ПМТФ, № 6, 1972

УДК 531.011

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Е. М. Крушкаль

(Новосибирск)

В работе получен критерий стохастической неустойчивости для многомерных ангармонических решеток.

Рассмотрим среду, описываемую нелинейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \tag{0.1}$$

где $u \equiv u\,(t, x, y, z)$, x, y, z — пространственные координаты, t — время, λ — коэффициент нелинейности.

Соответствующая уравнению (0.1) модель ангармонической решетки имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d^2 u_{l,m,p}}{dt^2} = u_{l+1,m,p} - 2u_{l,m,p} + u_{l-1,m,p} + \\ + \beta\,[(u_{l+1,m,p} - u_{l,m,p})^3 - (u_{l,m,p} - u_{l-1,m,p})^3] + \\ + \mu\,(u_{l,m+1,p} - 2u_{l,m,p} + u_{l,m-1,p}) + \\ + \beta\mu\,[(u_{l,m+1,p} - u_{l,m,p})^3 - (u_{l,m,p} - u_{l,m-1,p})^3] + \\ + \gamma\,(u_{l,m,p+1} - 2u_{l,m,p} + u_{l,m,p-1}) + \\ + \beta\gamma\,[(u_{l,m,p+1} - u_{l,m,p})^3 - (u_{l,m,p} - u_{l,m,p-1})^3]\end{gathered} \tag{0.2}$$

где $\beta = \lambda / 3$.

При значениях коэффициентов

$$\mu = \gamma = 0$$

уравнение (0.1) описывает нелинейную струну, и исследованию его посвящено большое количество работ в связи с известной проблемой установления термодинамического равновесия и эргодичности в системе нелинейно связанных осцилляторов (см., например, [1-3] и библиографию к ним).

Ф. М. Израйлевым и Б. В. Чириковым [2] была получена оценка границы стохастической неустойчивости, разделяющей область квазипериодического движения и область стохастичности для цепочки нелинейно связанных гармонических осцилляторов в одномерном случае.

В данной работе этот результат обобщается для многомерных ангармонических решеток (двухмерной и трехмерной) при жестко закрепленных границах.

1. Двухмерная решетка. Полагаем в (0.2) $\gamma = 0$ (третий индекс можно опустить). Пусть N_1, N_2 — числа осцилляторов соответственно в направлениях x, y.

Перейдем к нормальным координатам

$$u_{l,m} = \frac{2}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} Q_{kr} \sin\frac{\pi l k}{N_1} \sin\frac{\pi m r}{N_2} \tag{1.1}$$

Для медленно меняющейся величины

$$Q_{kr}(t) = c_{kr}(t)\cos\theta_{kr}(t) \tag{1.2}$$

где c_{kr}, θ_{kr} — соответственно амплитуда и фаза нормального колебания, из (0.2) получим уравнение

$$\frac{d^2Q_{kr}}{dt^2} + \omega_{kr}^2 Q_{kr}(1 - AQ_{kr}^2) = \frac{\beta}{16N_1N_2}\sum_{m,n} F_{km,rn}\cos\theta_{km,rn} \tag{1.3}$$

($k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, $r = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$) где

$$A \approx \frac{3\beta}{8N_1N_2\omega_{kr}^2}\left[\omega_{k0}^4(2-\omega_{k0}^2) + \mu\omega_{0r}^4(2-\omega_{0r}^2)\right]$$

$$\omega_{kr} = 2\left(\sin^2\frac{\pi k}{2N_1} + \mu\sin^2\frac{\pi r}{2N_2}\right)^{1/2}$$

$$\omega_{k0} = 2\sin\frac{\pi k}{2N_1}, \quad \omega_{0r} = 2\sin\frac{\pi r}{2N_2}$$

$F_{km,rn}$ — амплитуды внешних сил, действующих на осциллятор с частотой $\omega_{km,rn}(t)$. Не будем выписывать правую часть (1.3) явно в силу ее громоздкости, а проанализируем ниже ряд предельных случаев.

Критерий стохастичности, определяемый из условия перекрытия резонансов[1], имеет вид

$$\varkappa \sim |\dot\psi_{km,rn}|(\Delta\omega)^{-1} \sim 1 \tag{1.4}$$

где

$$|\dot\psi_{km,rn}| \approx \sqrt{\frac{\beta F_{km,rn}}{8N_1N_2\omega_{kr}}\frac{d\Omega_{km,rn}}{dc_{kr}}} \tag{1.5}$$

характеризует размер сепаратрисы на фазовой плоскости

$$\Omega_{km,rn} = \omega_{km,rn}(t) - \omega_{kr}(t)$$

$\Delta\omega$ — расстояние между резонансами.

Возбуждение низких мод ($k \ll N_1$, $r \ll N_2$). В этом случае частоты нормальных колебаний

$$\omega_{kr} \approx \pi\left[\frac{k^2}{N_1^2} + \mu\frac{r^2}{N_2^2}\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

Пусть k, r — средние номера возбужденных мод соответственно в интервалах Δk, Δr; N_b — число возбужденных мод

$$N_b \sim \Delta k\Delta r \tag{1.7}$$

Подсчитаем количество невырожденных резонансовых соотношений N_p в правой части (1.3) типа

$$\sum_{i=1}^{4} n_i\omega_i = 0 \tag{1.8}$$

где n_i — целые, взаимно простые числа (напомним, что член с кубической нелинейностью в (0.2) обуславливает четырехкратное взаимодействие). При этом нужно учесть, что в рассматриваемом пределе для осцилляторов, лежащих на одной прямой, которая проходит через начало коорди-

[1] Б. В. Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Док. дисс. ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.

нат, получаются линейные соотношения относительно их номеров согласно (1.6), (1.8), как в одномерном случае. Поэтому число независимых резонансных соотношений (1.8) уменьшается за счет вырождения по сравнению с числом возможных резонансов в системе.

В результате имеем

$$N_p = 8C^3_{N_b-1} - N_0 + N_l \tag{1.9}$$

где $C_n{}^m$ — число сочетаний из n элементов по m и введены обозначения

$$N_0 = 8C^3_{a-1}, \quad N_l = a/2 \quad (a = \min(\Delta k, \Delta r)) \tag{1.10}$$

Множитель $^1/_2$ в выражении для N_l в (1.10) учитывает наличие симметрии взаимодействия при кубической нелинейности в вырожденном случае аналогично одномерному случаю. Заметим также, что с учетом этого обстоятельства эффект вырождения нужно учитывать лишь, если $a \geqslant 8$, так как только в этом случае возможна соответствующая комбинация частот в (1.8).

Оценим величину средней силы $\langle F \rangle$, действующей на осциллятор с номером kr со стороны ближайшего резонанса. Согласно (1.3) и (1.9) и с учетом случайности фаз имеем

$$\langle F \rangle \sim \beta \frac{F_{km,rn}}{16 N_1 N_2} \sim \frac{\pi^4 (8C^3_{N_b-1})^{1/2} \beta \langle c^3 \rangle}{N_1 N_2 (N_p)^{1/2}} \left(\frac{k^4}{N_1{}^4} + \mu \frac{r^4}{N_2{}^4} \right) \tag{1.11}$$

где $\langle c^3 \rangle$ — средняя комбинация амплитуд в области возбужденных мод. Поправка к частоте ω_{kr} за счет нелинейности равна

$$\Omega_{km,rn} \sim 9 \left[32 N_1 N_2 \left(\frac{k^2}{N_1{}^2} + \mu \frac{r^2}{N_2{}^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} \beta \left(\frac{k^4}{N_1{}^4} + \mu \frac{r^4}{N_2{}^4} \right) \langle c^2 \rangle \tag{1.12}$$

Среднее расстояние между резонансами можно оценить как интервалы между векторами частот в области возбужденных мод

$$|\omega_{k-\Delta k/2,\, r-\Delta r/2}| \leqslant |\omega_{kr}| \leqslant |\omega_{k+\Delta k/2,\, r+\Delta r/2}|$$

занимаемой N_p резонансами, из (1,6) и (1.9)

$$\Delta\omega \sim \frac{\pi}{N_p} \left[\left(\frac{k \Delta k}{N_1{}^2} \right)^2 + \mu \left(\frac{r \Delta r}{N_2{}^2} \right)^2 \right]^{1/2} \left(\frac{k^2}{N_1{}^2} + \mu \frac{r^2}{N_2{}^2} \right)^{-1/2} \tag{1.13}$$

Из (1.1) с учетом (1.2) получим оценку максимальной величины

$$u^2_{\max} = 4 (\langle u \rangle)^2 \sim 2 \langle c^2 \rangle \Delta k \Delta r (N_1 N_2)^{-1} \tag{1.14}$$

Введем обозначения

$$\Phi_2 \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{N_1{}^2} + \mu \frac{r^2}{N_2{}^2} \right) u^2_{\max} \tag{1.15}$$

$$\sigma_1 = \frac{r N_1}{k N_2}, \quad \Delta\sigma_1 = \frac{r \Delta r N_1{}^2}{k \Delta k N_2{}^2} \tag{1.16}$$

Определяя величину β_* из условия (1.4) с учетом (1.5), (1.11) — (1.13), получим следующую оценку границы стохастичности:

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{2 (1 + \mu \sigma_1{}^2) [1 + \mu (\Delta\sigma_1)^2]^{1/2} (\Delta k)^2 \Delta r}{k (1 + \mu \sigma_1{}^4) [8C^3_{N_b-1} (N_p)^3]^{1/4}} \tag{1.17}$$

При $\Delta k,\ \Delta r \gg 1$ имеем

$$8C^3_{N_b-1} \sim (\Delta k)^3 (\Delta r)^3, \quad 8C^3_{N_b-1} \gg N_0 \gg N_l$$

и (1.17) примет вид

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{4(1+\mu\sigma_1^2)(1+\mu\Delta\sigma_1^2)^{1/2}}{3k(1+\mu\sigma_1^4)\,\Delta k\,(\Delta r)^2}$$

При $\mu \to 0$ область возбужденных мод стягивается к прямой на оси x

$$8C^3_{N_b-1} \sim (\Delta k)^3, \quad N_0 \sim (\Delta k)^3, \quad N_l \sim \Delta k / 2$$

$$\Phi_2 \to \Phi_1 \equiv (\partial u / \partial x)^2$$

так что

$$\beta_* \Phi_1 \sim k^{-1} (\Delta k)^{1/2}$$

соответственно оценке, полученной в [2] для одномерного случая.

Возбуждение высоких мод ($k \approx N_1,\ r \approx N_2$). В этом случае резонансные частоты равны

$$\omega_{km,\,rn} \approx 2\left[\cos^2 \frac{\pi \sqrt{(k-N_1)^2+2m}}{2N_1} + \mu \cos^2 \frac{\pi \sqrt{(r-N_2)^2+2n}}{2N_2}\right]$$

$$(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \ldots)$$

Среднее расстояние между ближайшими резонансами в первом приближении

$$\Delta\omega_{\pm} = \omega_{k,\,m\pm1,\,r,\,n+1} - \omega_{km,\,rn} \approx \frac{\pi^2}{2(1+\mu)^{1/2}} \left| \frac{1}{N_1^2} \pm \frac{\mu}{N_2^2} \right| \qquad (1.18)$$

Поправка следующего порядка дает расстояние между резонансами тонкой структуры

$$\Delta\omega_1 \sim (\pi / N)^4 \quad \text{при } N_1 = N_2 = N$$

но, как легко видеть, в рассматриваемом пределе ($\Delta k \ll N_1,\ \Delta r \ll N_2$) полного перекрытия этой системы резонансов не происходит, так что при $N_1 \approx N_2 \approx N$, $\mu \approx 1$ в (1.18) следует брать верхний знак в связи с дополнительным вырождением.

С учетом (1.3), (1.4), (1.14) — (1.16) получим оценку границы стохастичности (при $\Delta\omega_- \gg \Delta\omega_1$)

$$\beta_* \Phi_2 \sim \frac{2\pi^2 k^2 (1+\mu\sigma_1^2)\,\Delta k \Delta r}{(1+\mu)^{1/2} N_1^2} \left| \frac{1}{N_1^2} - \mu \frac{1}{N_2^2} \right| \qquad (1.19)$$

При $N_1 \sim N_2 \sim N$, $\mu \sim 1$ имеем

$$\Delta\omega_+ \gg \Delta\omega_1 \sim \Delta\omega_- \qquad (1.20)$$

$$\beta_* \Phi_2 \sim 8/3\pi^2\ \Delta k \Delta r\ (k^2 + r^2) / N^4$$

При $\mu \to 0$ (для одномерного случая) (1.19), (1.20) переходят в

$$\beta_* \Phi_1 \sim \pi^2 k^2 \Delta k / N^4$$

в согласии с результатом работы [2].

Смешанный случай ($k \approx N_1,\ r \ll N_2$). Пусть возбуждены высшие моды по одному направлению и низшие по другому. Резонансные частоты равны

$$\omega_{km,\,rn} \approx 2\left[\cos^2 \frac{\pi \sqrt{(k-N_1)^2+2m}}{2N_1} + \mu \sin^2 \frac{\pi \sqrt{r^2+2n}}{2N_2}\right]^{1/2}$$

$$(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \ldots)$$

Тогда оценка границы стохастичности совпадает с выражениями (1.19), (1.20), т. е. определяется наличием высоких мод.

2. Трехмерная решетка. Пользуясь результатами п. 1, нетрудно получить оценки и для трехмерного случая.

Разложение по нормальным колебаниям теперь имеет вид

$$u_{l,m,p} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N_1N_2N_3}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} \sum_{s=1}^{N_3-1} Q_{krs} \sin\frac{\pi lk}{N_1} \sin\frac{\pi mr}{N_2} \sin\frac{\pi ps}{N_3}$$

где N_1, N_2, N_3 — числа осцилляторов решетки соответственно в направлениях x, y, z.

Число возбужденных мод в интервалах Δk, Δr, Δs

$$N_b \sim \Delta k \Delta r \Delta s \tag{2.1}$$

Частоты нормальных колебаний

$$\omega_{krs} = 2\left(\sin^2\frac{\pi k}{2N_1} + \mu \sin^2\frac{\pi r}{2N_2} + \gamma \sin^2\frac{\pi s}{2N_3}\right)^{1/2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1;\ r = 1, 2, \ldots, N_2 - 1;\ s = 1, 2, \ldots, N_3 - 1)$$

Для N_p можно по-прежнему использовать выражение (1.9) с учетом того, что теперь

$$a = \min(\Delta k, \Delta r, \Delta s)$$

а область возбужденных мод определяется (2.1).

Введем обозначения

$$\Phi_3 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{k^2}{N_1^2} + \mu\frac{r^2}{N_2^2} + \gamma\frac{s^2}{N_3^2}\right)u_{\max}^2$$

где

$$u_{\max}^2 \sim \frac{2\langle c^2\rangle N_b}{N_1N_2N_3}, \quad \sigma_1 = \frac{rN_1}{kN_2}, \quad \sigma_2 = \frac{sN_1}{kN_3}$$

$$\Delta\sigma_1 = \frac{r\Delta rN_1^2}{k\Delta kN_2^2}, \quad \Delta\sigma_2 = \frac{s\Delta sN_1^2}{k\Delta kN_3^2}$$

Тогда оценки границ стохастичности получим в следующем виде: Низшие моды ($k \ll N_1$, $r \ll N_2$, $s \ll N_3$)

$$\beta_*\Phi_3 \sim \frac{4(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)\left[1+\mu(\Delta\sigma_1)^2+\gamma(\Delta\sigma_2)^2\right]^{1/2}(\Delta k)^2\Delta r\Delta s}{k(1+\mu\sigma_1^4+\gamma\sigma_2^4)\left[8C_{N_b-1}^3(N_p)^3\right]^{1/4}} \tag{2.2}$$

при Δk, Δr, $\Delta s \gg 1$ (2.2) примет вид

$$\beta_*\Phi_3 \sim \frac{3(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)\left[1+\mu(\Delta\sigma_1)^2+\gamma(\Delta\sigma_2)^2\right]^{1/2}}{k(1+\mu\sigma_1^4+\gamma\sigma_2^4)\Delta k(\Delta r)^2(\Delta s)^2}$$

высшие моды ($k \approx N_1$, $r \approx N_2$, $s \approx N_3$)

$$\beta_*\Phi_3 \sim 4\pi^2\frac{k^2(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)\Delta k\Delta r\Delta s}{N_1^2(1+\mu+\gamma)^{1/2}}\left|\frac{1}{N_1^2} \pm \frac{\mu}{N_2^2} \mp \frac{\gamma}{N_3^2}\right| \tag{2.3}$$

Знаки в (2.3) выбираются так, чтобы получилось минимальное выражение, что соответствует ближайшему расстоянию между резонансами. Оценкой (2.3) нельзя пользоваться при $N_1 \approx N_2 \approx N$, $\gamma \approx 1 - \mu$. Для последнего случая с учетом замечания к формуле (1.18) имеем

$$\beta_*\Phi_3 \sim \frac{17}{3}\frac{\pi^2\Delta k\Delta r\Delta s}{N^4}(k^2 + r^2 + s^2) \tag{2.4}$$

В смешанном случае (например, $k \approx N_1$, $r \ll N_2$, $s \ll N_3$) получим те же оценки (2.3), (2.4).

Как следует из вышеприведенных оценок, с увеличением числа степеней свободы развитие стохастичности облегчается. Для основательной проверки аналитических оценок были бы желательны эксперименты с большим числом осцилляторов.

Автор благодарит Б. В. Чирикова за обсуждение работы.

Поступила 2 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems. Los-Alamos Rept. LA-1940, 1955.
2. Израйлев Ф. М., Чириков Б. В. Статистические свойства нелинейной струны. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 1.
3. Saito N., Ooyama N. Aizawa Y., Hirooka H. Computer experiments on ergodic problems in anharmonic lattice vibrations. Suppl. Progress Theoret. Physics, 1970, No. 45.