УДК 536.24

УВЕЛИЧЕНИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В РАЗВИТОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В РЕЖИМЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

К. Джайабалан, К. К. Сивагнана Прабу, Р. Кэндэзэми*

Инженерный колледж Университета Анны, 600040 Ченнай, Индия
* Исследовательский центр вычислительной математики
Университета Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Малайзия
E-mails: amuthabalan2011@gmail.com, kksgnanam@gmail.com, ramasamy@uthm.edu.my

Исследована задача развитого магнитогидродинамического течения в режиме смешанной конвекции в вертикальном канале с учетом химических реакций первого порядка. С помощью программного пакета Maple 18 численно решены определяющие безразмерные обыкновенные дифференциальные уравнения. Показана двойственность решения как для скорости, так и для температуры.

Ключевые слова: вертикальный канал, развитое магнитогидродинамическое течение, режим смешанной конвекции, экзотермическая химическая реакция.

DOI: 10.15372/PMTF20160524

Введение. В процессе экзотермической химической реакции выделяется энергия, повышающая температуру окружающей среды. Энергия активации реакции существенно меньше количества теплоты, выделяющейся при реакции. Интерес к исследованию магнитогидродинамических (МГД) течений в пограничном слое обусловлен тем, что такие течения часто используются в промышленности, ядерной энергетике, характерны для жидких металлов.

В последнее время с использованием аналитического и численного подходов проведено большое количество исследований теплопереноса и течений жидкости в режимах свободной и смешанной конвекции в вертикальном канале. Задачи такого типа возникают при моделировании работы электронных пакетов и микроэлектронных устройств. В работах [1–3] исследованы температурные режимы течения жидкости внутри вертикального канала с учетом симметричных и асимметричных граничных условий для температуры. Свободно-конвективное течение над вертикальной пластиной и каверной, образовавшейся в результате химической реакции, изучалось в [4–9]. Задача о смешанной конвекции в вертикальном канале при однородном распределении температуры на стенке рассмотрена в работе [10]. В [11] изучалась смешанная конвекция в вертикальном канале при асимметричном нагреве (одна пластина нагревается, а вторая имеет постоянную температуру).

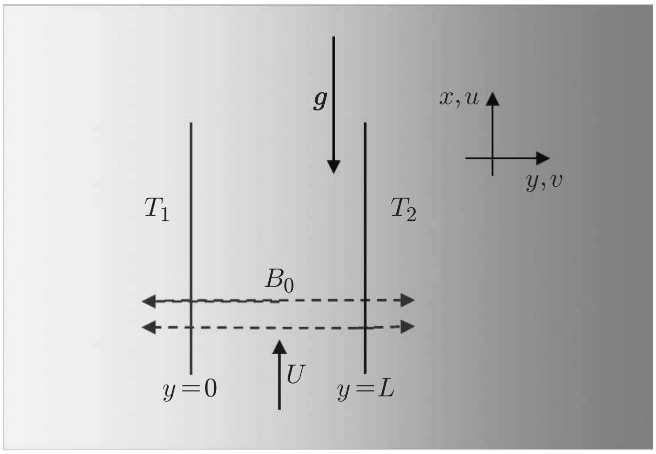

Рис. 1. Физическая модель течения и система координат

В [12] проведен также анализ влияния различных граничных условий и разных значений температуры на развитое течение, обусловленное действием различных сил. В [13] изучена смешанная конвекция в вертикальном канале с учетом химических реакций и установлена двойственность решений как для скорости, так и для температуры.

Целью данной работы является исследование стационарного развитого МГД-течения в режиме смешанной конвекции в вертикальном канале при постоянной температуре на стенках и при наличии экзотермической химической реакции внутри канала. С помощью пакета программ Maple 18 решаются безразмерные разделенные обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие течение жидкости и теплоперенос. Авторам не известны работы, в которых задача решалась в такой постановке.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вертикальными параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии L друг от друга. Система координат выбрана таким образом, чтобы направление вектора ускорения свободного падения $\boldsymbol{g}$ было противоположным направлению оси x. Ось y перпендикулярна стенкам канала, стенки имеют координаты $y = 0$ и $y = L$. Перпендикулярно параллельным пластинам приложено постоянное магнитное поле напряженностью B_0 (рис. 1). На стенках $y = 0$, $y = L$ задаются постоянные значения температуры T_1 и T_2, причем $T_1 > T_2$. На входе в канал жидкость движется с равномерно распределенной скоростью U, направленной вверх. Следуя [5], предполагаем, что экзотермическую химическую реакцию, в результате которой внутри канала выделяется тепло, можно представить в виде реакции первого порядка, описываемой кинетикой Аррениуса:

$$A \rightarrow B + Q, \qquad \frac{dA}{dt} = -k_0 a \,\mathrm{e}^{-E/(RT)}\,.$$

Здесь B — продукты реакции; T — температура; Q — количество теплоты, выделяющейся при реакции; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; a — концентрация реагента A (считается, что массовая доля реагента достаточно велика, чтобы концентрация оставалась постоянной во всем канале); k_0 — предэкспоненциальный множитель.

В развитом течении (вдали от входа в канал) выполняются условия

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = C,$$

где v — компонента скорости в направлении оси y; p — давление; C — константа.

Основные уравнения имеют вид

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0) - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + qk_0 a\,\mathrm{e}^{-E/(RT)} = 0, \tag{2}$$

граничные условия записываются следующим образом:

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad T(0) = T_1, \quad T(L) = T_2. \tag{3}$$

Здесь q — коэффициент экзотермической реакции; α — коэффициент температурной диффузии; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; β — коэффициент температурного расширения; T_0 — характерная температура, задаваемая соотношением $T_0 = (T_1 - T_2)/2$. Для определения градиента давления в (1) необходимо задать условие сохранения потока массы M_f:

$$\int\limits_0^L u\,dy = M_f.$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$X = \frac{x}{\mathrm{Re}\,L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U(y) = \frac{u}{U}, \quad P(X) = \frac{P}{\rho U^2}, \quad \theta(Y) = \frac{T - T_0}{RT_0^2/E}.$$

Уравнения (1), (2) и граничные условия (3) в безразмерных переменных имеют вид

$$U'' + \lambda\theta - MU - \gamma = 0; \tag{4}$$

$$\theta'' + K\,\mathrm{e}^{\theta} = 0; \tag{5}$$

$$U(0) = 0, \quad \theta(0) = \tau_T, \quad U(1) = 0, \quad \theta(1) = -\tau_T. \tag{6}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной Y; $\lambda = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}$ — параметр диффузии; $\gamma = dP/dX$ — постоянный градиент давления; $\tau_T = (T_1 - T_2)/(RT_0^2/E)$ — постоянный температурный параметр; $\mathrm{Gr} = g\beta(RT_0^2/E)L^3/\nu^2$ — число Грасгофа; $\mathrm{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса; $M = \sigma B_0^2 L^2/(\mu U)$ — параметр магнитного поля; μ — динамическая вязкость; $K = Eqk_0 aL\,\mathrm{e}^{-E/(RT_0)}/(RT_0^2\alpha)$ — число Франка — Каменецкого.

Считается, что $RT_0^2/E \ll 1$ [14]. Для определения решения уравнений (4), (5) и определения градиента давления γ необходимо добавить условие сохранения массы в каждом сечении канала [1]

$$\int\limits_0^1 U\,dY = 1. \tag{7}$$

Выражение для параметра магнитного поля M можно представить в виде

$$M = \frac{B_0^2/\mu_0}{\rho U^2}\,\mathrm{Re}_m\,\mathrm{Re} \approx \frac{B_0^2/\mu_0}{P^*}\,\mathrm{Re}_m\,\mathrm{Re} = N\,\mathrm{Re},$$

где Re_m — магнитное число Рейнольдса; N — параметр гидромагнитного взаимодействия. В задачах магнитной гидродинамики, как правило, $N \approx 1$. При $\mathrm{Re}_m \ll 1$ индуктивность отсутствует, при этом выполняется неравенство

$$\frac{B_0^2/\mu_0}{\rho U_e^2} \approx \frac{B_0^2/\mu_0}{P^*} \gg 1.$$

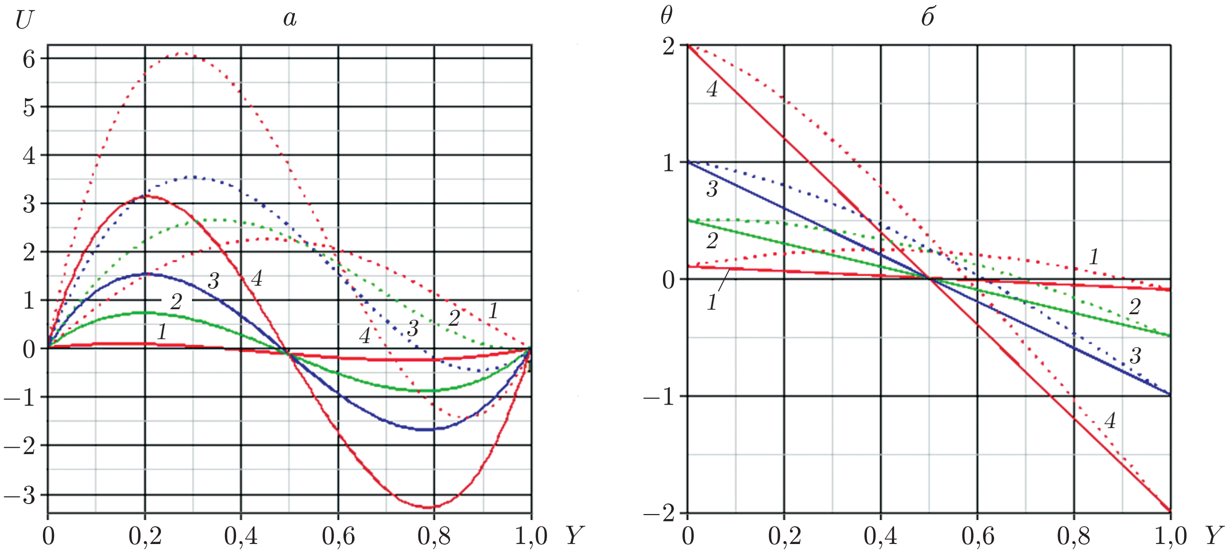

Рис. 2. Профили скорости (a) и температуры ($б$) при $M = 0$, $\lambda = 100$, $\gamma = 1{,}0$ и различных значениях τ_T:

сплошные линии — в отсутствие экзотермической реакции ($K = 0$), пунктирные — при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$); *1* — $\tau_T = 0{,}1$, *2* — $\tau_T = 0{,}5$, *3* — $\tau_T = 1{,}0$, *4* — $\tau_T = 2{,}0$

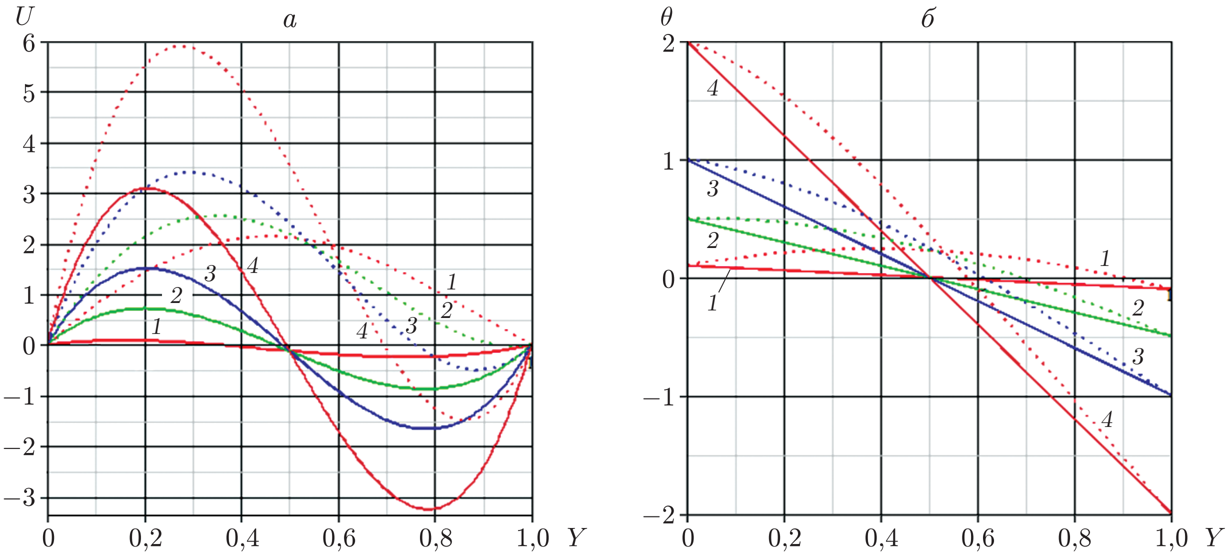

Рис. 3. Профили скорости (a) и температуры ($б$) при $M = 0{,}5$, $\lambda = 100$, $\gamma = 1{,}0$ и различных значениях τ_T:

сплошные линии — в отсутствие экзотермической реакции ($K = 0$), пунктирные — при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$); *1* — $\tau_T = 0{,}1$, *2* — $\tau_T = 0{,}5$, *3* — $\tau_T = 1{,}0$, *4* — $\tau_T = 2{,}0$

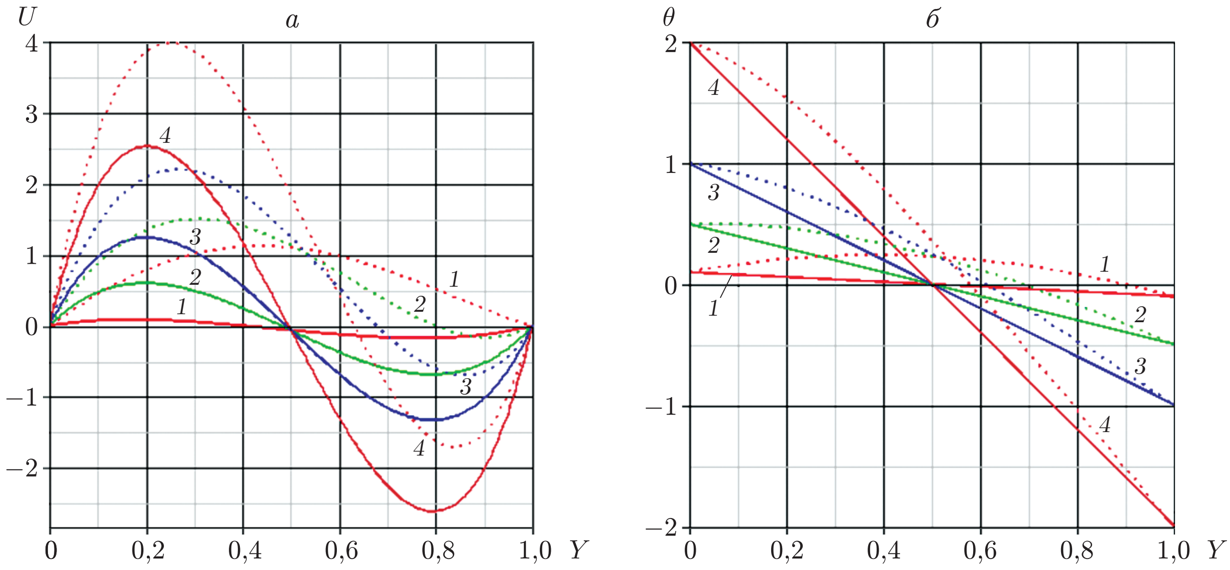

Рис. 4. Профили скорости (a) и температуры ($б$) при $M = 10$, $\lambda = 100$, $\gamma = 1{,}0$ и различных значениях τ_T:
сплошные линии — в отсутствие экзотермической реакции ($K = 0$), пунктирные — при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$); *1* — $\tau_T = 0{,}1$, *2* — $\tau_T = 0{,}5$, *3* — $\tau_T = 1{,}0$, *4* — $\tau_T = 2{,}0$

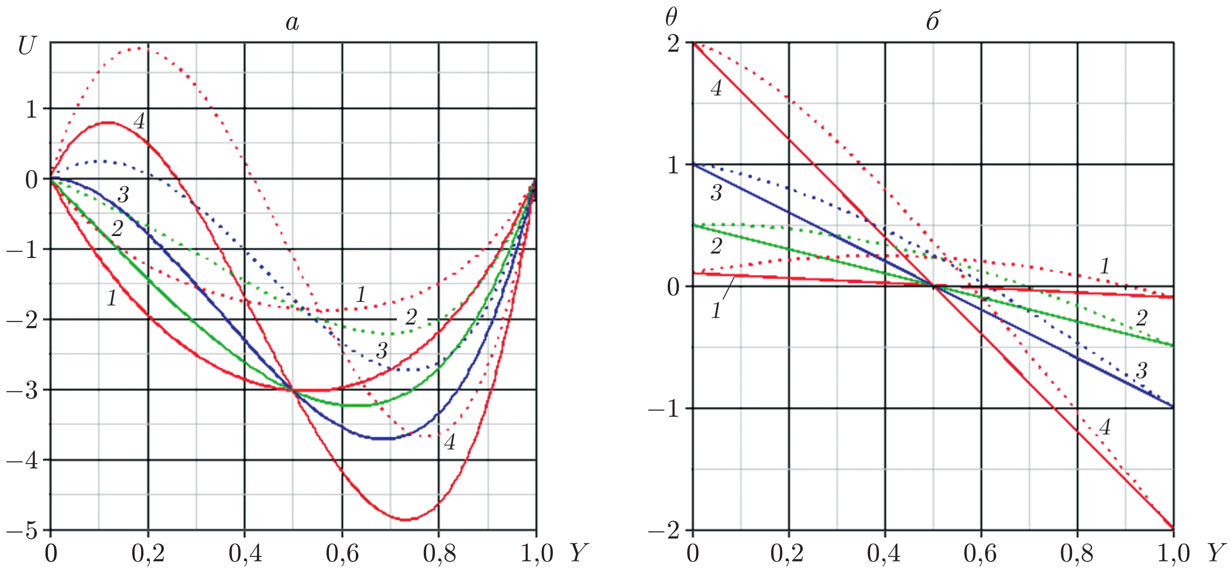

Рис. 5. Профили скорости (a) и температуры ($б$) при $M = 10$, $\lambda = 100$, $\gamma = 50$ и различных значениях τ_T:
сплошные линии — в отсутствие экзотермической реакции ($K = 0$), пунктирные — при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$); *1* — $\tau_T = 0{,}1$, *2* — $\tau_T = 0{,}5$, *3* — $\tau_T = 1{,}0$, *4* — $\tau_T = 2{,}0$

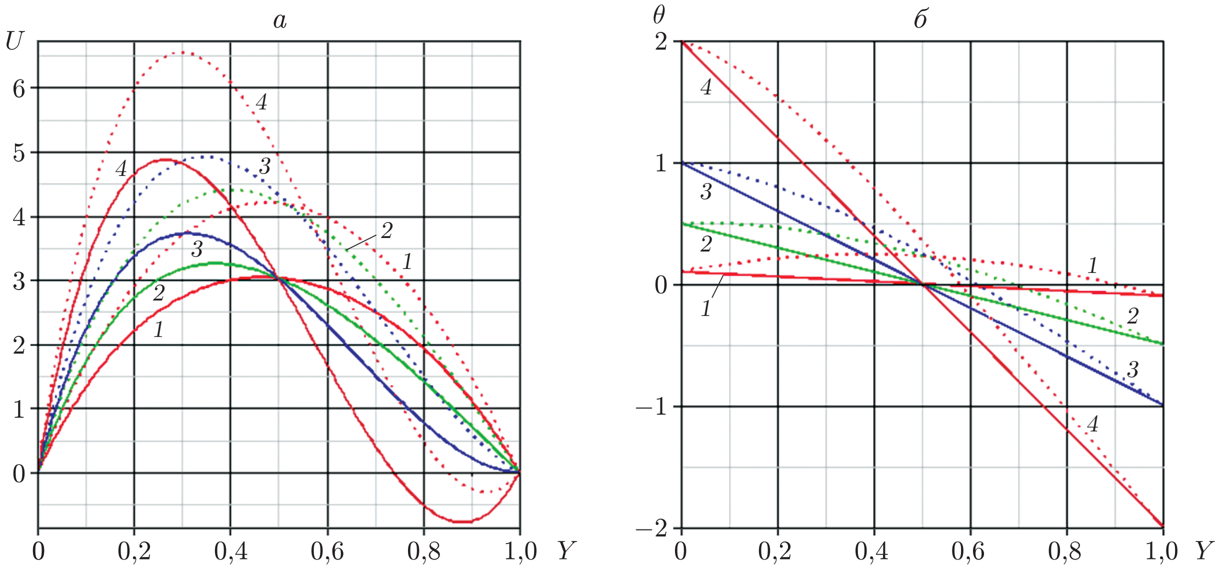

Рис. 6. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) при $M = 10$, $\lambda = 100$, $\gamma = -50$ и различных значениях τ_T:
сплошные линии — в отсутствие экзотермической реакции ($K = 0$), пунктирные — при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$); *1* — $\tau_T = 0{,}1$, *2* — $\tau_T = 0{,}5$, *3* — $\tau_T = 1{,}0$, *4* — $\tau_T = 2{,}0$

Переменные U и $\gamma = dp/dx$ определяются из условия (7), где M, γ — взаимозависимые параметры.

2. Результаты расчетов. На рис. 2, 3 приведены профили скорости и температуры при различных значениях τ_T, полученные в данной работе и работе [15] соответственно. Видно, что эти решения совпадают.

Уравнения (4), (5) с граничными условиями (6) решались численно. На рис. 2–6 видно, что в случае $K = 1{,}5$ (экзотермическая реакция) решение единственно [2]. Уравнение (4) с граничными условиями (6) и законом сохранения массы (7) было решено численно. Предполагалось, что количество теплоты, выделяющейся в результате химической реакции, значительно больше количества теплоты, образующейся вследствие вязкой диссипации и джоулева нагрева. Установлено, что во всех вариантах расчетов (см. рис. 2–6) при увеличении температурного параметра температура жидкости вблизи нагретой стенки увеличивается, а по мере приближения к холодной стенке — постепенно уменьшается. Видно, что и при $K = 0$, и при $K = 1{,}5$ внутри пограничного слоя ($Y < 0{,}5$) скорость жидкости возрастает, в то время как снаружи ($Y \geqslant 0{,}5$) она постепенно уменьшается. Также установлено, что при наличии экзотермической реакции ($K = 1{,}5$) толщина теплового пограничного слоя больше, чем в случае ее отсутствия ($K = 0$). Скорость жидкости значительно меняется с увеличением параметра магнитного поля и градиента давления, в то время как температура зависит только от наличия экзотермической реакции. Следует отметить, что при $K = 1{,}5$ толщина теплового пограничного слоя больше, чем при $K = 0$, и вблизи нагретой стенки возникает обратное течение, что невозможно с физической точки зрения. Представленное в данной работе решение задачи при $K = 1{,}5$ согласуется с данными работы [2]. Таким образом, магнитное поле и градиент давления можно использовать для управления течением, при этом температура жидкости зависит от величины тепловыделения при наличии экзотермической химической реакции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Aung W., Worku G.** Developing flow and flow reversal in a vertical channel with asymmetric wall temperatures // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1986. V. 108. P. 299–304.
2. **Aung W., Worku G.** Theory of fully developed, combined convection including flow reversal // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1986. V. 108. P. 485–488.
3. **Habchi S., Acharya S.** Laminar mixed convection in a symmetrically or asymmetrically heated vertical channel // Numer. Heat Transfer. 1986. V. 9. P. 605–618.
4. **Bond G. C.** Heterogeneous catalysis, principles and applications. Oxford: Clarendon Press, 1987.
5. **Merkin J. H., Chaudhary M. A.** Free convection boundary layer driven by an exothermic surface reaction // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1994. V. 47. P. 405–428.
6. **Chaudhary M. A., Merkin J. H.** Free convection stagnation-point boundary layers driven by catalytic surface reaction // J. Engng Math. 1994. V. 28. P. 145–171.
7. **Chaudhary M. A., Merkin J. H.** A simple isothermal model for homogeneous-heterogeneous reactions in boundary-layer flow. 1. Equal diffusivities // Fluid Dynamics Res. 1995. V. 16. P. 311–331.
8. **Barletta A.** Analysis of combined forced and free flow in a vertical channel with viscous dissipation and isothermal-isoflux boundary conditions // J. Heat Transfer. 1999. V. 12. P. 349–356.
9. **Boulama K., Galanis N.** Analytical solution for fully developed mixed convection between parallel vertical plates with heat and mass transfer // J. Heat Transfer. 2004. V. 126. P. 381–388.
10. **Tao L. N.** On combined free and forced convection in channels // J. Heat Transfer. 1960. V. 82. P. 233–238.
11. **Habchi S., Acharya S.** Laminar mixed convection in a symmetrically or asymmetrically heated vertical channel // Numer. Heat Transfer. 1986. V. 9. P. 605–618.
12. **Cheng C. H., Kou H. S., Huang W. H.** Flow reversal and heat transfer of fully developed mixed convection in vertical channels // J. Thermophys. Heat Transfer. 1990. V. 4. P. 375–383.
13. **Pop I., Grosan T., Cornelia R.** Effect of heat generated by an exothermic reaction on the fully developed mixed convection flow in a vertical channel // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 471–474.
14. **Bratu G.** Sur les équations intégrales non linéaires // Bull. Soc. Math. France. 1914. V. 42. P. 113–142.
15. **Pop I., Grosan T., Revnic C.** Effects of heat generated by an exothermic reaction on the fully developed mixed convection flow in a vertical channel // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 471–474.

Поступила в редакцию 9/XII 2014 г.,
в окончательном варианте — 5/VIII 2015 г.