

где E — модуль Юнга.

Приравняв правые части выражений (2), (3), получим

$$(4) \quad p - \sigma = 2E\alpha T_0.$$

Из условия равновесия элемента оболочки (фиг. 4) следует

$$\pi p(r)r^2 - \pi p(r+dr)(r+dr)^2 + 2\pi r dr \sigma = 0,$$

откуда

$$dp/dr = -2(p - \sigma)/r.$$

Подставляя сюда $(p - \sigma)$ из (4), имеем

$$dp/dr = -4E\alpha T_0/r,$$

откуда при нулевом наружном давлении

$$(5) \quad p(r) = 4E\alpha T_0 \ln \frac{R}{r} \text{ при } T_0 = (p - \sigma)/2\alpha E.$$

Таким образом, показано, что давление в центре шара может быть сколь угодно велико (но расходимость слабая, логарифмическая).

Наполнение сосуда до такого давления заканчивается при полном его прогреве и не требует повторных циклов. При охлаждении снаружи давление растет (из-за сжатия наружных оболочек), но потом, когда температура выравнивается, снова восстанавливается.

Оценим величину давления в стальном сосуде при $R/r = 100$.

Величина $p - \sigma = 2\tau$, где τ — прочность на сдвиг. Для стали примем $\tau = 500$ МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

При $R/r = 100$ по формулам (5) получаем $p(100) = 9200$ МПа при $T_0 \approx 200$ К.

Учет других эффектов (конечный объем свинца в прослойках, его расширение при плавлении, упрочнение стали под давлением и т. п.) сильно усложнит задачу, но расходимости давления при самозаполнении сосуда не устраняет. Учет сжимаемости материала слоев сосуда (стали) уменьшает величину давления при самозаполнении сосуда, при этом вопрос о расходимости давления в центре сосуда остается открытым.

Поступила 10 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. О прессе сверхвысокого давления. — ПМТФ, 1974, № 3.

УДК 539.374

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МИКРОНЕОДНОРОДНОСТИ

О. А. Волоховская, В. В. Подалков
(Москва)

Построение теории пластичности, удовлетворительно описывающей особенности поведения поликристаллических материалов, является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Закономерности пластического деформирования поликристаллического агрегата имеют статистическую

природу, так как являются результатом взаимодействия большого числа случайно ориентированных кристаллов. Данная работа — дальнейшее развитие результатов, полученных в [1—3].

В исследованиях подобного рода [4, 5], как правило, рассматривалось влияние «физической» микронеоднородности (упругой и пластической анизотропии кристаллитов). В настоящей же работе анализируется влияние как «физической», так и структурной неоднородности поликристаллического тела (связанной с разбросом составляющих его кристаллитов по размерам) на характер упругопластического деформирования.

1. Как известно, все реальные металлы являются поликристаллическими средами, т. е. представляют собой конгломераты хаотическим образом ориентированных субкристаллов (зерен), характеризующихся определенным пространственным расположением кристаллической решетки.

Для дальнейших исследований принимается физическая модель поликристалла, описанная в [1, 2]. Макроскопическое напряженно-деформированное состояние среды предполагается однородным, механизмом пластической деформации считается трансляционное скольжение в кристаллитах, образующих агрегат.

Известно [5, 6], что металлы могут испытывать значительные деформации без образования трещин, так что кристаллы, находившиеся в контакте друг с другом в недеформированном материале, сохраняют этот контакт на всем этапе деформирования. Это означает, что в каждой точке поликристаллического материала выполнены уравнения равновесия и условия совместности деформаций:

$$(1.1) \quad \nabla_j \sigma_{ij} = 0;$$

$$(1.2) \quad \mathcal{E}_{ijklmn} \nabla_m \nabla_n \varepsilon_{lm} = 0.$$

Здесь $\mathcal{E}_{ijklmn} = \delta_{ilm} \delta_{jkn}$, где δ_{ilm} — единичный псевдотензор Леви — Чевита, $\nabla_j = \partial/\partial x_j$.

На поверхности поликристалла выполнены соотношения

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle,$$

напряжения и деформации в зернах связаны законом Гука

$$(1.4) \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + e_{ij},$$

где e_{ij} — поле пластических деформаций; S_{ijkl} — тензор упругих податливостей зерна, зависящий от ориентации кристаллита и типа кристаллической решетки материала.

Определим связь между полями напряжений и несовместных деформаций в поликристалле, используя решение основной задачи теории упругости (1.1)—(1.3) в напряжениях. Подставляя (1.4) в (1.2), получим

$$(1.5) \quad B_{ijrs}(\nabla)(\sigma_{rs} - \langle \sigma_{rs} \rangle) = -f_{ij};$$

$$(1.6) \quad B_{ijrs}(\nabla) = \mathcal{E}_{ijklmn} C_{lhrs} \nabla_m \nabla_n;$$

$$(1.7) \quad f_{ij} = \mathcal{E}_{ijklmn} \nabla_m \nabla_n \varkappa_{lk};$$

$$(1.8) \quad \varkappa_{lk} = D_{lhrs} \sigma_{rs} + e_{lk} - \langle \varepsilon_{lk} \rangle + C_{lhrs} \langle \sigma_{rs} \rangle,$$

где C_{ijkl} — тензор упругих податливостей материала, предполагающийся известным; $D_{lhrs} = S_{lhrs} - C_{lhrs}$ — составляющая тензора S_{lhrs} , зависящая от ориентации зерна; \varkappa_{lk} — поле несовместных деформаций.

В работе [7] показано, что поле f_{ij} не может быть произвольным и должно удовлетворять калибровочному условию Кренера

$$(1.9) \quad \nabla_j f_{ij} = 0.$$

Непосредственной подстановкой (1.7) в (1.9) можно убедиться, что в данном случае это условие выполнено.

Определяя тензор Грина $R_{lkr_s}(\mathbf{r})$ для дифференциального оператора $B_{ijkl}(\nabla)$ из уравнения

$$B_{ijkl}(\nabla)R_{lkr_s}(\mathbf{r}) = (1/2)(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})\delta(\mathbf{r}), \\ R_{lkr_s}(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

из (1.5) найдем связь между напряжениями в зернах поликристалла и полем несовместности деформаций

$$(1.10) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) - \langle \sigma_{ij} \rangle = \int_V \mathcal{E}_{pqklmnp} \nabla_m R_{ijpq}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla_n \varkappa_{lk}(\mathbf{r}') dV'.$$

В соотношении (1.10) отброшен интеграл

$$J_{ij} = \int_{S_\infty} \mathcal{E}_{pqklmnp} R_{ijpq}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla_n \varkappa_{lk}(\mathbf{r}') n_m dS,$$

равный нулю, и учтен тот факт, что функция $\nabla_m \tilde{R}_{ijpq}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ регулярна в области V , где V — объем образца.

Для макроизотропной среды оператор $B_{ijkl}(\nabla)$ имеет вид

$$B_{ijkl}(\nabla) = (p_0 + 2s_0)\delta_{lk}(\nabla^2\delta_{ij} - \nabla_i\nabla_j) - 2s_0\nabla^2\delta_{il}\delta_{jk},$$

а тензор Грина R_{ijpq} определяется соотношением

$$(1.11) \quad R_{ijpq}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} [I_{ijpq}\nabla^2\rho - \zeta\delta_{pq}(\delta_{ij}\nabla^2\rho - \nabla_i\nabla_j\rho)].$$

Здесь

$$I_{ijpq} = -\frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}); \quad s_0 = \frac{4}{4\mu_0}; \quad \zeta = \frac{1}{4\nu_0} = 10g_0; \quad \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|;$$

λ_0, μ_0, ν_0 — параметры Ламэ и коэффициент Пуассона сплошной среды с полем упругих податливостей C_{ijkl} .

Соотношение (1.10) при R_{ijpq} , определяемом выражением (1.11), удовлетворяет уравнениям равновесия (1.1) и граничным условиям (1.3) и, следовательно, является решением основной задачи теории упругости для поликристалла.

Соотношение (1.10) является точным в том смысле, что получено без каких-либо допущений о виде поля несовместности и справедливо для всех зерен поликристалла.

2. Предположим, что все зерна поликристалла односвязны, содержат центры тяжести внутри себя и форма кристаллитов не зависит от ориентации кристаллографических осей. Тогда возможен переход от физической модели поликристалла с пространственным размещением кристаллитов к его статистической модели с усредненными зернами, различающимися только по ориентациям и размерам [1, 2]. Осредненные по Ω_l (т. е. множеству зерен, ориентации и размеры которых располагаются в бесконечно малой окрестности точки, соответствующей ориентации и размеру некоторого фиксированного зерна в пространстве ориентаций и размеров) поля несовместности в статистической модели среды оказываются изотропными. Поэтому в предположении об изотропии макроскопических упругих свойств поликристалла интеграл в правой части (1.10) может быть вычислен, и указанное уравнение примет вид

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle = L_{ijkl}\varkappa_{kl}(\omega, l),$$

где

$$(2.2) \quad L_{ijkl} = -\frac{2\mu_0}{3}[(1 + 4g_0)I_{ijkl} - (1 - 12g_0)J_{ijkl}], \\ \varkappa_{kl}(\omega, l) = \varkappa_{kl}(0|\omega, l), \quad J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl},$$

$\omega(\varphi, \psi, \theta)$ — ориентация зерна в пространстве углов Эйлера (φ, ψ, θ), l — характерный размер зерна.

Из соотношений (2.1) и (1.8) получим уравнение, связывающее поля напряжений и пластических деформаций в усредненном зерне с макроскопическим напряженно-деформированным состоянием поликристалла:

$$(2.3) \quad Q_{ijkl}\sigma_{kl} - L_{ijkl}e_{kl} = \xi_{ij};$$

$$(2.4) \quad Q_{ijkl} = I_{ijkl} - L_{ijrs}D_{rskl};$$

$$(2.5) \quad \xi_{ij} = (I_{ijkl} + L_{ijrs}C_{rskl})\langle\sigma_{kl}\rangle - L_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle,$$

где ξ_{ij} — параметрический тензор макроскопического напряженно-деформированного состояния.

Для получения уравнения пластических сдвигов в эффективном зерне поликристалла обратимся к закону упрочнения [2]

$$(2.6) \quad \tau_0^\alpha = \tau_0(1 + a_{\alpha\beta}w_\beta),$$

где τ_0 — критическое касательное напряжение в недеформированном кристалле; τ_0^α — разрешающее касательное напряжение в системе скольжения с номером α ; $w_\alpha = \int |d\lambda|$ — интегральный сдвиг в системе α ; $a_{\alpha\beta}$ — элемент матрицы упрочнения. Эксперименты [6] показывают, что критическое касательное напряжение τ_0 зависит от величины зерна. Вид этой зависимости может быть определен с помощью известного уравнения Холла — Петча для макроскопического предела упругости поликристалла

$$\tau_* = \tau_0^* + k_*l^{-n},$$

где l — размер зерна; τ_0^* — напряжение трения, равное пределу упругости поликристалла, состоящего из одного монокристалла; k_* — постоянная материала, связанная с распространением деформации через границы зерен. Показатель n для ОЦК-металлов обычно равен 0,5, а для ГЦК- и ГПУ-металлов может принимать значения 0,5 и 1,0.

Для поликристаллического материала предел упругости при сдвиге не совпадает с пределом упругости отдельно взятого зерна вследствие упругой анизотропии составляющих агрегат кристаллитов. Отношение макроскопического и локального пределов упругости $\eta = \tau_*/\tau_0$ зависит от типа кристаллической решетки и упругих постоянных кристалла [1, 8].

Для наиболее распространенных типов кристаллических решеток параметр η определяется соотношениями, полученными в [1, 8]. Величина η не зависит от величины зерна и является константой материала.

Приведенные соображения позволяют определить зависимость τ_0 от размера зерна

$$(2.7) \quad \tau_0(l) = \frac{1}{\eta} (\tau_0^* + k_*l^{-n}).$$

Переходя в соотношении (2.6) от конечных величин к их приращениям и подставляя в него σ_{ij} из (2.3) с учетом правила преобразования тензоров при переходе от кристаллографических осей к осям, связанным с системами скольжения кристалла [2], получим уравнение пластических сдвигов в эффективном зерне с размером l и ориентацией ω :

$$(2.8) \quad m_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\beta = w_{ij}^\alpha\dot{\xi}_{ij}.$$

Здесь

$$m_{\alpha\beta} = t_{ij}^{\alpha} W_{ijkl} t_{kl}^{\beta} + \tau_0(l) a_{(\alpha)(\beta)} \operatorname{sign} \tau_{(\alpha)} \operatorname{sign} \tau_{(\beta)};$$

$$W_{ijkl} = 2(L_{ijrs} D_{rspq} - I_{ijpq})^{-1} L_{pqik}; \quad w_{ij}^{\alpha} = t_{kl}^{\alpha} (I_{klij} - L_{klpq} D_{pqij})^{-1};$$

t_{ij}^{α} — матрица преобразования координат от кристаллографических осей к осям, связанным с системой скольжения с номером α в эффективном зерне; λ_{α} — пластический сдвиг в системе. По индексам, заключенным в скобки, суммирование не проводится. Оператор (\cdot) означает переход от конечной величины к ее бесконечно малому приращению.

При рассмотрении неупрочняющегося материала ($a_{\alpha\beta} = 0$) может возникнуть впечатление, что пластические сдвиги, определяемые из системы уравнений (2.8), не зависят от размера эффективного зерна. Однако в действительности это не так, поскольку указанная система уравнений должна решаться при условии $\tau_{\alpha} = \tau_0^{\alpha}(l)$.

Определяя пластические сдвиги из уравнения (2.8), из соотношений (1.4) и (2.3) с учетом известной связи между пластическими сдвигами и деформациями найдем зависимость между $\dot{\sigma}_{ij}$ и параметрическим тензором макроскопического напряженно-деформированного состояния

$$(2.9) \quad \dot{\sigma}_{ij}(\omega, l) = M_{ijrs}(\omega, l) \dot{\xi}_{rs},$$

где

$$(2.10) \quad M_{ijrs}(\omega, l) = Q_{ijmn}^{-1} [2L_{mnpq} t_{pq}^{\alpha} m_{\alpha\beta}^{-1}(\omega, l) t_{kl}^{\beta} Q_{klrs}^{-1} + I_{mnrsl}].$$

В соотношении (2.10) суммирование проводится по тем значениям α и β , которые соответствуют активным системам скольжения [2].

Для микрооднородного материала ($D_{ijpq} = 0$) при условии, что τ_0 не зависит от размера зерна, уравнение (2.9) совпадает с известным уравнением Кренера — Будянского — Ву [5].

Связь между макроскопическими напряжениями и деформациями в поликристаллическом материале (закон пластичности) определим, осредняя соотношение (2.9) по области распределения размеров зерен и множеству ориентаций с заданной плотностью вероятности $p(\omega, l)$.

С учетом соотношения (2.5) получим

$$\langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle = \chi_{ijrs} \langle \dot{\epsilon}_{rs} \rangle,$$

$$\chi_{ijrs} = \langle M_{ijkl}(\omega, l) \rangle_{\omega, l} (I_{klmn} - L_{klpq} C_{pqmn})^{-1} \langle M_{mnuv} \rangle L_{uvrs},$$

где χ_{ijrs} — тензор мгновенных пластических модулей поликристалла на данном этапе истории деформирования. Вид тензора χ_{ijrs} зависит от траектории точки в пространстве деформаций (или напряжений).

3. Рассмотрим расчет кривых деформирования для алюминия чистоты 99,99%. Пусть распределение зерен в агрегате по ориентациям и размерам задается плотностью вероятности

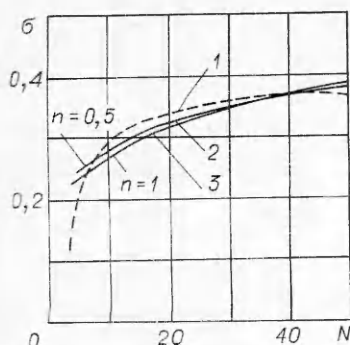
$$(3.1) \quad p(\omega, l) = p_1(\omega) p_2(l), \quad p_1(\omega) = 1/8\pi^2$$

$$(0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

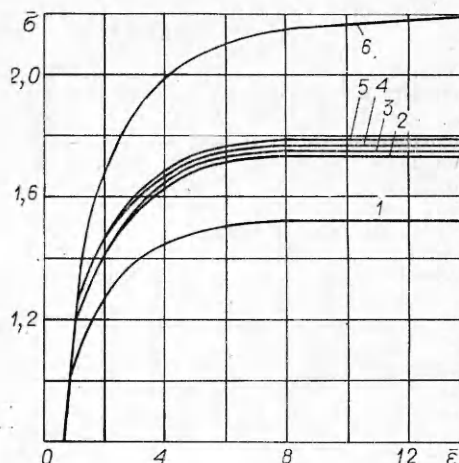
$$p_2(l) = \frac{c}{\sqrt{2\pi d}} e^{-\frac{(l-l_1)^2}{2d}} \quad (l_1 \leq l \leq l_2),$$

где $l_1 = 0,1445$ мм; $l_2 = 0,353$ мм; $\langle l \rangle = 0,2473$ мм; c — нормировочная константа, зависящая от d .

Для определения констант τ_0^* и $\dot{\kappa}_{\pm}$ в соотношении (2.8) была использована кривая I (фиг. 1), соответствующая экспериментальной зависимости предела упругости алюминия от среднего размера зерна [6]. Кривые



Ф и г. 1



Ф и г. 2

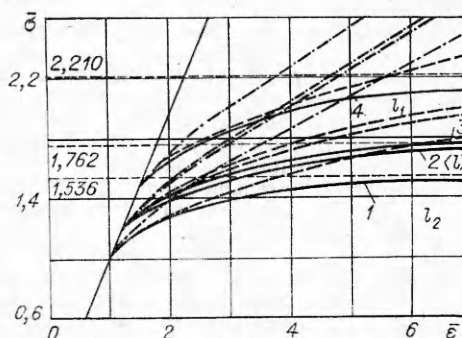
2 и 3 соответствуют аппроксимации экспериментальных данных зависимостью Холла — Петча для показателей степени $n = 0,5$ и $1,0$ соответственно. Из графика следует, что кривая Холла — Петча с показателем степени $n = 0,5$ лучше аппроксимирует экспериментальную кривую. Это согласуется также с экспериментальными данными [6]. С учетом вышесказанного было найдено $\tau_0^* = 0,066 \text{ кг/мм}^2$, $k_* = 0,122 \text{ кг/мм}^{3/2}$.

С целью упрощения вычислений расчет кривых деформирования проводился для случая простого растяжения. Результаты расчетов для предложенной модели поликристаллического материала при идеально пластических зернах представлены на фиг. 2 в координатах $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$, $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, где σ_0 и ϵ_0 — предел упругости и соответствующая ему упругая деформация поликристалла, состоящего из зерен размера l_2 .

Кривая 1 характеризует поведение кристаллитов, размер которых отвечает правому концу интервала распределения (крупные зерна), 6 — левому концу (мелкие зерна). Поведение зерен наиболее вероятного размера $\langle l \rangle$ характеризует зависимость 2. Кривые 3—5 представляют собой диаграммы деформирования поликристаллического агрегата, распределение кристаллитов по размерам в котором описывается плотностью вероятности (3.1) с различными значениями среднеквадратичного отклонения: $\sqrt{\bar{d}} = 0,025$, $\sqrt{\bar{d}} = 0,05$, $\sqrt{\bar{d}} = 0,1$ соответственно.

Влияние изотропного упрочнения (по Тейлору) на вид диаграмм деформирования поликристалла отражает фиг. 3, где кривые 1—4 соответствуют кривым 1, 2, 5, 6 фиг. 2. Штриховые линии отвечают значению величины $b/G = 0,02$ (b — коэффициент изотропного упрочнения, G — модуль сдвига), штрихпунктирные — $b/G = 0,10$.

Из приведенных зависимостей следует, что на поведение поликристаллического агрегата, состоящего из кристаллитов различного размера, основное влияние оказывает средний размер зерна. Зависимость же диаграммы деформирования от характера распределения зерен по размерам оказывается незначительной.



Ф и г. 3

Поступила 23 X 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Волоховская О. А., Подалков В. В. Микронапряжения и начальная граница пластичности в поликристаллическом материале.— Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение, 1977, № 10.
2. Волоховская О. А. К вопросу о пластичности поликристаллических материалов.— Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение, 1977, № 11.
3. Волоховская О. А., Подалков В. В. Об определении макроскопического предела упругости в статистической модели поликристаллического материала.— В кн.: Тезисы докладов Всесоюз. конф. по проблемам оптимизации и надежности в строительной механике. Вильнюс, 1979.
4. Костюк А. Г. Статистическая теория пластичности поликристаллического материала.— Инж. журнал. МТТ, 1968, № 6.
5. Лин Т. Н. Физическая теория пластичности.— В сб.: Новое в зарубежной науке. № 7. М.: Мир, 1976.
6. Хонникомб Р. Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972.
7. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1968.
8. Костюк А. Г. Начальная поверхность текучести поликристаллического материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.

УДК 532.5.51

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимирск

(Новосибирск)

Параметрический резонанс — один из распространенных типов неустойчивости механических систем. Несколько более широкий класс явлений называют параметрически возбуждаемыми колебаниями. Математическое определение этого класса колебаний обычно дается [1] для систем, уравнения движения которых сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям по времени. Параметрические колебания связаны с периодической зависимостью от времени коэффициентов (параметров) этих уравнений. Такие колебания отличаются от вынужденных, для которых явная зависимость от времени содержится в уравнениях только аддитивно, в виде периодических сил. Стандартным примером уравнений параметрических колебаний является уравнение Матье и его обобщения. Первым исследованием по параметрическим колебаниям была экспериментальная работа Фарадея [2], в которой изучались колебания свободной поверхности жидкости в сосуде. Однако позднее развивались в основном приложения к механике твердых и упругих тел [1, 3, 4]. Исключением является задача о колебаниях свободной поверхности жидкости в вертикально колеблющемся сосуде. Было показано [5—7], что смещение свободной поверхности в линейном приближении сводится к уравнению Матье и, следовательно, существуют резонансные частоты, при которых поверхность оказывается неустойчивой. Учет вязкости в этой задаче приведен в [8]. Только в последнее десятилетие начаты исследования по параметрической неустойчивости более сложных течений. В [9, 10] изучался параметрический резонанс в задачах конвекции. В [11—14] исследовалась устойчивость волн Россби. Работы [15, 16] посвящены неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости. В [15] приведен ряд соображений о возможности роста мелкомасштабных возмущений на фоне внутренней волны. В [16] содержится теоретическое исследование параметрической неустойчивости плоской внутренней волны в приближении Буссинеска. Показано, что волна конечной амплитуды может быть неустойчивой. В пределе малых амплитуд параметрическая неустойчивость переходит в известные [17] резонансные взаимодействия волн.

В данной работе изучается параметрический резонанс в стратифицированной жидкости. В случаях вертикально колеблющихся сосуда с жидкостью и горизонтального плоскопараллельного течения получены условия неустойчивости. Показано, что неустойчивость такого же сорта имеет место во внутренних волнах. Здесь важна мысль о сходстве физических условий движения жидкости в колеблющемся сосуде и в волне. Различия состоят в том, что колебания в вол-