

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ  
АНГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Е. М. Крушкаль

(Новосибирск)

В работе получен критерий стохастической неустойчивости для многомерных ангармонических решеток.

Рассмотрим среду, описываемую нелинейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (0.1)$$

где  $u \equiv u(t, x, y, z)$ ,  $x, y, z$  — пространственные координаты,  $t$  — время,  $\lambda$  — коэффициент нелинейности.

Соответствующая уравнению (0.1) модель ангармонической решетки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{l, m, p}}{dt^2} = & u_{l+1, m, p} - 2u_{l, m, p} + u_{l-1, m, p} + \\ & + \beta [(u_{l+1, m, p} - u_{l, m, p})^3 - (u_{l, m, p} - u_{l-1, m, p})^3] + \\ & + \mu (u_{l, m+1, p} - 2u_{l, m, p} + u_{l, m-1, p}) + \\ & + \beta \mu [(u_{l, m+1, p} - u_{l, m, p})^3 - (u_{l, m, p} - u_{l, m-1, p})^3] + \\ & + \gamma (u_{l, m, p+1} - 2u_{l, m, p} + u_{l, m, p-1}) + \\ & + \beta \gamma [(u_{l, m, p+1} - u_{l, m, p})^3 - (u_{l, m, p} - u_{l, m, p-1})^3] \end{aligned} \quad (0.2)$$

где  $\beta = \lambda / 3$ .

При значениях коэффициентов

$$\mu = \gamma = 0$$

уравнение (0.1) описывает нелинейную струну, и исследованию его посвящено большое количество работ в связи с известной проблемой установления термодинамического равновесия и эргодичности в системе нелинейно связанных осцилляторов (см., например, [1-3] и библиографию к ним).

Ф. М. Израйлевым и Б. В. Чириковым [2] была получена оценка границы стохастической неустойчивости, разделяющей область квазипериодического движения и область стохастичности для цепочки нелинейно связанных гармонических осцилляторов в одномерном случае.

В данной работе этот результат обобщается для многомерных ангармонических решеток (двухмерной и трехмерной) при жестко закрепленных границах.

**1. Двухмерная решетка.** Полагаем в (0.2)  $\gamma = 0$  (третий индекс можно опустить). Пусть  $N_1, N_2$  — числа осцилляторов соответственно в направлениях  $x, y$ .

Перейдем к нормальным координатам

$$u_{l, m} = \frac{2}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} Q_{kr} \sin \frac{\pi l k}{N_1} \sin \frac{\pi m r}{N_2} \quad (1.1)$$

Для медленно меняющейся величины

$$Q_{kr}(t) = c_{kr}(t) \cos \theta_{kr}(t) \quad (1.2)$$

где  $c_{kr}$ ,  $\theta_{kr}$  — соответственно амплитуда и фаза нормального колебания, из (0.2) получим уравнение

$$\frac{d^2 Q_{kr}}{dt^2} + \omega_{kr}^2 Q_{kr} (1 - A Q_{kr}^2) = \frac{\beta}{16 N_1 N_2} \sum_{m,n} F_{km, rn} \cos \theta_{km, rn} \quad (1.3)$$

( $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, r = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ ) где

$$A \approx \frac{3\beta}{8 N_1 N_2 \omega_{kr}^2} [\omega_{k0}^4 (2 - \omega_{k0}^2) + \mu \omega_{0r}^4 (2 - \omega_{0r}^2)]$$

$$\omega_{kr} = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi k}{2 N_1} + \mu \sin^2 \frac{\pi r}{2 N_2} \right)^{1/2}$$

$$\omega_{k0} = 2 \sin \frac{\pi k}{2 N_1}, \quad \omega_{0r} = 2 \sin \frac{\pi r}{2 N_2}$$

$F_{km, rn}$  — амплитуды внешних сил, действующих на осциллятор с частотой  $\omega_{km, rn}(t)$ . Не будем выписывать правую часть (1.3) явно в силу ее громоздкости, а проанализируем ниже ряд предельных случаев.

Критерий стохастичности, определяемый из условия перекрытия резонансов<sup>1</sup>, имеет вид

$$\kappa \sim |\psi_{km, rn}| (\Delta\omega)^{-1} \sim 1 \quad (1.4)$$

где

$$|\psi_{km, rn}| \approx \sqrt{\frac{\beta F_{km, rn}}{8 N_1 N_2 \omega_{kr}} \frac{d\Omega_{km, rn}}{dc_{kr}}} \quad (1.5)$$

характеризует размер сепаратрисы на фазовой плоскости

$$\Omega_{km, rn} = \omega_{km, rn}(t) - \omega_{kr}(t)$$

$\Delta\omega$  — расстояние между резонансами.

*Возбуждение низких мод* ( $k \ll N_1, r \ll N_2$ ). В этом случае частоты нормальных колебаний

$$\omega_{kr} \approx \pi \left[ \frac{k^2}{N_1^2} + \mu \frac{r^2}{N_2^2} \right]^{1/2} \quad (1.6)$$

Пусть  $k, r$  — средние номера возбужденных мод соответственно в интервалах  $\Delta k, \Delta r$ ;  $N_b$  — число возбужденных мод

$$N_b \sim \Delta k \Delta r \quad (1.7)$$

Подсчитаем количество невырожденных резонансовых соотношений  $N_p$  в правой части (1.3) типа

$$\sum_{i=1}^4 n_i \omega_i = 0 \quad (1.8)$$

где  $n_i$  — целые, взаимно простые числа (напомним, что член с кубической нелинейностью в (0.2) обуславливает четырехкратное взаимодействие). При этом нужно учесть, что в рассматриваемом пределе для осцилляторов, лежащих на одной прямой, которая проходит через начало координат

<sup>1</sup> Б. В. Ч и р и к о в Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Док. дисс. ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.

нат, получаются линейные соотношения относительно их номеров согласно (1.6), (1.8), как в одномерном случае. Поэтому число независимых резонансных соотношений (1.8) уменьшается за счет вырождения по сравнению с числом возможных резонансов в системе.

В результате имеем

$$N_p = 8C_{N_b-1}^3 - N_0 + N_l \quad (1.9)$$

где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  и введены обозначения

$$N_0 = 8C_{a-1}^3, \quad N_l = a/2 \quad (a = \min(\Delta k, \Delta r)) \quad (1.10)$$

Множитель  $1/2$  в выражении для  $N_l$  в (1.10) учитывает наличие симметрии взаимодействия при кубической нелинейности в вырожденном случае аналогично одномерному случаю. Заметим также, что с учетом этого обстоятельства эффект вырождения нужно учитывать лишь, если  $a \geq 8$ , так как только в этом случае возможна соответствующая комбинация частот в (1.8).

Оценим величину средней силы  $\langle F \rangle$ , действующей на осциллятор с номером  $kr$  со стороны ближайшего резонанса. Согласно (1.3) и (1.9) и с учетом случайности фаз имеем

$$\langle F \rangle \sim \beta \frac{F_{km, rn}}{16N_1N_2} \sim \frac{\pi^4 (8C_{N_b-1}^3)^{1/2} \beta \langle c^3 \rangle}{N_1N_2 (N_p)^{1/2}} \left( \frac{k^4}{N_1^4} + \mu \frac{r^4}{N_2^4} \right) \quad (1.11)$$

где  $\langle c^3 \rangle$  — средняя комбинация амплитуд в области возбужденных мод. Поправка к частоте  $\omega_{kr}$  за счет нелинейности равна

$$\Omega_{km, rn} \sim 9 \left[ 32N_1N_2 \left( \frac{k^2}{N_1^2} + \mu \frac{r^2}{N_2^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} \beta \left( \frac{k^4}{N_1^4} + \mu \frac{r^4}{N_2^4} \right) \langle c^2 \rangle \quad (1.12)$$

Среднее расстояние между резонансами можно оценить как интервалы между векторами частот в области возбужденных мод

$$|\omega_{k-\Delta k/2, r-\Delta r/2}| \leq |\omega_{kr}| \leq |\omega_{k+\Delta k/2, r+\Delta r/2}|$$

занимаемой  $N_p$  резонансами, из (1.6) и (1.9)

$$\Delta \omega \sim \frac{\pi}{N_p} \left[ \left( \frac{k\Delta k}{N_1^2} \right)^2 + \mu \left( \frac{r\Delta r}{N_2^2} \right)^2 \right]^{1/2} \left( \frac{k^2}{N_1^2} + \mu \frac{r^2}{N_2^2} \right)^{-1/2} \quad (1.13)$$

Из (1.4) с учетом (1.2) получим оценку максимальной величины

$$u_{\max}^2 = 4 \langle u \rangle^2 \sim 2 \langle c^2 \rangle \Delta k \Delta r (N_1N_2)^{-1} \quad (1.14)$$

Введем обозначения

$$\Phi_2 \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{N_1^2} + \mu \frac{r^2}{N_2^2} \right) u_{\max}^2 \quad (1.15)$$

$$\sigma_1 = \frac{rN_1}{kN_2}, \quad \Delta \sigma_1 = \frac{r\Delta r N_1^2}{k\Delta k N_2^2} \quad (1.16)$$

Определяя величину  $\beta_*$  из условия (1.4) с учетом (1.5), (1.11) — (1.13), получим следующую оценку границы стохастичности:

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{2(1 + \mu\sigma_1^2) [1 + \mu(\Delta\sigma_1)^2]^{1/2} (\Delta k)^2 \Delta r}{k(1 + \mu\sigma_1^4) [8C_{N_b-1}^3 (N_p)^3]^{1/4}} \quad (1.17)$$

При  $\Delta k, \Delta r \gg 1$  имеем

$$8C_{N_0-1}^3 \sim (\Delta k)^3 (\Delta r)^3, \quad 8C_{N_0-1}^3 \gg N_0 \gg N_1$$

и (1.17) примет вид

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{4(1 + \mu \sigma_1^2)(1 + \mu \Delta \sigma_1^2)^{1/2}}{3k(1 + \mu \sigma_1^4) \Delta k (\Delta r)^2}$$

При  $\mu \rightarrow 0$  область возбужденных мод стягивается к прямой на оси  $x$

$$8C_{N_0-1}^3 \sim (\Delta k)^3, \quad N_0 \sim (\Delta k)^3, \quad N_1 \sim \Delta k / 2$$

$$\Phi_2 \rightarrow \Phi_1 \equiv (\partial u / \partial x)^2$$

так что

$$\beta_* \Phi_1 \sim k^{-1} (\Delta k)^{1/2}$$

соответственно оценке, полученной в [2] для одномерного случая.

*Возбуждение высших мод* ( $k \approx N_1, r \approx N_2$ ). В этом случае резонансные частоты равны

$$\omega_{km, rn} \approx 2 \left[ \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} \frac{\sqrt{(k-N_1)^2 + 2m}}{2N_1} + \mu \cos^2 \frac{\pi}{2N_2} \frac{\sqrt{(r-N_2)^2 + 2n}}{2N_2} \right]$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Среднее расстояние между [ближайшими резонансами в первом приближении

$$\Delta \omega_{\pm} = \omega_{k, m \pm 1, r, n \pm 1} - \omega_{km, rn} \approx \frac{\pi^2}{2(1 + \mu)^{1/2}} \left| \frac{1}{N_1^2} \pm \frac{\mu}{N_2^2} \right| \quad (1.18)$$

Поправка следующего порядка дает расстояние между резонансами тонкой структуры

$$\Delta \omega_1 \sim (\pi / N)^4 \quad \text{при } N_1 = N_2 = N$$

но, как легко видеть, в рассматриваемом пределе ( $\Delta k \ll N_1, \Delta r \ll N_2$ ) полного перекрытия этой системы резонансов не происходит, так что при  $N_1 \approx N_2 \approx N, \mu \approx 1$  в (1.18) следует брать верхний знак в связи с дополнительным вырождением.

С учетом (1.3), (1.4), (1.14) — (1.16) получим оценку границы стохастичности (при  $\Delta \omega_- \gg \Delta \omega_1$ )

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{2\pi^2 k^2 (1 + \mu \sigma_1^2) \Delta k \Delta r}{(1 + \mu)^{1/2} N_1^2} \left| \frac{1}{N_1^2} - \mu \frac{1}{N_2^2} \right| \quad (1.19)$$

При  $N_1 \sim N_2 \sim N, \mu \sim 1$  имеем

$$\Delta \omega_+ \gg \Delta \omega_1 \sim \Delta \omega_- \quad (1.20)$$

$$\beta_* \Phi_2 \sim 8/3\pi^2 \Delta k \Delta r (k^2 + r^2) / N^4$$

При  $\mu \rightarrow 0$  (для одномерного случая) (1.19), (1.20) переходят в

$$\beta_* \Phi_1 \sim \pi^2 k^2 \Delta k / N^4$$

в согласии с результатом работы [2].

*Смешанный случай* ( $k \approx N_1, r \ll N_2$ ). Пусть возбуждены высшие моды по одному направлению и низшие по другому. Резонансные частоты равны

$$\omega_{km, rn} \approx 2 \left[ \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} \frac{\sqrt{(k-N_1)^2 + 2m}}{2N_1} + \mu \sin^2 \frac{\pi}{2N_2} \frac{\sqrt{r^2 + 2n}}{2N_2} \right]^{1/2}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Тогда оценка границы стохастичности совпадает с выражениями (1.19), (1.20), т. е. определяется наличием высоких мод.

**2. Трехмерная решетка.** Пользуясь результатами п. 1, нетрудно получить оценки и для трехмерного случая.

Разложение по нормальным колебаниям теперь имеет вид

$$u_{l, m, p} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{N_1 N_2 N_3}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} \sum_{s=1}^{N_3-1} Q_{krs} \sin \frac{\pi l k}{N_1} \sin \frac{\pi m r}{N_2} \sin \frac{\pi p s}{N_3}$$

где  $N_1, N_2, N_3$  — числа осцилляторов решетки соответственно в направлениях  $x, y, z$ .

Число возбужденных мод в интервалах  $\Delta k, \Delta r, \Delta s$

$$N_b \sim \Delta k \Delta r \Delta s \tag{2.1}$$

Частоты нормальных колебаний

$$\omega_{krs} = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi k}{2N_1} + \mu \sin^2 \frac{\pi r}{2N_2} + \gamma \sin^2 \frac{\pi s}{2N_3} \right)^{1/2}$$

( $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1; r = 1, 2, \dots, N_2 - 1; s = 1, 2, \dots, N_3 - 1$ )

Для  $N_p$  можно по-прежнему использовать выражение (1.9) с учетом того, что теперь

$$a = \min (\Delta k, \Delta r, \Delta s)$$

а область возбужденных мод определяется (2.1).

Введем обозначения

$$\Phi_3 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{N_1^2} + \mu \frac{r^2}{N_2^2} + \gamma \frac{s^2}{N_3^2} \right) u_{\max}^2$$

где

$$u_{\max}^2 \sim \frac{2 \langle c^2 \rangle N_b}{N_1 N_2 N_3}, \quad \sigma_1 = \frac{r N_1}{k N_2}, \quad \sigma_2 = \frac{s N_1}{k N_3}$$

$$\Delta \sigma_1 = \frac{r \Delta r N_1^2}{k \Delta k N_2^2}, \quad \Delta \sigma_2 = \frac{s \Delta s N_1^2}{k \Delta k N_3^2}$$

Тогда оценки границ стохастичности получим в следующем виде: Низшие моды ( $k \ll N_1, r \ll N_2, s \ll N_3$ )

$$\beta_* \Phi_3 \sim \frac{4 (1 + \mu \sigma_1^2 + \gamma \sigma_2^2) [1 + \mu (\Delta \sigma_1)^2 + \gamma (\Delta \sigma_2)^2]^{1/2} (\Delta k)^2 \Delta r \Delta s}{k (1 + \mu \sigma_1^4 + \gamma \sigma_2^4) [8 C_{N_b-1}^3 (N_p)^3]^{1/4}} \tag{2.2}$$

при  $\Delta k, \Delta r, \Delta s \gg 1$  (2.2) примет вид

$$\beta_* \Phi_3 \sim \frac{3 (1 + \mu \sigma_1^2 + \gamma \sigma_2^2) [1 + \mu (\Delta \sigma_1)^2 + \gamma (\Delta \sigma_2)^2]^{1/2}}{k (1 + \mu \sigma_1^4 + \gamma \sigma_2^4) \Delta k (\Delta r)^2 (\Delta s)^2}$$

высшие моды ( $k \approx N_1, r \approx N_2, s \approx N_3$ )

$$\beta_* \Phi_3 \sim 4 \pi^2 \frac{k^2 (1 + \mu \sigma_1^2 + \gamma \sigma_2^2) \Delta k \Delta r \Delta s}{N_1^2 (1 + \mu + \gamma)^{1/2}} \left| \frac{1}{N_1^2} \pm \frac{\mu}{N_2^2} \mp \frac{\gamma}{N_3^2} \right| \tag{2.3}$$

Знаки в (2.3) выбираются так, чтобы получилось минимальное выражение, что соответствует ближайшему расстоянию между резонансами. Оценкой (2.3) нельзя пользоваться при  $N_1 \approx N_2 \approx N, \gamma \approx 1 - \mu$ . Для последнего случая с учетом замечания к формуле (1.18) имеем

$$\beta_* \Phi_3 \sim \frac{17}{3} \frac{\pi^2 \Delta k \Delta r \Delta s}{N^4} (k^2 + r^2 + s^2) \tag{2.4}$$

