ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 6, № 1, 2019

УДК 539.374 DOI: 10.15372/FPVGN2019060142

# СОСТОЯНИЯ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

**А. И. Чанышев[1,2], И. М. Абдулин[1], И. В Гутарова[2], Л. Л. Ефименко[2], И. В. Фролова[2], О. А. Лукьяшко[1]**

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН*, E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
*Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*
[2]*Новосибирский государственный университет экономики и управления*
*ул. Каменская 52, г. Новосибирск 630099, Россия*

Для первоначально анизотропных сред строится теория пластичности, основанная на кратности собственных чисел. Если собственные числа простые, то условием пластичности такой среды является параллелепипед, причем положение на ребре параллелепипеда называется состоянием полной пластичности, положение на грани — состоянием неполной пластичности. Для иллюстрации этих состояний решается задача о вдавливании в первоначальную анизотропную среду с условием пластичности в виде параллелепипеда жесткого клина. Определяются предельная нагрузка и максимальная глубина проникания с заданной начальной скоростью движения бойка.

*Анизотропия, полная пластичность, неполная пластичность, жесткий клин, предельная нагрузка, глубина проникания*

# COMPLETE AND INCOMPLETE PLASTICITY STATES FOR INITIALLY ANISOTROPIC MEDIA

**A. I. Chanyshev[1,2], I. M. Abdulin[1], I. V. Gutarova[2], L. L. Efimenko[2], I. V. Frolova[2], and O. A. Lukyashko[1]**

[1]*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences*
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, *Krasny Prospect 54, 630091 Novosibirsk, Russia*
[2]*Novosibirsk State University of Economics and Management*
*ul. Kamenskaya, 52, Novosibirsk 630099, Russia*

For initially anisotropic media, a theory of plasticity based on the multiplicity of eigenvalues is constructed. If the eigenvalues are simple, then the condition of plasticity of such medium is a parallelepiped, and the position on the edge of the parallelepiped is called the state of complete plasticity, the position on the face is called the state of incomplete plasticity. To illustrate these states, the problem of forcing down a rigid wedge into the initial anisotropic medium with the condition of plasticity in the form of a parallelepiped is solved. The limit load and the maximum penetration depth with a given initial speed of the striker are determined.

*Anisotropy, complete plasticity, incomplete plasticity, rigid wedge, limit load, penetration depth*

В теории пластичности металлов основополагающими являются условия пластичности Треска и Мизеса [1–5]. Условие Треска в пространстве главных напряжений представляет собой шестигранную призму. При этом принимается ассоциированный закон распространения пластических деформаций [6–8]. Главный вопрос для упрочняющихся сред — как записать ассоциированный закон течения для ребра призмы Треска. То, что относится к грани призмы Треска, считается

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ (№ гос. регистрации АААА-А17-117122090002-5).

принадлежащим к состоянию неполной пластичности, к ребру — к состоянию полной пластичности [9 – 13]. Для упрочняющихся сред существуют различные схемы трансформации начальной поверхности пластичности Треска [14 – 16].

В предлагаемой работе для первоначально анизотропной среды естественным образом вводится условие, аналогичное призме Треска. Таким условием будет параллелепипед, для которого также имеются грани и ребра, т. е. существуют состояния полной и неполной пластичности. Задача — сформулировать уравнения пластичности (идеальной пластичности), с помощью которых решить задачу о внедрении жесткого клина в первоначально анизотропную среду.

### ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ (СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ)

Пусть $xOyz$ — прямоугольная декартова система координат, в которой деформация $\varepsilon_z = 0$ (плоская деформация), а деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ связаны с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ законом упругости вида:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = -a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \varepsilon_{xy} = a_{33}\tau_{xy}, \tag{1}$$

где $a_{ij}$ — податливости, $a_{ij} > 0$.

Для характеристики тензоров напряжений и деформаций вводится тензорный базис с ортами $T_1, T_2, T_3$. Пусть

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В базисе (2) закон Гука (1) имеет матричный вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\Omega_1 = \varepsilon_x, \quad \Omega_2 = \varepsilon_y, \quad \Omega_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{xy}, \ldots, \quad S_3 = \sqrt{2}\tau_{xy}$.

Собственными числами (3) являются

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_3 = a_{33}. \tag{4}$$

Собственные векторы (3) совпадают с

$$\vec{b}_1 = (\cos\beta, \sin\beta, 0), \ \vec{b}_2 = (\sin\beta, \cos\beta, 0), \ \vec{b}_3 = (0, 0, 1). \tag{5}$$

На основании (5) находятся собственные тензоры

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} \sin\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \tag{7}$$

В данной работе рассматривается случай, когда собственные числа в (4) все простые, т. е.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \tag{8}$$

Для справки, если обратиться к первоначально изотропной среде, то в ней

$$\lambda_1 = \lambda_3 > \lambda_2,$$

т. е. податливости среды в направлениях ортов $T_1$, $T_3$ максимальны и совпадают, причем вдоль второго направления связь упругая (второе направление, где податливость минимальна, совпадает с шаровым тензором).

Будем, как и в случае изотропной среды, считать, что $\lambda_2$ — минимальная по значению податливость и вдоль орта $T_2$ упругое деформирование сохраняется при упругопластических деформациях среды с условиями (8), другими словами, зависимость

$$\Omega_2 = \lambda_2 S_2 \tag{9}$$

остается справедливой как в упругости, так и в пластичности.

Исходя из (8), предполагаем, что при пластичном деформировании имеют место два критерия:

$$S_1 = \sigma_x \cos\beta - \sigma_y \sin\beta = \pm S_1^0, \tag{10}$$

$$S_3 = \sqrt{2}\tau_{xy} = \pm S_3^0, \tag{11}$$

где $S_1^0 > 0,\ S_3^0 > 0$ — пределы пластичности исходного материала в направлениях $T_1$ и $T_3$.

Рассмотрим пластическое состояние среды при условиях (10), (11). Найдем характеристики и соотношения на них при условии пластичности (10). Для этого имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

и условие пластичности (10). Подставляем в (12) (10). К полученным соотношениям добавляем выражения полных дифференциалов функций $\sigma_y, \tau_{xy}$:

$$d\sigma_y = \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy, \quad d\tau_{xy} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx + \frac{\partial\tau_y}{\partial y}dy. \tag{13}$$

Анализируя систему (12), (13), находим ее характеристики [1, 2]:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\mathrm{tg}\beta}, \tag{14}$$

соотношения на них

$$d\sigma_y + d\tau_{xy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{15}$$

Для определения смещений $u$ и $v$ в случае жесткопластического тела ($\lambda_3 = \lambda_2 = 0$) имеем следующие уравнения:

$$\Omega_2 = \varepsilon_x \sin\beta + \varepsilon_y \cos\beta = 0, \quad \Omega_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{xy} = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sin\beta + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

Добавляем сюда условие полных дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy. \tag{17}$$

Получаем, что характеристиками системы (16), (17) служат по-прежнему выражения (14), а соотношениями на них являются выражения

$$du + dv\frac{dy}{dx} = 0, \tag{18}$$

означающие то, что материал состоит из жестких блоков, которые не деформируются, а изменяются смещения соседних блоков.

Найдем теперь характеристики и соотношения на них при условии пластичности (11).

Подставляя (11) в уравнения равновесия (12), получаем характеристики

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const} \tag{19}$$

и соответствующие условия на них:

$$\begin{cases} x = \text{const}, & \sigma_y = \text{const}, \\ y = \text{const} & \sigma_x = \text{const}. \end{cases} \tag{20}$$

Если говорить о смещениях, то условия недеформируемости среды вдоль ортов $T_1$ и $T_2$

$$\Omega_1 = \varepsilon_x \cos\beta - \varepsilon_y \sin\beta = 0, \quad \varepsilon_x \sin\beta + \varepsilon_y \cos\beta = 0$$

приводят к выражениям $\varepsilon_x = 0,\ \varepsilon_y = 0$ или

$$\begin{cases} u = \text{const}, & y = \text{const}, \\ v = \text{const}, & x = \text{const}. \end{cases} \tag{21}$$

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ ЖЕСТКОГО КЛИНА В ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ С ПРОСТЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Данная ситуация представлена на рисунке. Имеется жесткий клин с раствором угла при вершине $2\gamma$. Предполагается, что в области *OBC* реализуется состояние (11), (20). На границе *OB* $\vec{n} = (-\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\vec{t} = (\sin\gamma, \cos\gamma)$ и вектор напряжений Коши равен

$$\vec{p}_n = (-\sigma_x \cos\gamma + \tau_{xy} \sin\gamma)\vec{i} + (-\tau_{xy} \cos\gamma + \sigma_y \cos\gamma)\vec{j},$$

поэтому

$$\tau_n = (\vec{p}_n \cdot \vec{t}) = -\tau_{xy} \cos 2\gamma - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma = 0, \tag{22}$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\gamma + \sigma_y \sin^2\gamma - \tau_{xy} \sin 2\gamma, \tag{23}$$

(полагаем, что на границе *OB* трение отсутствует).

В формулах (22), (23) в силу (11)

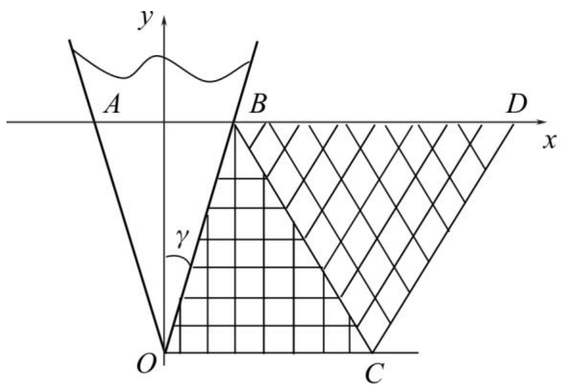
$$\tau_{xy} = \frac{S_3^0}{\sqrt{2}} > 0,$$

величина $\sigma_x$ определяется из (22)

$$\sigma_x = -2\tau_{xy} \operatorname{ctg} 2\gamma + \sigma_y, \tag{24}$$

при этом величину $\sigma_y$ будем в дальнейшем считать неизвестной (как и величину $\sigma_x$). Вдоль характеристик $y$ = const величина $\sigma_x$ из (24) переносится неизменной, так как $\sigma_x = f(y)$. Это означает, что слева от *BC* напряжение $\sigma_x$ определяется величиной:

$$\sigma_x = -\frac{2S_3^0}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} 2\gamma + \sigma_y. \tag{25}$$




Внедрение клина в анизотропную среду, в областях *OBC* и *CBD* реализуются состояния неполной пластичности, на отрезке *BC* — полной

Рассмотрим напряженное состояние в треугольнике *BCD*. В этом треугольнике в силу (14), (15)

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = -\frac{S_1^0}{\cos\beta}. \tag{26}$$

На границе *BC* $dy/dx = -\sqrt{\mathrm{tg}\beta}$ или $x\sqrt{\mathrm{tg}\beta} + y = \mathrm{const}$, т. е. нормаль к прямой *BC* имеет координаты:

$$\vec{n} = \frac{(\sqrt{\mathrm{tg}\,\beta}, 1)}{\sqrt{\mathrm{tg}\,\beta + 1}} = \left(\frac{\sqrt{\sin\beta}, \sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{\sin\beta + \cos\beta}}\right). \tag{27}$$

Векторы Коши слева и справа от *BC* должны совпадать, поэтому имеем следующие равенства

$$\left(-\frac{2S_3^0}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}2\gamma + \sigma_y\right)n_x + \frac{S_3^0}{\sqrt{2}}n_y = -\frac{S_1^0}{\cos\beta}n_x, \qquad \frac{S_3^0}{\sqrt{2}}n_x + \tilde{\sigma}_y n_y = 0, \tag{28}$$

где $\tilde{\sigma}_y$ — значение $\sigma_y$ на границе *BC*, не совпадающее со значением $\sigma_y$ на границе *OB*.

На основании (27), (28) находим $\sigma_y$ на *OB*:

$$\sigma_y = -\frac{S_1^0}{\cos\beta} - \frac{S_3^0}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{ctg}\beta} + \frac{2S_3^0}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}2\gamma. \tag{29}$$

Зная (29), найдем $\sigma_n$ на *OB* (используем для этого (23), (24), (11))

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\frac{S_3^0}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}2\gamma\cos^2\gamma - \frac{S_1^0}{\cos\beta} - \frac{S_3^0}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{ctg}\beta} + \frac{2S_3^0}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}2\gamma - \frac{S_3^0}{\sqrt{2}}\sin 2\gamma = \\ &= -\frac{S_1^0}{\cos\beta} + \frac{2S_3^0}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{ctg}2\gamma\sin^2\gamma - \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}\beta} + \sin 2\gamma}{2}\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

По величине $\sigma_n$ из (30) находим силу $\vec{F}$, действующую на *OB*. Пусть глубина погружения клина равняется *h*. Тогда величина *OB* равна

$$OB = \frac{h}{\cos\gamma}.$$

Сила $\vec{F}_{OB}$, приложенная к *OB*, равняется следующей величине

$$F_{OB} = OB \cdot \sigma_n.$$

Величина силы, приложенной к *AB* (сила направлена вертикально вниз), определяется формулой

$$F_{AB} = \frac{2OB \cdot \sigma_n}{\sin\gamma}.$$

Далее решается задача об определении максимальной глубины проникновения. Для этого интегрируется уравнение

$$m\ddot{y} = -F_{AB}$$

при начальном условии $\dot{y}\big|_{t=0} = -v_0$, находится значение *y*, при котором скорость $\dot{y}$ обращается в ноль. Приводятся зависимости максимальной глубины проникания от характеристик среды.

**ВЫВОДЫ**

Построена математическая модель упругопластического деформирования первоначально анизотропной среды в случае простых корней характеристического уравнения.

Решена задача о внедрении жесткого клина в первоначально анизотропную среду с простыми корнями характеристического уравнения.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES**

1. **Rabotnov Yu. N.** Mechanics of deformable solid body, Moscow, Nauka, 1988, pp. 712. (in Russian) [**Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.]
2. **Kachanov M. V.** Fundamentals of the theory of plasticity, Moscow, Nauka, 1969, 420 pp. (in Russian) [**Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.]
3. **Nadai A.** The plasticity and destruction of solids, Moscow, Mir, 1969, pp. 863. (in Russian) [**Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. — М.: Мир, 1969. — 863 с.]
4. **Prager V., Hodge F. G.** Theory of perfectly plastic bodies, Moscow, Inostrannaya literatura, 1956, 398 pp. (in Russian) [**Прагер В., Ходж Ф. Г.** Теория идеально пластических тел. — М.: Иностр. лит-ра, 1956. — 398 с.]
5. **Freudenthal A. M. and Geiringer H.** The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, Moscow, Fizmatgiz, 1962, 432 pp. (in Russian) [**Фрейденталь А. М., Гейрингер Х.** Математические теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.]
6. **Hill R.** Mathematical theory of plasticity, Moscow, Gostekhizdat, 1956, 408 pp. (in Russian) [**Хилл Р.** Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956. — 408 с.]
7. **Prager V.** Problems of plasticity theory, Moscow, GIFML, 1958, pp. 136. (in Russian) **[Прагер В.** Проблемы теории пластичности. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 136 с.]
8. **Koiter W. T.** Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, no. 3, pp. 350 – 354.
9. **Khristianovich S. A.** Deformation of hardening plastic material, Mechanics of Solids, 1974, no. 2, pp. 148 – 174. (in Russian) [**Христианович С. А.** Деформация упрочняющегося пластического материала // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 2. — С. 148 – 174.]
10. **Shemyakin E. I.** Anisotropy of plastic state, Numerical methods of continuum mechanics, 1973, vol. 4, no. 4, pp. 150 – 162. (in Russian) [**Шемякин Е. И.** Анизотропия пластического состояния // Численные методы механики сплошной среды. — 1973. — Т. 4. — № 4. — С. 150 – 162.]
11. **Annin B. D. and Zhigalkin V. M.** Behavior of materials under complex loading, Novosibirsk, Izd. SO RAN, 1999, 341 pp. (in Russian) **[Аннин Б. Д., Жигалкин В. М.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. — 341 с.]
12. **Kovrizhnykh A. M.** Plastic deformation of hardening materials under complex loading, Mechanics of Solids, 1986, no. 4, pp. 140 – 146. (in Russian) [**Коврижных А. М.** Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 4. — С. 140 – 146.]
13. **Revuzhenko A. F., Chanyshev A. I., and Shemyakin E. I.** Mathematical models of elastoplastic bodies, Actual problems of computational mathematics and mathematical modeling, Novosibirsk, Nauka, 1985, pp. 108 – 119. (in Russian) **[Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.** Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математические модели. — Новосибирск, 1985. — С. 108 – 119.]
14. **Knets I. V.** Basic modern trends in the mathematical theory of plasticity, Riga, Zinatne, 1971, pp. 147. (in Russian) **[Кнетс И. В.** Основные современные направления в математической теории пластичности. — Рига: Зинатне, 1971. — 147 с.]
15. **Sanders G.** Relations between stresses and strains in the plastic area, based on linear loading functions, Mechanics, Collection of translations, 1956, no. 3(37). pp. 99 – 109. (in Russian) [**Сандерс Дж.** Соотношения между напряжениями и деформациями в пластической области, основанные на линейных функциях нагружения // Механика: сб. переводов. — 1956. —№ 3(37). — С. 99 – 109.]
16. **Ishlinsky A. Yu.** General theory of plasticity with linear hardening, Ukrainian Mathematical Journal, 1954, no. 3, pp. 314 – 324. (in Russian) **[Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. — 1954. — № 3. — С. 314 – 324.]