi + \varkappa\,\frac{\partial\,(\Delta^2\psi, \psi)}{\partial\,(x, y)}, \tag{47}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x, y. Добавляя к уравнению (47) дифференциальную связь (24), получаем условие совместности данных уравнений

$$(1 + \varkappa c)\psi_t = \nu c\psi.$$

Отсюда следует

$$\psi = \varphi(x, y) \exp\,[-c\nu(1 + \varkappa c)^{-1}t], \tag{48}$$

где функция φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (27). Если коэффициент c в этом уравнении положителен: $c = \alpha^2$, то свойства плоского аналога винтового движения жидкости второго порядка почти такие же, как у обычной ньютоновской жидкости. Различия наблюдаются в формуле для давления, которая принимает вид

$$p = K(t) - \rho\{(u^2 + v^2 + c\psi^2)/2 + \varkappa\,[c(u^2 + v^2) + D : D]\},$$

и в выражении для показателя экспоненты в формуле (48). Предположим, что $c < 0$, $1 + \varkappa c > 0$. Тогда решение (48) экспоненциально увеличивается со временем. При этом функция φ может неограниченно возрастать при $x \to \infty$, $y \to \infty$, например, $\varphi = \nu \exp\,[2^{-1/2}\,|c|^{1/2}(x + y)]$.

Аналогичным образом строятся вращательно-симметричные решения уравнений жидкости второго порядка, где v_r, v_z заданы формулами (33); $v_\varphi = \alpha r^{-1}\Psi$; $\Psi = \varphi(r, z) \exp\,[-\alpha^2\nu(1 + \varkappa\alpha^2)^{-1}t]$; функция φ — произвольное решение уравнения (41). Выражение для давления имеет вид

$$p = K(t) - \rho[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}/2 + \varkappa(\alpha^2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + D : D)].$$

Последнее равенство является аналогом интеграла Бернулли для винтовых движений жидкости второго порядка.

Заключение. С помощью метода дифференциальных связей построены новые решения уравнений Навье — Стокса и уравнений жидкости второго порядка, которые являются двумерными аналогами решений, описывающих винтовые течения вязкой несжимаемой жидкости. Важным свойством винтовых течений и их аналогов является существование интеграла Бернулли, несмотря на то что движение непотенциально.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Громека И. С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Казань, 1881. (Учен. зап. Казан. ун-та; Кн. 3).
2. **Громека И. С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 76–148.
3. **Beltrami E.** Considerazioni idrodinamiche // Nuovo Cimento. Ser. 3. 1889. V. 25. P. 212–222.
4. **Beltrami E.** Considerations on hydrodynamics // Intern. J. Fusion Energy. 1985. V. 3, N 3. P. 53–57.
5. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Стеклов В. А.** Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1896. Т. 5. С. 101–124.
7. **Trkal V.** Poznanka k hydrodynamice vazkych tekutin // Cas. pestovani mat. fis. 1919. V. 48, N 5. P. 302–311.
8. **Arnold V. I.** Sur la topologie des ecoulements stationarres des fluids // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. V. 261. P. 17–20.
9. **Bogoyavlenskij O. I.** Exact solutions to the Navier — Stokes equations // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada. 2002. V. 24, N 4. P. 138–143.
10. **Bogoyavlenskij O. I.** Method of symmetry transforms for ideal MHD equations // The legacy of the inverse scattering in applied mathematics: Proc. AMS-IMS-SIAM res. conf., South Hadley (USA), 2001. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. P. 195–218. (Contemp. Math.; V. 301).
11. **Bogoyavlenskij O. I.** Exact unsteady solutions to the Navier — Stokes and viscous MHD equations // Phys. Lett. A. 2003. V. 307, N 5/6. P. 281–286.
12. **Галкин В. А.** Об одном классе точных решений системы Навье — Стокса в шаре и сферическом слое // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2023. Т. 63, № 6. С. 1000–1005.
13. **Сидоров А. Ф.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
14. **Ковалев В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б.** Получение примеров точных решений уравнений Навье — Стокса методом суммирования скоростей // Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.
15. **Васильев О. Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958.
16. **Rivlin R. S., Ericksen J. L.** Stress-deformation relations for isotropic materials // Arch. Ration. Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 323–425.
17. **Cioranescu D., Girault V.** Weak and classical solutions of a family of second grade fluids // Intern. J. Non-Linear Mech. 1997. V. 32, N 2. P. 317–335.
18. **Петрова А. Г., Пухначев В. В., Фроловская О. А.** Точные решения уравнений жидкости второго порядка // Тр. Мат. ин-та РАН. 2023. Т. 322. С. 180–194.

Поступила в редакцию 15/IV 2024 г.,
после доработки — 15/IV 2024 г.
Принята к публикации 27/IV 2024 г.