

УДК 539.421

**ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕДРЕНИЮ КЛИНОВИДНОГО ИНСТРУМЕНТА
В ХРУПКИЙ ПОРОДНЫЙ МАССИВ С УЧЕТОМ РАВНОВЕСНОГО РАЗВИТИЯ
МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ**

Е. Н. Шер

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: ensher@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Разработана расчетная схема и программа численного решения в рамках упругой постановки трехмерной задачи определения сопротивления внедрению клиновидного инструмента в хрупкий породный массив с учетом развития магистральной трещины. Проведено тестирование разработанной программы. Подтверждена ее работоспособность сравнением с аналитическим решением задачи о равновесном развитии дисковой трещины в упругом пространстве при центральном ее нагружении давлением на круге ограниченного радиуса. Показано, что такое решение является хорошим приближением к результатам численных расчетов задачи о внедрении клина и может использоваться для оценки силы сопротивления внедрению клина в зависимости от его геометрических параметров, заглубления и характеристик среды.

Внедрение клина, горные породы, трехмерный расчет, сопротивление внедрению, коэффициент жесткости, магистральная трещина, форма трещины

DOI: 10.15372/FTPPI20210608

Ударное разрушение широко используется в существующих и перспективных технологиях горного производства: при отбойке полезных ископаемых (навесные молоты [1], экскаваторы с ковшами активного действия для открытых работ [2, 3] и динамические струги для подземных работ [4]), при ударно-вращательном способе бурения [5]. Актуальным для совершенствования таких технологий является разработка расчетных методов оценки разрушающего действия ударного органа механизмов на породный массив. К настоящему времени на основе анализа большого объема экспериментальных исследований [6] выявлена качественная картина процесса разрушения при ударе жесткого индентора по свободной границе твердой среды. Отмечается, что в начале внедрения индентора возле точки контакта происходит образование зоны пластического течения. В случае с острым коническим индентором [7–9] возникающая на оси внедрения в результате пластической деформации микротрещина перерастает в медианную трещину, находящуюся в плоскости симметрии. Дальнейшее увеличение нагрузки на индентор приводит к ее устойчивому росту. Аналогичная картина наблюдается и при внедрении клина

[10–12]. Его разрушающее действие подробно исследовано в плоской постановке задачи о взаимодействии клина и хрупкой горной породы в [13]. В этих работах с использованием аппарата механики трещин разработаны расчетные модели определения параметров развивающейся магистральной трещины при внедрении падающего массивного клина и динамики его движения. В [14] рассмотрена в трехмерной постановке задача о внедрении клина с ограниченной шириной лезвия в упругое полупространство нормально к его поверхности. Рассчитана форма образующейся плоской трещины, имеющая вид полуовала, описанного вокруг кромки внедряющегося клина. Аналогичный результат получен при экспериментальном моделировании на образцах из оргстекла. Для расчета движения инструмента горных машин с клиновидным индентером и развития магистральной трещины, определяющей разрушение в хрупкой горной породе, важное значение имеет коэффициент жесткости породы при внедрении клина. В работах по расчету динамики внедрения клина используется предположение, что сила F , препятствующая его внедрению, линейно зависит от значения внедрения h и определяется через коэффициент жесткости K соотношением $F = Kh$ [15–16]. В настоящей статье разработана расчетная схема внедрения клиновидного индентера в упругую среду, позволяющая определять зависимость коэффициента жесткости породы при внедрении клина от геометрических его параметров и механических свойств породы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РАССЧЕТНАЯ СХЕМА

На рис. 1 изображен схематично клин K шириной $2L$, с углом заострения 2α , внедрившийся в полупространство на глубину h . В результате внедрения клина в полупространстве образуется плоская трещина S в виде полуовала, расположенная в плоскости (x, y) . Расчет равновесного развития такой трещины проводится по программе, разработанной с использованием метода разрывных смещений [17]. Согласно этому методу, плоскость, в которой расположена трещина, разбивается на квадратные дислокационные элементы [18]. Элементы, находящиеся в области, ограниченной фронтом трещины, принимаются раскрытыми. Из условий симметрии задачи следует, что такое раскрытие определяется одной компонентой вектора Бюргерса D_z^i . Моделирование свободной поверхности в плоскости (x, z) проводится введением в этой плоскости трещины большого размера, свободной от нагружения ($abcd$ на рис. 1). Трещина также разбивается на квадратные дислокационные элементы с раскрытиями D_x^i, D_y^i, D_z^i . Изначально раскрытия дислокационных элементов неизвестны, они находятся из условия удовлетворения граничных условий задачи, задаваемых в напряжениях. Напряжения в упругом теле, вызванные раскрытием дислокационных элементов, определяются по формулам Пича – Келлера [19].

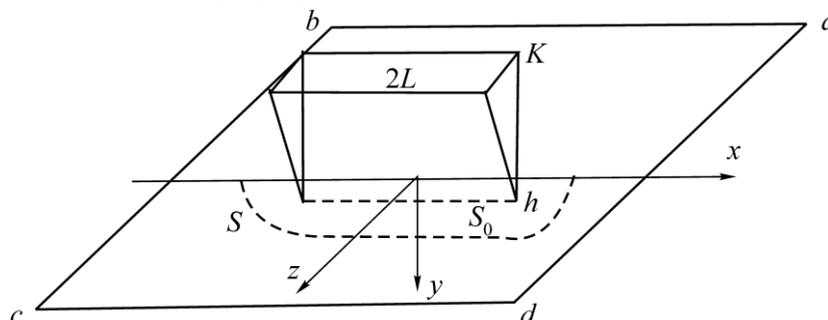


Рис. 1. Схема внедрения клина K в упругое нижнее полупространство с образованием в плоскости (x, y) магистральной полуовальной трещины S

Схема воздействия клина на упругое полупространство в плоскости (y, z) изображена на рис. 2а. Грани клина соприкасаются с берегами магистральной трещины на площадках, определяемых пластическим смятием в местах контакта. Такие площадки формируются на этапе пластического внедрения клина, которое приводит к раздвижению берегов образовавшейся трещины. В настоящей работе учитывается, что заглубление клина h значительно меньше вертикального размера ay магистральной трещины. Приближенно принимается следующее: развитие плоской магистральной трещины происходит под действием дислокационного раскрытия ее берегов на прямоугольном участке S_0 в плоскости (x, y) , примыкающем к свободной поверхности длиной $2L$ и шириной, равной глубине внедрения клина h (рис. 1). Раскрытие на этом участке принимается постоянным по его площади в отличие от схемы работы [14] и равным среднему раскрытию, определяемому геометрией внедряющегося клина: $D_z^0 = htg\alpha$. В [14] предполагалось, что раскрытие происходит под действием равномерно распределенного давления. Для уменьшения количества неизвестных трех компонент вектора Бюргерса на элементах трещины, моделирующей свободную поверхность, до одного D_y , исследовано симметричное относительно плоскости (x, z) раскрытие магистральной трещины в упругом пространстве при $y < 0$ (рис. 2б). Введенная степень симметрии задачи позволяет рассматривать развитие магистральной трещины только в первом квадранте плоскости (x, y) и учитывать влияние раскрытия трещины, моделирующей свободную поверхность по данным ее раскрытия в первом квадранте плоскости (x, z) .

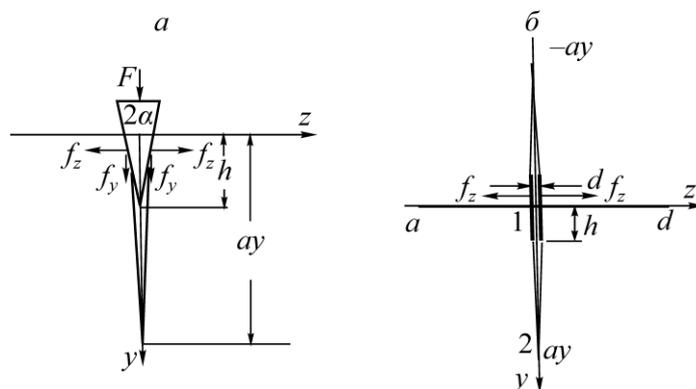


Рис. 2. Схема воздействия внедряющегося клина на упругое полупространство в плоскости (y, z) (а) и постановка задачи расчета развития трещины 2 при раскрытии дислокационной площадки 1, моделирующей внедрение клина с учетом свободной поверхности (б)

Расчет развития магистральной трещины проводится по шагам. На каждом шаге с увеличивающимся дислокационным раскрытием берегов трещины на участке $|y| < h$ от 0 до D_z^0 определяются растягивающие напряжения в элементах плоскости (x, y) , окружающих ее. Элементы, в которых напряжения превышают прочность среды на растяжение σ_C , считаются разрушенными и присоединяются к трещине. Фиксируется фронт развивающейся трещины и проводится расчет суммарной силы f_z , противодействующей дислокационному раскрытию берегов трещины на площадке $0 < x < L, 0 < y < h$, соответствующей внедрению клина.

Пример расчета формы трещины при внедрении клина в хрупкую среду в безразмерном виде, отнесенном к размеру дислокационных элементов, приведен на рис. 3а. Расчет сделан при следующих параметрах задачи: поперечный размер клина $2L = 2.8$ см, внедрение клина

$h = 0.3$ см, модуль Юнга среды $E = 3 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, критический коэффициент интенсивности напряжений среды $K_{IC} = 10^6$ Па \cdot м $^{1/2}$, размер дислокационных элементов $\Delta = 0.1$ см. Кривые 2–6 соответствуют значениям дислокационного раскрытия трещин на площадке внедрения клина (кривая 1): $D_z = 0.015, 0.026, 0.042, 0.081, 0.135$ см. Для таких значений раскрытия в соответствии с принятым условием, что $D_z^0 = htg\alpha$, имеем значения половины угла клина: $\alpha = 5, 8, 11, 15, 21^\circ$ при его внедрении на $h = 0.3$ см.

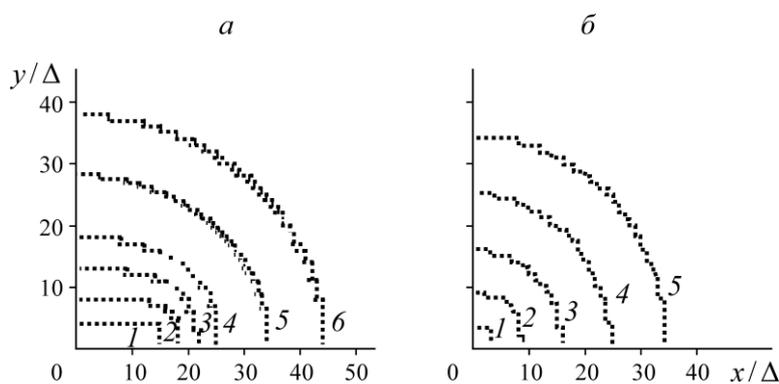


Рис. 3. Расчетные формы трещин, образующиеся: при внедрении клина (а); в упругом пространстве при раскрытии квадратной дислокационной площадки (б)

Для тестирования расчетной схемы проведен расчет задачи о развитии плоской трещины при расширении в упругом пространстве с модулем Юнга среды $E = 3 \cdot 10^9$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$, критическим коэффициентом интенсивности напряжений среды $K_{IC} = 5.32 \cdot 10^6$ Па \cdot м $^{1/2}$, размером дислокационных элементов $\Delta = 0.5$ см, дислокационной квадратной площадки размером 2×2 см, расположенной в начале координат в плоскости (x, y) . На рис. 3б в безразмерном виде изображены формы образующихся трещин в зависимости от значения раскрытия площадки (кривая 1). Кривые 2–5 соответствуют раскрытиям $D_z = 0.484, 1.4, 2.92, 4.48$ см. Из сравнения приведенных графиков видно, что формы трещин при большом их развитии близки к окружностям в обоих расчетах.

На рис. 4 кривыми 2, 5 с маркерами представлены рассчитанные по программе графики сил, обеспечивающих раскрытие площадки, и значения раскрытия в зависимости от вертикального размера трещины ay .

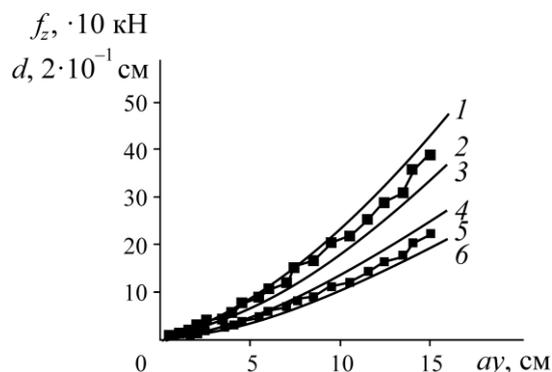


Рис. 4. Расчетная зависимость раздвигающей силы со стороны дислокационной площадки (кривые 1–3) и значения раскрытия от вертикального размера трещины (кривые 4–6)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ДИСКОВОЙ ТРЕЩИНЫ

Близким к решению задачи о развитии плоской трещины при расширении в упругом пространстве дислокационной квадратной площадки является решение задачи о равновесном развитии дисковой трещины при нагружении ее берегов давлением p на центральной круговой площадке радиусом a_0 , равной по площади квадратной дислокационной площадке. Для такой дисковой трещины радиусом a известно значение коэффициента интенсивности поля напряжений (КИН) возле ее кромки:

$$K_I = \frac{2p}{\sqrt{\pi a}} (a - \sqrt{a^2 - a_0^2}). \quad (1)$$

Это соотношение можно использовать для определения работы и объема раскрытия трещины на площадке нагружения при $r < a_0$. Согласно Ирвину, удельная энергия dW/dS , выделяющаяся при увеличении площади трещины S , связана с КИН соотношением

$$K_I^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{dW}{dS} = \frac{E}{2\pi a(1-\nu^2)} \frac{dW}{da},$$

здесь W — упругая энергия тела с трещиной. Отсюда для W получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{da} = \frac{8(1-\nu^2)p^2}{E} (a - \sqrt{a^2 - a_0^2})^2,$$

решением которого является выражение

$$W = \frac{8(1-\nu^2)p^2}{E} \left[\frac{2}{3} a^3 - a_0^2 a + \frac{2}{3} a_0^3 - \frac{2}{3} (a^2 - a_0^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (2)$$

При $a \gg a_0$

$$W = \frac{16(1-\nu^2)a_0^3 p^2}{3E}. \quad (3)$$

Учитывая, что $W = pV/2$, где V — объем трещины при $r < a_0$, можно рассчитать среднее раскрытие трещины на площадке нагружения ее берегов давлением p :

$$d = \frac{V}{\pi a_0^2} = \frac{2W}{\pi a_0^2 p}. \quad (4)$$

Давление p , соответствующее равновесному состоянию трещины радиусом a , определяется из (1) при $K_I = K_{IC}$:

$$p = \frac{K_{IC} \sqrt{\pi a}}{2(a - \sqrt{a^2 - a_0^2})}. \quad (5)$$

Используя (5), можно рассчитать значение силы, прикладываемой для раскрытия трещины в первом квадранте плоскости (x, y) $F = \pi a_0^2 p / 4$ (рис. 4 кривая 3). Видно, что аналитическая зависимость достаточно близка к расчетной, полученной при решении задачи о раскрытии дислокационной квадратной площадки. В расчетах графиков рис. 4 учитывалось соотношение, связывающее значение КИН с прочностью среды на разрыв, принимаемое в критерии Новожилова: $K_{IC} = \sigma_c \sqrt{\pi \Delta / 2}$.

По формулам (2), (4), (5) рассчитана аналитическая зависимость среднего раскрытия на круговой площадке радиусом a_0 от радиуса дисковой трещины (рис. 4, кривая 6). Отметим хорошее соответствие с расчетной зависимостью, отличие меньше 10 %.

Более простые зависимости получаются при выполнении условия $a \gg a_0$. В этом случае

$$F = \frac{K_{IC}(\pi a)^2}{4}, \quad d = \frac{AK_{IC}a^2}{\sqrt{S_0}}, \quad (6)$$

здесь $A = 32(1 - \nu^2)/(3E)$, $S_0 = \pi a_0^2$ — площадь круговой площадки.

Расчеты по формулам (6) для силы и значения раскрытия круговой площадки приведены на рис. 4 (кривые 1 и 4). Видно, что эти приближенные зависимости также близки к расчетным в задаче о раскрытии дислокационной квадратной площадки с $S_0 = 4 \text{ см}^2$, отличие меньше 10%.

Полученные аналитическим и расчетным методом результаты о близости значений сил, приложенных к дислокационным площадкам, и их раскрытия в зависимости от размеров образующейся трещины подтверждают работоспособность расчетной схемы и могут быть использованы для построения приближенных аналитических зависимостей силы, необходимой для раскрытия плоских дислокационных площадок разной формы в упругом теле от значения раскрытия. Подобные зависимости могут быть интересны как интерполяционные при экспериментальных исследованиях внедрения клиновидных инструментов в хрупкие породы и определении коэффициента жесткости пород в таком процессе.

По формулам (6) можно определить коэффициент жесткости упругой среды при развитии в ней дисковидной трещины путем нагружения ее давлением в пределах круговой площадки площадью $S_0 = \pi a_0^2$. Принимая за коэффициент жесткости $K_d = F/d$, имеем

$$K_d = \frac{\pi^2 \sqrt{S_0}}{4A}. \quad (7)$$

При принятых в расчетах значениях параметров среды (модуль Юнга $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$) и круговой площадки ($S_0 = 4 \text{ см}^2$) получаем $K = 8.605 \text{ МН/м}$. Из постоянства этой величины следует, что сила, необходимая для раскрытия давлением ограниченной круговой площадки площадью $S_0 = \pi a_0^2$, окруженной равновесной дисковой трещиной, пропорциональна ее раскрытию. Рассчитанная по программе зависимость силы от раскрытия квадратной дислокационной площадки также оказывается близкой к линейной (рис. 5, кривая, отмеченная ромбиками, для параметров расчета рис. 4). Аналитическая зависимость силы от раскрытия (кривая, отмеченная квадратиками), рассчитанная по формулам (6), практически совпадает с полученной численным расчетом.

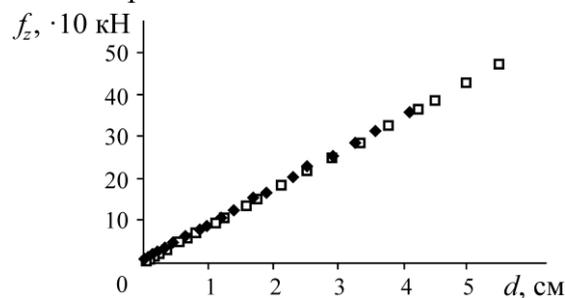


Рис. 5. Зависимости силы сопротивления раскрытию квадратной дислокационной площадки и круглой площадки от значения раскрытия

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчеты по формулам (6), (7) сопоставлены с данными численных расчетов внедрения клина, пример которых представлен на рис. 3. По разработанной программе определены параметры внедрения клиновидных инструментов с шириной лезвия $L = 1.4$ см на глубины $h = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ см. Так, для случая $h = 0.3$ см на рис. 6а приведены графики зависимости силы сопротивления раскрытию образующейся трещины f_z и значения ее раскрытия d на дислокационной площадке, моделирующей внедряющийся клин, от максимального вертикального размера трещины ay (кривые 2, 4). Даны зависимости силы раскрытия и ее значения от размера трещины, определенные по формулам (6) (кривые 1, 3). Видно, что приближенные зависимости (6) отличаются от расчетных не более чем на 13% и могут использоваться для оценочных расчетов. На рис. 6б приведены расчетные и аналитические зависимости силы сопротивления раскрытию трещины от значения ее раскрытия при разном заглублении клина h . Кривые 2, 4, 6, 8 соответствуют зависимостям $f_z(d)$, найденным численными расчетами при значениях $h = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ см; кривые 1, 3, 5, 7 построены с использованием (7). На графиках видно, что расчетные и аналитические зависимости $f_z(d)$ также отличаются не более чем на 12%. При этом расчетные зависимости $f_z(d)$ близки к линейным $f_z = K_r d$. Коэффициенты K_r вместе со значениями коэффициентов K_d аналитических зависимостей, определенных по (7) при разном заглублении клина h , приведены ниже:

$h, \text{ см}$	0.10	0.20	0.30	0.40
$K_r, \text{ кН/см}$	36.70	47.80	60.40	64.90
$K_d, \text{ кН/см}$	32.19	45.53	55.77	64.39
$\frac{K_r - K_d}{K_r}, \%$	12.00	5.00	7.70	0.80

По приведенным данным заметно хорошее соответствие расчетных и аналитических значений коэффициентов жесткости среды.

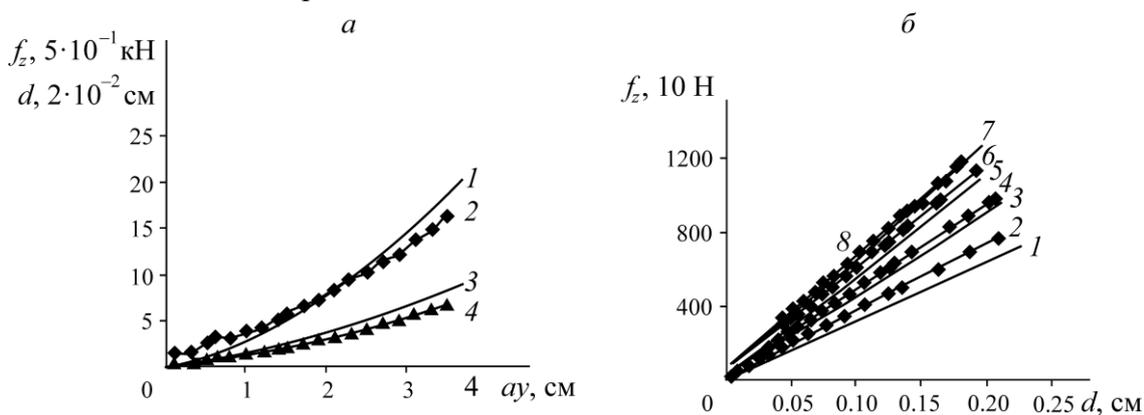


Рис. 6. Зависимость силы сопротивления раскрытию трещины f_z и значения ее раскрытия d от вертикального размера трещины ay (а); силы сопротивления раскрытию трещины f_z от значения ее раскрытия при разном заглублении клина (б)

Можно принять, что при разном заглублении h клина с шириной лезвия $2L$ для оценки расчетной зависимости силы сопротивления раскрытию образующейся трещины f_z от значения ее раскрытия $d = htg\alpha$ можно использовать зависимость, определяемую формулой (7), при этом для силы сопротивления имеем

$$f_z = K_d htg(\alpha), \quad K_d = \frac{\pi^{3/2} \sqrt{Lh}}{A}. \quad (8)$$

Здесь учтено, что в (7) $S_0 = 4Lh$ и сила сопротивления раскрытию трещины при внедрении клина в 2 раза больше, чем определенная для части дислокации, расположенной в первом квадранте плоскости $(x_2 y)$.

Полученный результат можно использовать для получения оценки зависимости силы сопротивления внедрению клина в хрупкую породу, сопровождающемуся равновесным развитием магистральной трещины. Известно, что в предположении взаимодействия граней клина с контактными площадками породы по закону сухого трения, сила сопротивления внедрению F (рис. 2а) выражается через компоненту контактных сил f_z и по формулам

$$F = 2f_z k(\alpha, \mu), \quad k(\alpha, \mu) = \frac{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu \sin(\alpha)}, \quad (9)$$

где α — половина угла заострения клина, μ — коэффициент трения клина о породу. С учетом (8) для аналитической оценки силы сопротивления внедрению клина имеем:

$$F_t = 2\pi^{3/2} tg(\alpha)k(\alpha, \mu)\sqrt{L} h^{3/2} / A. \quad (10)$$

Отсюда оценочное значение коэффициента жесткости среды при внедрении клина не является постоянной и имеет вид

$$K_t = \frac{dF_t}{dh} = 3\pi^{3/2} tg(\alpha)k(\alpha, \mu)\sqrt{Lh} / A. \quad (11)$$

Пример графиков зависимостей $F_t(h)$ приведен на рис. 7а (кривые 1–5) в соответствии с расчетами по (10) силы равновесного внедрения клина с углами $\alpha = 10, 15, 20, 25$ и 30° . Параметры среды и размер клина совпадают с принятыми при описании рис. 3.

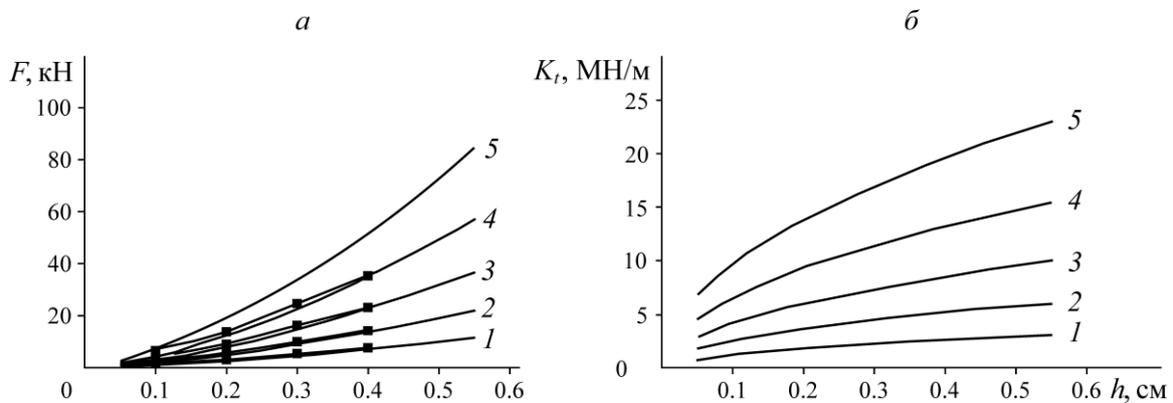


Рис. 7. Зависимость силы сопротивления внедрению клина (а) и коэффициента жесткости среды (б) от значения внедрения

Значения f_z , полученные численно по разработанной программе, также позволяют по формулам (9) рассчитать значения силы, требуемой для внедрения клина в зависимости от глубины внедрения $F_r(h)$. Результат таких расчетов приведен на рис. 7а квадратными маркерами. Видно хорошее соответствие полученных зависимостей $F_i(h)$ и $F_r(h)$. Это еще раз подтверждает возможность использования аналитических зависимостей (8), (10) при оценке сил, требуемых для внедрения клина.

Пример зависимости коэффициента жесткости среды при внедрении клина от глубины внедрения (11), соответствующий графикам рис. 7а, приведен на рис. 7б (кривые 1–5) для клина с углами $\alpha = 10, 15, 20, 25$ и 30° . Графики показывают, что расчетные значения коэффициента жесткости среды K при внедрении клина в упругое полупространство растут с размером заглубления h по закону $K_i \approx \sqrt{Lh}$.

Следует отметить, что зависимость коэффициента жесткости среды от заглубления клина в значительной мере определяется связью размера контактных площадок клина и среды с размером заглубления. В настоящей работе сделано предположение, что размер контактной площадки равен заглублению h или, что аналогично, пропорционален ему. Другой результат получается, если принять, что размер контактных площадок h_0 , сформировавшихся на начальном упругопластическом этапе заглубления клина, сохраняется при дальнейшем его внедрении и этапе роста магистральной трещины. В этом случае зависимости (8) изменяются: $K_d = \pi^{3/2} \sqrt{Lh_0} / A$. Кроме того, изменяется связь раскрытия площадок h_0 и заглубления клина h . Из усреднения раскрытия на ширине площадки h_0 следует $d = (2h - h_0) \operatorname{tg}(\alpha)$, в свою очередь

$$F_i = 2\pi^2 \operatorname{tg}(\alpha) k(\alpha, \mu) \sqrt{Lh_0} \frac{2h - h_0}{A},$$

$$K_i = 4\pi^2 \operatorname{tg}(\alpha) k(\alpha, \mu) \frac{\sqrt{Lh_0}}{A}.$$

В рассмотренном случае жесткость сопротивления внедрению клина постоянна в соответствии с предположением о его постоянстве в [15–16].

ВЫВОДЫ

Разработана программа численного определения сопротивления внедрению клиновидного инструмента в хрупкий породный массив с учетом равновесного развития магистральной трещины. Проведено тестирование разработанной программы сравнением результатов расчетов развития в упругом пространстве трещины, возникающей при дислокационном раскрытии квадратной площадки, с аналитическим решением задачи о равновесном развитии дисковой трещины, нагружаемой давлением, локализованным на начальной круговой области той же площади, что и квадратная площадка. Выявлено хорошее соответствие результатов.

Расчеты параметров внедрения клина показали, что полученное аналитическое решение является хорошим приближением к результатам численных расчетов и может использоваться для оценки силы сопротивления внедрению клина с учетом его геометрических параметров, заглубления и характеристик среды.

По результатам расчетов определены виды зависимости силы сопротивления среды внедрению клина от глубины его внедрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков Л. С., Котылев Ю. Е., Кравченко В. А. Гидравлические машины ударного действия. — М.: Машиностроение, 2000. — 415 с.
2. Безвзрывные технологии открытой добычи твердых полезных ископаемых / Маттис А. Р., Ческидов В. И., Лабутин В. Н. и др. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. — 335 с.
3. Городилов Л. В., Лабутин В. Н. Перспективы создания ковшей активного действия к гидравлическим строительным экскаваторам // Материалы V Междунар. науч. симп. “Ударно-вибрационные системы, машины и технологии”, 23–25 апреля 2013 г. — Орел: ОрелГТУ, 2013. — С. 112–119.
4. Горбунов В. Ф., Лазуткин А. Г., Ушаков Л. С. Импульсный гидропривод горных машин. — Новосибирск: Наука, 1986. — 195 с.
5. Крюков Г. М. Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании. — Т. 1. — М.: Горная книга, 2006. — 330 с.
6. Колесников Ю. В., Морозов Е. М. Механика контактного разрушения. — М.: ЛКИ, 2010. — 224 с.
7. Lawn B. R., Evans A. G., and Marshall D. B. Elastic / plastic in indentation damage in ceramics: the median/radial crack system, J. Amer. Ceram. Soc, 1980, Vol. 63, No. 9–10. — P. 574–581.
8. Lawn B. R. and Wilshav T. R. Indentation fracture: principles and application, J. Mater. Sci., 1975, Vol. 10, No. 6. — P. 1049–1081.
9. Lawn B. R. and Swain M. V. Microfracture beneath point indentation in brittle solids, J. Mater. Sci., 1975, Vol. 10, No. 1. — P. 113–122.
10. Maurer W. C. and Rinehart J. S. Impact crater formation in rock, J. Appl. Phys., 1960, Vol. 31, No. 7. — P. 1247.
11. Paul B. and Sikarskie D. A preliminary theory on static penetration by a ridge wedge into brittle rock material, Transaction of SME-AIME, Dec. 1965. — P. 372–383.
12. Башеев Г. В., Ефимов В. В., Мартынюк П. А. Расчетная модель разрушения горных пород клиновидным ударным инструментом // ФТПРПИ. — 1999. — № 5. — С. 53–61.
13. Башеев Г. В. Расчетная модель откола куска горной породы при ударе клином под уступ // ФТПРПИ. — 2004. — № 5. — С. 77–89.
14. Шер Е. Н., Ефимов В. П. Трехмерное моделирование развития трещины в твердом теле при введении жесткого клина // ФТПРПИ. — 2015. — № 6. — С. 43–48.
15. Reichmuth P. R. Correlation of force and displacement data with physical rock properties for percussive drilling systems, Proc. 5th Symp. on Rock Mech., NY, Pergamon Press, 1963. — P. 33–60.
16. Александров Е. В., Соколинский В. Б., Захариков Г. М. Исследование взаимодействия инструмента и горной породы при ударном разрушении. — М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1967. — 62 с.
17. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987. — 326 с.
18. Шер Е. Н., Михайлов А. М. Моделирование роста осесимметричных трещин при взрыве и гидро-разрыве вблизи свободной поверхности // ФТПРПИ. — 2008. — № 5. — С. 53–62.
19. Peach M. and Koehler J. S. The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them, Phys. Rev., 1950, Vol. 80, No. 3— С. 436–439.

Поступила в редакцию 27/IX 2021

После доработки 30/IX 2021

Принята к публикации 11/XI 2021