

УДК 532.59

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОЛОГИМИ ДНОМ И КРЫШКОЙ

Г. А. Хабахпашев, О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена дифференциальная модель второго порядка точности для трехмерных возмущений границы раздела двух жидкостей различной плотности. Получено эволюционное уравнение для бегущих квазиустановившихся волн произвольной протяженности и малой, но конечной амплитуды. В случае горизонтальных дна и крышки среди его установившихся периодических решений имеют место возмущения типа волн Стокса. Для умеренно длинных возмущений найдены решения в виде уединенных волн, согласующиеся с известными опытными и аналитическими результатами. Исследована задача о плавном переходе линейного моногармонического возмущения из области глубокой жидкости в область мелкой.

В статье [1] предложена простейшая дифференциальная модель, способная описать динамику как длинных, так и коротких трехмерных слабонелинейных возмущений границы раздела двух жидкостей различной плотности, находящихся между твердыми горизонтальными дном и крышкой. Однако вывод уравнения волнового типа для квазистационарных возмущений был выполнен не совсем корректно. Кроме того, даже у линеаризованного уравнения формально существуют неустойчивые решения. Целью данной работы является получение дифференциальной модели второго порядка точности и соответствующего эволюционного уравнения, свободного от указанных выше недостатков и ограничения постоянства глубин слоев.

1. Дифференциальная модель второго порядка точности. Предположим, что жидкости являются идеальными несжимаемыми и несмешивающимися, стационарные составляющие их движения равны нулю, возникающие осциллирующие течения потенциальны, а волны характеризуются слабой нелинейностью (т. е. $\eta_a k / \text{th}(kh_m) \sim \varepsilon$, где η_a — амплитуда возмущения границы раздела; k — волновое число; h_m — глубина меньшего слоя; ε — малый параметр). Будем пренебрегать величинами третьего порядка малости, не учитывая при этом капиллярные эффекты.

В статье [1] интегрированием по вертикальной координате с использованием обычных кинематических и динамических краевых условий на крышке, дне и границе раздела исходная система уравнений гидродинамики сведена к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \{ \mathbf{u}_i \} [\eta + (-1)^i h_i] \} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{li}}{\partial t} + \nabla \left(g\eta + \frac{u_{li}^2}{2} + \frac{p_i}{\rho_l} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta = 0. \quad (1.2)$$

Здесь t — время; \mathbf{u} — вектор горизонтальной составляющей скорости жидкости, угловыми скобками помечено его значение, осредненное по глубине слоя; g — ускорение свободного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01766), Совета по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (код проекта 96-15-96314) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционная программа ИГ-43-97).

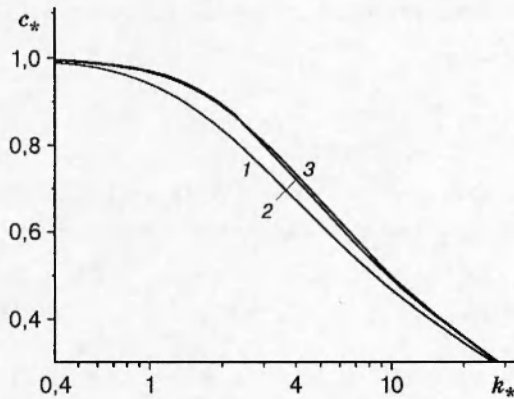


Рис. 1. Зависимость безразмерной фазовой скорости c_* от безразмерного волнового числа k_* при $h_2/h_1 = 3$ и $\rho_2/\rho_1 = 1,25$:
1, 2 — расчет по аппроксимации (1.5) с $\alpha = 0$; 2/3; 3 — расчет по точному дисперсионному соотношению (1.4)

падения; ρ — плотность; p — давление; $l = 1$ для верхней жидкости и $l = 2$ для нижней; индексом i помечены значения величин, относящиеся к границе раздела; оператор градиента ∇ определен в горизонтальной плоскости.

Далее в работе [1] использование известных зависимостей для вертикальных профилей u_i (см., например, [2]) позволило связать фурье-компоненты граничных и осредненных скоростей жидкостей:

$$u_{li}(\omega, k) = kh_l \operatorname{cth}(kh_l) \langle u_l(\omega, k) \rangle, \quad (1.3)$$

где ω — циклическая частота. Если $\nabla h \sim \varepsilon^{3/2}$, то можно допустить, что формулы для волн в жидкости постоянной глубины локально верны и для слабонаклонных дна и крышки. В связи с этим приведем еще одну классическую формулу — дисперсионное соотношение для линейных моногармонических безвихревых волн в двухслойной жидкости [2]:

$$\omega^2 [\rho_1 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)] = gk(\rho_2 - \rho_1). \quad (1.4)$$

Заменим приближенно данное трансцендентное (для волнового числа) уравнение следующей простейшей частотной паде-аппроксимацией:

$$\omega^2 (1/A_\omega + \omega_*^2) = \omega^2 / c_*^2 = k^2 c_0^2 = k^2 g \delta, \quad A_\omega = 1 + \alpha \omega_*^2, \quad \omega_*^2 = \omega^2 \beta / g_+^-, \quad (1.5)$$

$$g_+^- = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \beta = h_1 h_2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\chi}, \quad \delta = h_1 h_2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\chi}, \quad \chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1.$$

Здесь c — фазовая скорость, индексом 0 помечено ее значение для волн бесконечно малой частоты; α — числовой коэффициент. Если $\alpha = 0$, то имеем простейшую полиномиальную аппроксимацию, предложенную в статье [1]. При этом длинноволновая ($\omega_*^2 \ll 1$) и коротковолновая ($\omega_*^2 \gg 1$) асимптоты совпадают с точной дисперсионной кривой. Кроме того, в области промежуточных частот ошибка аппроксимации определяется отношениями глубин слоев и плотностей жидкостей. Так, при $h_2/h_1 = 3$ и $\rho_2/\rho_1 = 1,25$ (при этих значениях параметров выполнялся эксперимент [3]) максимальное относительное отклонение точной зависимости (1.4) от приближенной (1.5) с $\alpha = 0$ составляет 8,5% и достигается при $k_* = kH \approx 4$ ($H = h_1 + h_2$ — расстояние между дном и крышкой). Если $\alpha = 2/3$, то ошибка аппроксимации не превосходит 2%, а соответствующий максимум имеет место при $k_* \approx 6$ (рис. 1). Сравнение соотношений (1.4) и (1.5) приводит к выражениям $kh_l \operatorname{cth}(kh_l) = 1/A_\omega + \omega^2 h_l / g_+^-$, с учетом которых равенства (1.3) запишем в следующем виде:

$$A_\omega u_{li}(\omega, k) = (1 + A_\omega \omega^2 h_l / g_+^-) \langle u_l(\omega, k) \rangle. \quad (1.6)$$

Применив к уравнениям (1.6) обратное фурье-преобразование, получим дифференциальные связи для граничных и осредненных скоростей

$$A_t \mathbf{u}_{li} = \langle \mathbf{u}_l \rangle - A_t \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2}, \quad A_t = 1 - \alpha \frac{\beta}{g_+} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.7)$$

Зависимости (1.3) и (1.6) остаются справедливыми и в случае слабонелинейных возмущений, в отличие от формул (1.7). Поэтому можно использовать обобщение выражений (1.7)

$$A_t \mathbf{u}_{li} = \langle \mathbf{u}_l \rangle - A_t \left\{ \left[\frac{h_l}{g_+} + \frac{(-1)^l}{g_+} \left(\eta + \frac{3h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} - 4\mathbf{u}'_{li} \right\}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{u}'_{li} — скорости поступательного перемещения частиц жидкости у границы раздела бесконечно глубоких слоев в направлении движения волны. Эти величины имеют второй порядок малости и не зависят ни от горизонтальных координат, ни от времени. Таким образом, в рассматриваемом приближении (без учета величин третьего порядка малости) члены $\partial \mathbf{u}_{li} / \partial t$ и ∇u_{li}^2 , которые входят в уравнение (1.2), не содержат \mathbf{u}'_{li} . Однако наличие \mathbf{u}'_{li} в равенствах (1.8) необходимо, чтобы получить решение типа волн Стокса для двух бесконечно глубоких слоев (см., например, [4, 5]). Отметим, что соотношения (1.8) согласуются с известными результатами и в длинноволновом пределе.

Теперь дважды продифференцируем по времени уравнение (1.2), умножим все его члены на $-\alpha\beta/g_+$ и вновь сложим с уравнением (1.2):

$$A_t \frac{\partial \mathbf{u}_{li}}{\partial t} + A_t \left[\nabla \left(g\eta + \frac{p_i}{\rho_l} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right] + \frac{1}{2} A_t \nabla u_{li}^2 = 0. \quad (1.9)$$

Первые члены в уравнениях (1.9) заменим с помощью выражений (1.8). В силу нелинейности последних членов уравнений (1.9) при подстановке в них можно ограничиться первым порядком точности и пренебречь величинами третьего порядка малости, т. е. считать, что

$$\mathbf{u}_{li} = \langle \mathbf{u}_l \rangle - (h_l/g_+) (\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle / \partial t^2).$$

Тогда законы сохранения горизонтальных компонент количества движения в слоях не содержат значений скоростей жидкостей у границы раздела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t} + A_t \left\{ \nabla \left[g\eta + \frac{1}{2} \left(\langle \mathbf{u}_l \rangle - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{p_i}{\rho_l} \right] + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right\} - \\ - A_t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{h_l}{g_+} + \frac{(-1)^l}{g_+} \left(\eta + \frac{3h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right\} = 0. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Для сведения системы четырех дифференциальных уравнений (1.1) и (1.10) к одному уравнению для возмущения границы раздела применим скалярно оператор ∇ к уравнениям (1.10) и домножим их на $(-1)^{l+1} h_l$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{h_l}{g_+} A_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} [(-1)^{l+1} h_l \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle] - \\ - (-1)^l A_t \left[g h_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i + h_l \nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + \frac{h_l}{2} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{u}_l \rangle - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right)^2 \right] + \\ + \frac{h_l}{g_+} \nabla \cdot \left\{ A_t \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\eta + \frac{3h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right] \right\} - (-1)^l A_t \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^3 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^3} \cdot \nabla h_l + \\ + (-1)^l \frac{\alpha \beta h_l}{g_+ h_1 h_2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(g \nabla \eta + \frac{\nabla p_i}{\rho_l} - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^3 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^3} \right) \cdot (\rho_1 h_2^2 \nabla h_1 + \rho_2 h_1^2 \nabla h_2) = 0. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Далее законы сохранения массы (1.1) удобнее переписать в форме

$$(-1)^{l+1} h_l \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle + \langle \mathbf{u}_l \rangle \cdot \nabla [\eta + (-1)^l h_l].$$

Подставим эти соотношения в первые линейные члены уравнений (1.11):

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{h_l}{g_+} A_D \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}_l \rangle \eta) \right] + \frac{h_l}{g_+} A_D \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{3h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right] - \\ & - (-1)^l \left\{ A_t \left[g h_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i + h_l \nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + \frac{h_l}{2} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{u}_l \rangle - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^2} \right)^2 \right] + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t} \cdot \nabla h_l \right\} + \\ & + (-1)^l \frac{\alpha \beta h_l}{g_+ h_1 h_2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(g \nabla \eta + \frac{\nabla p_i}{\rho_l} - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^3 \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t^3} \right) \cdot (\rho_1 h_2^2 \nabla h_1 + \rho_2 h_1^2 \nabla h_2) = 0. \quad (1.12) \end{aligned}$$

В п. 4 данные уравнения использованы для решения задачи о плавном переходе линейной волны с глубокой жидкости на мелкую.

2. Эволюционное уравнение для квазистационарных волн. В уравнениях (1.12) осредненные скорости жидкостей содержатся лишь в членах второго порядка малости. Для того чтобы и из них исключить $\langle \mathbf{u}_l \rangle$, необходимо сделать дополнительное предположение. Допустим, что в системе отсчета, движущейся вместе с волной, форма возмущения меняется медленно, т. е. $\eta = \eta(\tau, \mathbf{r})$, где $\tau = \varepsilon t$; $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{U}t$ ($\mathbf{x} = (x, y)$), а \mathbf{U} — характерная скорость распространения волны). Тогда $\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{r}}$ и $\partial/\partial t = \varepsilon \partial/\partial \tau - D$, где $D = \mathbf{U} \cdot \nabla$. Следовательно, с точностью до членов первого порядка малости из уравнений (1.1) имеем равенства $\langle \mathbf{u}_l \rangle = (-1)^l \mathbf{U} \eta / h_l$. С их помощью заменим $\langle \mathbf{u}_l \rangle$ в уравнениях (1.12):

$$\begin{aligned} & D^2 \eta - \frac{h_l}{g_+} A_D D^4 \eta - \frac{(-1)^l}{h_l} D^2 \eta^2 - (-1)^l A_D \left[g h_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i + \frac{U^2}{2h_l} \nabla^2 \eta^2 + h_l \nabla \cdot (D^2 \eta \nabla \eta) \right] + \\ & + \frac{(-1)^l}{g_+} A_D \left[D^4 \eta^2 + (D^2 - U^2 \nabla^2)(\eta D^2 \eta) - \frac{h_l}{2g_+} (6D^2 + U^2 \nabla^2)(D^2 \eta)^2 \right] - \frac{1}{h_l} D \eta D h_l + \\ & + \frac{\alpha \beta D^2}{g_+ h_1 h_2 \chi} \left[(-1)^l \left(g h_l \nabla \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla p_i \right) - \frac{h_l}{g_+} D^3 \eta \mathbf{U} \right] \cdot (\rho_1 h_2^2 \nabla h_1 + \rho_2 h_1^2 \nabla h_2) = \\ & = 2\varepsilon \left[1 - \frac{2h_l}{g_+} D^2 + \alpha \frac{h_l \beta}{g_+} \left(g \nabla^2 + \frac{3}{g_+} D^4 \right) \right] D \frac{\partial \eta}{\partial \tau}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь $A_D = 1 - \alpha \beta D^2 / g_+$, а члены третьего порядка малости, как и при всех предыдущих преобразованиях, опущены.

Получили систему двух уравнений для двух неизвестных η и p_i . Чтобы свести их к одному, умножим уравнение (2.1) при $l = 1$ на h_2 / ρ_2 , а при $l = 2$ на h_1 / ρ_1 и сложим их. В итоге для возмущений границы раздела двухслойной жидкости получаем эволюционное уравнение

$$\begin{aligned} & D^2 \eta - \zeta D^2 \eta^2 - A_D \left[g \delta \nabla^2 \eta + \frac{\beta}{g_+} A_D D^4 \eta + \zeta \frac{U^2}{2} \nabla^2 \eta^2 + \delta \nabla \cdot (D^2 \eta \nabla \eta) \right] + \\ & + A_D \left\{ \frac{\beta}{g_+} [D^4 \eta^2 - (D^2 - U^2 \nabla^2)(\eta D^2 \eta)] - \frac{\delta}{2(g_+)^2} (6D^2 + U^2 \nabla^2)(D^2 \eta)^2 \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{UD\eta}{h_1 h_2 \chi} - \frac{\alpha\beta(\rho_1 + \rho_2)}{g_+ \chi^2} D^2 \left(g_+^- \nabla \eta + \frac{U}{g_+^-} D^3 \eta \right) \right] \cdot (\rho_1 h_2^2 \nabla h_1 + \rho_2 h_1^2 \nabla h_2) = \\
& = 2\varepsilon \left[1 - \frac{2\beta}{g_+^-} D^2 + \alpha \frac{\beta^2}{g_+^-} \left(g \nabla^2 + \frac{3}{g_+^-} D^4 \right) \right] D \frac{\partial \eta}{\partial \tau}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

В уравнении (2.2) все коэффициенты определяются только физическими (ρ_1, ρ_2, g) и геометрическими (h_1, h_2) параметрами системы:

$$\zeta = \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{h_1 h_2 \chi}, \quad \gamma = \frac{\rho_2 h_1 - \rho_1 h_2}{h_1 h_2 (\rho_1 + \rho_2)}.$$

Выражения для величин β, δ, χ и g_+^- приведены после формулы (1.5).

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи. Пусть равновесные глубины слоев постоянны, а плоская волна бежит в направлении роста координаты x . Тогда уравнение (2.2) заметно упрощается:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon \left[1 - \frac{2\beta U^2}{g_+^-} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha\beta^2}{g_+^-} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(1 + \frac{3U^4}{g_+^-} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} = (U^2 - g\delta A_\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \beta \frac{U^4}{g_+^-} A_\xi \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \\
-\zeta U^2 \left(1 + \frac{1}{2} A_\xi \right) \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial \xi^2} + \gamma \beta \frac{U^4}{g_+^-} A_\xi \frac{\partial^4 \eta^2}{\partial \xi^4} - \frac{\delta}{2} U^2 A_\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{7U^4}{(g_+^-)^2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^2 \right], \quad (2.3) \\
A_\xi = 1 - \alpha \beta \frac{U^2}{g_+^-} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},
\end{aligned}$$

где $\xi = x - Ut$. Подчеркнем, что для линейных возмущений данное эволюционное уравнение дает только нейтрально-устойчивые решения. Уравнение (2.3) можно проинтегрировать по переменной ξ . При этом константу интегрирования необходимо положить равной нулю, чтобы исключить нефизические решения. Если имеет место прогрессивная установившаяся волна, то $\partial \eta / \partial \tau = 0$, т. е. левая часть уравнения (2.3) равна нулю. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
(U^2 - g\delta A_\xi) \frac{d\eta}{d\xi} - \beta \frac{U^4}{g_+^-} A_\xi \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \zeta U^2 \left(1 + \frac{1}{2} A_\xi \right) \frac{d\eta^2}{d\xi} + \\
+ \gamma \beta \frac{U^4}{g_+^-} A_\xi \frac{d^3 \eta^2}{d\xi^3} - \frac{\delta}{2} U^2 A_\xi \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \frac{7U^4}{(g_+^-)^2} \left(\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Одним из частных решений уравнения (2.4) является решение типа волн Стокса, которое можно записать в следующем виде:

$$\eta = a \cos(k\xi) + \mu a^2 \cos(2k\xi). \quad (2.5)$$

Подставив эту зависимость в уравнение (2.4) и сгруппировав члены первой степени по a , находим, что $U = c = \omega/k$. Квадратичные по a члены приводят к более громоздкой паде-аппроксимации коэффициента μ :

$$\mu = \frac{3\zeta + \omega_*^2(8\gamma - \delta/\beta^2) + \omega_*^4 6\delta/\beta^2 + \alpha\omega_*^2[4\zeta + 32\gamma\omega_*^2 + 3\omega_*^2(9\omega_*^2 - 1/c_*^2)\delta/\beta^2]}{12\omega_*^2[1 + \alpha(5\omega_*^2 - 1/c_*^2)]}. \quad (2.6)$$

В ситуациях, если жидкости очень глубоки или волны умеренно длинны (при $\alpha = 2/3$ и $h_1 = h_2$), данная формула дает результаты, приведенные в статье [4] (см. также монографию [5]).

Поведение коэффициента μ в области средних и коротких волн показано на рис. 2. Три периода волновых профилей представлены на рис. 3: в случае, когда длина волны и

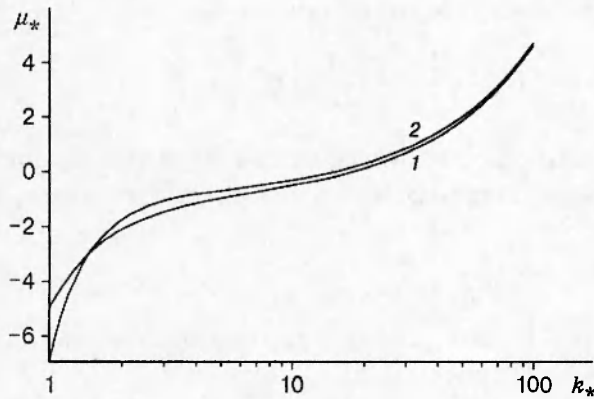


Рис. 2. Зависимость коэффициента $\mu_* = \mu H$ от волнового числа k_* при $h_2/h_1 = 3$ и $\rho_2/\rho_1 = 1,25$:
1, 2 — расчет по аппроксимации (2.6) с $\alpha = 0; 2/3$

глубины слоев имеют один порядок (рис. 3,а), и в случае, когда длина волны на порядок меньше глубин слоев (рис. 3,б). Видно, что при отрицательных значениях коэффициента μ более острыми являются впадины, а при положительных значениях μ — вершины.

3. Уединенные решения модельного уравнения. Вернемся к уравнению (2.4) и проинтегрируем его еще раз по переменной ξ . (Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям на бесконечностях, константу интегрирования положим равной нулю.) Таким образом, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(U^2 - g\delta A_\xi)\eta - \beta \frac{U^4}{g_+} A_\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \zeta U^2 \left(1 + \frac{1}{2} A_\xi\right) \eta^2 + \gamma \beta \frac{U^4}{g_+} A_\xi \frac{d^2\eta^2}{d\xi^2} - \frac{\delta}{2} U^2 A_\xi \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \frac{7U^4}{(g_+)^2} \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2 \right] = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим случай достаточно длинных возмущений ($kh_m < \varepsilon^{1/2}$). Тогда во втором и третьем членах уравнения (3.1) можно считать, что $A_\xi = 1$, а последние два члена целиком опустить. При этом все поправки, которыми мы пренебрегли, имеют порядок малости не ниже третьего. Если $\alpha = 2/3$, то в итоге получаем простейшее уравнение, учитывающее

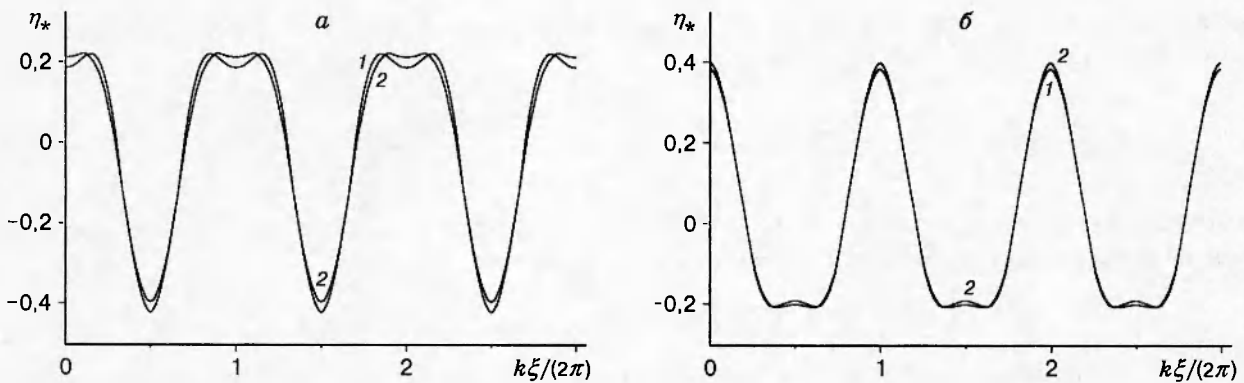


Рис. 3. Безразмерные профили периодических волн ($\eta_* = \eta/H$), вычисленные по формулам (2.5) и (2.6) при $h_2/h_1 = 3$, $\rho_2/\rho_1 = 1,25$, $a = 0,3$ и $k_* = 3$ (а) или $k_* = 33$ (б):

1, 2 — расчет по аппроксимации (2.6) с $\alpha = 0; 2/3$

слабую нелинейность и длинноволновую дисперсию возмущений:

$$(U^2 - g\delta)\eta - \frac{3}{2}\zeta U^2 \eta^2 - \beta \frac{U^2}{g_+} \left(U^2 - \frac{2}{3}g\delta \right) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0. \quad (3.2)$$

Решения данного уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби, т. е. они являются кноидальными волнами. Для уединенных возмущений, в частности, будем искать решение в форме

$$\eta = \eta_a / \text{ch}^2 \xi_s, \quad \xi_s = \xi / L. \quad (3.3)$$

Здесь L — характерный продольный размер волны. Тогда вторая производная $d^2\eta/d\xi^2$ выражается через квадрат гиперболического тангенса:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{2\eta}{L^2} (3\text{th}^2 \xi_s - 1). \quad (3.4)$$

Перепишем уравнение (3.2) с помощью подстановок (3.3) и (3.4) в виде

$$U^2 = g\delta + \frac{3\zeta U^2}{2\text{ch}^2 \xi_s} \eta + 2 \frac{\beta}{g_+} \frac{U^2}{L^2} \left(U^2 - \frac{2}{3}g\delta \right) (3\text{th}^2 \xi_s - 1). \quad (3.5)$$

Из этой формулы при $\xi = 0$ ($\text{th} \xi_s = 0$ и $\text{ch} \xi_s = 1$) находим равенство

$$U^2 = g\delta \left[1 + \frac{3U^2}{2g\delta} \zeta \eta_a - \frac{2\beta U^2}{g_+ L^2} \left(\frac{U^2}{g\delta} - \frac{2}{3} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Аналогично при $\xi \rightarrow \infty$ ($\text{th} \xi_s \rightarrow 1$ и $\text{ch} \xi_s \rightarrow \infty$) соотношение (3.5) дает

$$U^2 = g\delta \left[1 + \frac{4\beta U^2}{g_+ L^2} \left(\frac{U^2}{g\delta} - \frac{2}{3} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Сложив (3.6) с умноженным на 2 равенством (3.7), получим

$$U = c_0 / \sqrt{1 - \eta_a^*}, \quad \eta_a^* = \zeta \eta_a. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в выражение (3.7), найдем

$$L = \frac{2h_1 h_2 (\rho_1 + \rho_2)}{\chi} \sqrt{\frac{1 + 2\eta_a^*}{3\eta_a^* (1 - \eta_a^*)}}. \quad (3.9)$$

Зависимости (3.8) и (3.9) близки к соответствующим равенствам для солитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза [6]

$$U_1 = c_0 \left(1 + \frac{\eta_a^*}{2} \right) = U [1 + O(\varepsilon^2)], \quad L_1 = 2 \sqrt{\frac{h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{3\chi \eta_a^*}}. \quad (3.10)$$

Заметим также, что формулы (3.8) и (3.9) согласуются и с характеристиками для уединенных возмущений уравнения Буссинеска [7]

$$U_2 = c_0 \sqrt{1 + \eta_a^*} = U [1 + O(\varepsilon^2)], \quad L_2 = L_1 \sqrt{1 + \eta_a^*}. \quad (3.11)$$

Таким образом, скорости солитонов уравнений Кортевега — де Фриза и Буссинеска практически совпадают со значением для найденной волны (при одинаковых амплитудах), а некоторое расхождение их длин связано с величинами отношений плотностей и глубин слоев. Ранее при изучении установившихся волн также получено, что уединенное возмущение определяется скоростью U и длиной L_1 [8] или зависимостями (3.11) [9].

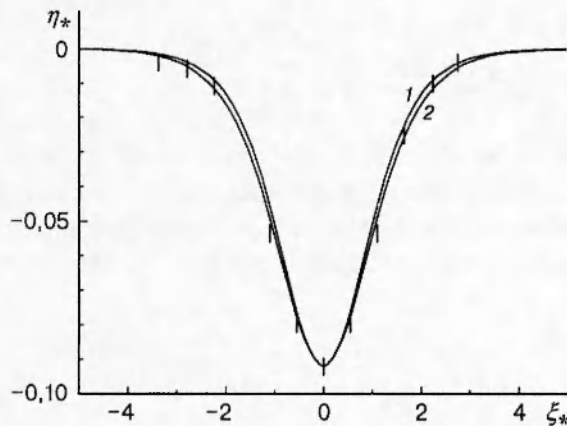


Рис. 4. Профиль уединенной волны ($\xi_* = \xi/H$) при $h_2/h_1 = 3$ и $\rho_2/\rho_1 = 1,25$:

1 — расчет по формулам (3.3) и (3.11); 2 — расчет по формулам (3.3), (3.8) и (3.9); вертикальные отрезки — опытные данные работы [3] с учетом погрешности измерений

На рис. 4 представлено сравнение формы уединенного возмущения, зарегистрированной в опытах [3], с приведенными выше аналитическими зависимостями. Видно, что все результаты хорошо согласуются между собой.

В фазовом пространстве решений уравнения (3.1) существует два положения равновесия, которые соответствуют решениям $\eta = \text{const}$: $\eta_0 = 0$ и $\eta_1 = 2(1 - g\delta/U^2)/(3\zeta)$. Проведем исследование типов этих особых точек. Пусть $\eta = \eta_j + \eta'$, где $j = 0$ или $j = 1$, а η' — бесконечно малая величина. Тогда линеаризованное уравнение (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\left(1 - \frac{1}{U_\delta^2} - 3\zeta\eta_j\right)\eta' = U_\beta^2(1 - 2\gamma\eta_j)\frac{d^2\eta'}{d\xi^2} - \alpha U_\beta^2 \left[\left(\frac{1}{U_\delta^2} + \zeta\eta_j\right)\frac{d^2\eta'}{d\xi^2} + U_\beta^2(1 - 2\gamma\eta_j)\frac{d^4\eta'}{d\xi^4} \right].$$

Здесь $U_\delta^2 = U^2/(g\delta)$ и $U_\beta^2 = U^2\beta/g_+$. Для простейшей модели ($\alpha = 0$) точка $\eta = \eta_1$ является седлом при $U_\delta^2 < 1$ и центром при $1 < U_\delta^2 < 4\gamma/(4\gamma - 3\zeta)$, а нулевое состояние покоя, наоборот, центром при $U_\delta^2 < 1$ и седлом при $U_\delta^2 > 1$. Слагаемым $d^4\eta'/d\xi^4$ можно пренебречь в случае достаточно длинных возмущений. Если $\alpha = 2/3$ (модель второго порядка точности), то нулевое положение равновесия будет центром для $2/3 < U_\delta^2 < 1$ и седлом для $U_\delta^2 > 1$, а точка $\eta = \eta_1$ — седлом для $U_\delta^2 < 1$ и центром для $1 < U_\delta^2 < (12\gamma - 2\zeta)/(12\gamma - 5\zeta)$. Верхнюю границу амплитуды уединенной волны также удается оценить с помощью последнего неравенства: $\eta_a < 1/(6\gamma - \zeta)$.

4. Переход возмущения с глубокой жидкости на мелкую. Рассмотрим распространение плоской линейной монохроматической волны с частотой ω в направлении роста координаты x : $\eta = a(x) \exp[i(\theta(x) - \omega t)]$. Это возможно, только когда глубины слоев (они меняются плавным образом) также зависят лишь от координаты x . Следовательно, уравнения (1.12) заметно упрощаются:

$$\left(1 + \frac{h_1}{g_+} A_\omega \omega^2\right) \omega^2 \eta + \frac{c}{h_1} \frac{dh_1}{dx} i \omega \eta + (-1)^l A_\omega \left(g h_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{h_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} \right) + \frac{\alpha \beta h_1 \omega^2}{g_+ h_1 h_2 \chi} \left[(-1)^l \left(g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) - \frac{c}{g_+} i \omega^3 \eta \right] \left(\rho_1 h_2^2 \frac{dh_1}{dx} + \rho_2 h_1^2 \frac{dh_2}{dx} \right) = 0. \quad (4.1)$$

При выводе уравнений (4.1) использовано выражение $(-1)^l \langle u_l \rangle = c\eta/h_1$. Эти уравнения сводятся к одному уравнению для η так же, как и в п. 2:

$$(1 + \omega_*^2 A_\omega) \omega^2 \eta + g\delta A_\omega \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[\frac{c}{h_1 h_2 \chi} i \omega \eta + \frac{\alpha \beta (\rho_1 + \rho_2) \omega^2}{g_+ \chi^2} \left(g_+ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{c}{g_+} i \omega^3 \eta \right) \right] \left(\rho_1 h_2^2 \frac{dh_1}{dx} + \rho_2 h_1^2 \frac{dh_2}{dx} \right) = 0. \quad (4.2)$$

В силу сделанного предположения $\partial\eta/\partial x = (\eta/a) da/dx + i\eta d\theta/dx$ и

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\eta}{a} \frac{d^2 a}{dx^2} - \eta \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + i \left(2 \frac{\eta}{a} \frac{da}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \eta \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right). \quad (4.3)$$

Пусть модуль производной функции $\theta(x)$ много больше, чем модуль производной функции $a(x)$. Тогда можно опустить первый член в правой части формулы (4.3). Эти выражения для производных позволяют переписать уравнение (4.2) в виде системы уравнений (разделяя его на действительную и мнимую части) для функций $a(x)$ и $\theta(x)$, определяющих возмущение:

$$(1 + \omega_{\pm}^2 A_{\omega}) \omega^2 a(x) = g\delta A_{\omega} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 a(x) + \frac{\alpha\beta(\rho_1 + \rho_2)}{\chi^2} \omega^2 \frac{da}{dx} \left(\rho_1 h_2^2 \frac{dh_1}{dx} + \rho_2 h_1^2 \frac{dh_2}{dx} \right); \quad (4.4)$$

$$g\delta A_{\omega} \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} a(x) + 2 \frac{da}{dx} \frac{d\theta}{dx} \right) + \left(\frac{c\omega}{h_1 h_2 \chi} (1 - \alpha\omega_*^4) a(x) + \frac{\alpha\beta(\rho_1 + \rho_2)}{\chi^2} \omega^2 a(x) \frac{d\theta}{dx} \right) \left(\rho_1 h_2^2 \frac{dh_1}{dx} + \rho_2 h_1^2 \frac{dh_2}{dx} \right) = 0. \quad (4.5)$$

В исследуемом приближении вторым слагаемым в правой части формулы (4.4) можно пренебречь, и тогда $d\theta/dx$ соответствует волновому числу k . Если $\rho_1 = 0$ и $h_1 = \text{const}$, то из дисперсионного соотношения имеем связь

$$\frac{dk}{dx} = - \frac{c\omega(1 + 2\alpha\omega_*^2)}{2gh_2^2(1 + \alpha\omega_*^2)^2} \frac{dh_2}{dx}.$$

Подставляя это выражение и $d\theta/dx = k$ в уравнение (4.5), приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными a и h

$$\frac{da_*}{a_*} = - \frac{dh_{2*}(1 + 2\alpha h_{2*})}{4h_{2*}(1 + \alpha h_{2*})[1 + h_{2*}(1 + \alpha h_{2*})]}. \quad (4.6)$$

Здесь $a_* = a(x)/a_{\infty}$; $h_{2*} = h_2 k_{\infty} = h_2 \omega^2/g$; a_{∞} — амплитуда волны при бесконечной глубине нижней жидкости (начальная амплитуда). Решением уравнения (4.6) является простая дробно-степенная зависимость

$$a_* = \left[1 + \frac{1}{h_{2*}(1 + \alpha h_{2*})} \right]^{1/4}. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) с $\alpha = 0$ получена в работе [10] для волн на свободной поверхности однородной жидкости.

Нахождение решений модели второго порядка точности можно осуществить и аналогично тому, как это сделано в статье [10]. Пусть $h_1 = h_2 = h$, тогда система линеаризованных уравнений (1.1), (1.10) сводится к одному уравнению для расхода жидкости в слое $q = \langle u_l \rangle h_l$:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - g_+^- h A_t \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{h}{g_+^-} A_t \frac{\partial^4 q}{\partial t^4} = 0.$$

Если $q = Q(x) \exp(i[\theta(x) - \omega t])$, то действительная часть данного уравнения вновь согласуется с дисперсионным соотношением, а его мнимая часть дает закон сохранения $k(x)Q^2(x) = \text{const}$. С помощью любого из уравнений (1.1) последний может быть переписан в следующей форме: $a^2(x)/k(x) = \text{const}$. Используя паде-аппроксимацию дисперсионного соотношения (1.5), приходим к такой же дробно-степенной зависимости

$$a_* = \left[1 + \frac{1}{h_*(1 + \alpha h_*)} \right]^{1/4}, \quad (4.8)$$

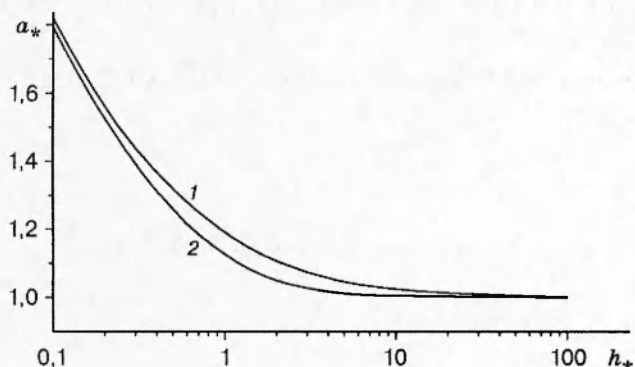


Рис. 5. Изменение безразмерной амплитуды волны при ее плавном переходе с глубоких слоев на мелкие:
1, 2 — расчет по формуле (4.8) с $\alpha = 0; 2/3$

где $h_* = hk_\infty = h\omega^2/g_+$. Сопоставление кривых при различных значениях α продемонстрировано на рис. 5.

Заключение. Выделим основные результаты данной работы.

1. Предложена дифференциальная модель второго порядка точности для двумерных слабонелинейных волн произвольной длины в двухслойной жидкости с пологими дном и крышкой. Ошибка аппроксимации фазовой скорости не превышает 2%.

2. Выведено эволюционное уравнение для прогрессивных квазистационарных возмущений, которое среди прочих обладает установившимися решениями типа волн Стокса. Найденная зависимость формы волны от частоты и параметров системы, имеющей горизонтальные границы, в предельных случаях дает известные результаты.

3. Достаточно длинные возмущения могут быть также кноидальными волнами. В частности, определены скорость и профиль уединенных возмущений, хорошо согласующиеся с характеристиками не только солитонов уравнений Кортевега — де Фриза и Буссинеска, но и с экспериментальными данными.

4. Исследована задача о плавном переходе линейной моногармонической волны с глубоких слоев на мелкие. Выполнено сравнение с результатами для возмущений свободной поверхности однородной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. А., Хабахпашев Г. А. Распространение слабонелинейных возмущений границы раздела двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 1. С. 125–131.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. Гаврилов Н. В. Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1988. № 4. С. 51–55.
4. Thorpe S. A. On the shape of progressive internal waves // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1968. V. 263. P. 563–614.
5. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
6. Djordjevic V. D., Redecopp L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // J. Phys. Oceanogr. 1978. V. 8, N 6. P. 1016–1024.
7. Хабахпашев Г. А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 6. С. 118–123.
8. Long R. R. Solitary waves in one- and two-fluid systems // Tellus. 1956. V. 8, N 4. P. 460–471.

9. Benjamin T. В. Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. 1966. V. 25, N 2. P. 241–270.
10. Пелиновский Е. Н. «Дифференциальная» модель волн на воде // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5. С. 1231–1234.

Поступила в редакцию 30/1 1998 г.
