

УДК 551.466.3

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ НА ДИНАМИКУ ВИХРЕЙ

А. А. Зайцев, А. И. Руденко*

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236041 Калининград

* Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота,
236029 Калининград
E-mail: alex-rudenko@bk.ru

В рамках двумерной задачи рассмотрено движение вихря вблизи границы произвольной формы. Получены интегрируемые дифференциальные уравнения движения. Выведены две формы алгебраического уравнения траекторий движения вихря. Рассмотрены примеры движения вихря вблизи прямолинейной границы, в канале, в угловой области, в окрестности плоского выступа, в круглом бассейне и вблизи параболической границы.

Ключевые слова: поле скоростей течений, уравнения движения вихря, конформные отображения, алгебраические уравнения траекторий вихря.

Введение. Вихревые движения принадлежат к числу наиболее широко распространенных явлений, оказывающих влияние на различные процессы. Основные положения активно развиваемой теории этих движений изложены в [1–11]. Одним из наиболее полно исследованных разделов теории является теория взаимодействия вихревых прямолинейных нитей [1–3, 5, 6, 9, 10]. Поскольку в этом случае возникают плоскопараллельные течения, теория взаимодействия вихревых нитей является двумерной.

Проблема взаимодействия вихрей с границами различной формы представляет интерес, однако содержательной теории этого взаимодействия, по-видимому, пока не существует. Например, в [5] имеется следующее замечание. Взаимодействие вращающихся в противоположных направлениях вихрей, модули интенсивностей которых одинаковы (вихревой дублет), приводит к поступательному движению этой пары с постоянной скоростью, обратно пропорциональной расстоянию между вихрями. При этом средняя линия между ними оказывается линией тока. Поскольку граница является линией тока, можно сделать вывод, что течение, создаваемое одиночным вихрем вблизи границы, отражается от нее. Отраженное течение можно рассматривать как течение, создаваемое мнимым вихрем с интенсивностью противоположного знака, центр которого расположен в симметричной точке. Вихрь попадает в отраженное течение и начинает двигаться параллельно границе с постоянной скоростью, обратно пропорциональной расстоянию до нее. В случае границ, имеющих сложную форму, решение задачи взаимодействия существенно затруднено.

Целью настоящей работы является исследование данной задачи в двумерной постановке. При анализе используются свойства функции Грина двумерной задачи Дирихле [12–17].

Свойства функции Грина двумерной задачи Дирихле. Функцией Грина задачи Дирихле для области D называется решение $u = g(z, z_0)$ уравнения $\Delta u = -\delta(x - x_0, y - y_0)$, которое обращается в нуль на границе D .

Согласно [12–15] справедлива формула

$$g(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |w(z, z_0)|, \quad (1)$$

где $w(z, z_0)$ — конформное отображение на единичный круг $|w| < 1$, при котором точка z_0 отображается в центр круга. Справедливы следующие формулы:

$$w(z, z_0) = \frac{w(z) - w(z_0)}{1 - \overline{w(z_0)} w(z)}; \quad (2)$$

$$w(z, z_0) = \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) - \overline{h(z_0)}} \quad (3)$$

($w(z)$ — фиксированное конформное отображение области D на единичный круг $|w| < 1$ [14, 15]; $h(z)$ — фиксированное конформное отображение области D на верхнюю полу-плоскость). Выражение (2) является следствием известной формулы для конформных автоморфизмов единичного круга. Нетрудно проверить, что функция (3) также является конформным отображением области D на единичный круг.

Поле скоростей течений, создаваемых вихрем в односвязной области. Ставится следующая задача: определить траекторию двумерного точечного вихря (его комплексная координата обозначается z_0) с интенсивностью k в ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Для вывода уравнения динамики вихря в односвязной области потребуется аналитическое выражение для поля скоростей, создаваемого вихрем в этой области. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для комплексного потенциала и комплексной скорости течений, создаваемых вихрем с интенсивностью k в области D , имеют место формулы*

$$W(z) = \frac{k}{2\pi i} \ln w(z, z_0); \quad (4)$$

$$V = -\frac{k}{2\pi i} \frac{\overline{w'(z, z_0)}}{\overline{w(z, z_0)}}. \quad (5)$$

Доказательство. Комплексный потенциал должен удовлетворять следующим двум условиям:

1) иметь представление

$$W(z) = \frac{k}{2\pi i} \ln(z - z_0) + W_1(z) \quad (6)$$

(первое слагаемое является потенциалом течения, создаваемого вихрем в безграничной среде, а второе слагаемое, обусловленное влиянием границы, — аналитической функцией в области D);

2) иметь мнимую часть $\text{Im } W(z)$, которая обращается в нуль на границе области D .

Покажем, что выражение (4) действительно удовлетворяет обоим условиям. Из определения функции $w(z, z_0)$ следует, что она имеет простой нуль в точке z_0 , т. е. справедливо представление

$$w(z, z_0) = (z - z_0)w_0(z, z_0),$$

где функция $w_0(z, z_0)$ является аналитической в области D и не обращается в нуль. Следовательно, функция $\ln w_0(z, z_0)$ также будет аналитической в области D . Тогда

$$W(z) = \frac{k}{2\pi i} \ln w(z, z_0) = \frac{k}{2\pi i} \ln((z - z_0)w_0(z, z_0)) = \frac{k}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{k}{2\pi i} \ln w_0(z, z_0)$$

и имеет место представление потенциала в виде (6), поскольку второе слагаемое в данной формуле является аналитической функцией в области D . Таким образом, условие 1 выполняется.

Проверим выполнение условия 2. Согласно принципу соответствия границ при конформных отображениях из определения представляющей функции $w(z, z_0)$ следует равенство $|w(z, z_0)| = 1$ на границе области D . Обозначим через θ аргумент функции $w(z, z_0)$. Тогда на границе области D $w(z, z_0) = \exp(i\theta)$. Из этого равенства и формулы (4) получаем значение комплексного потенциала на границе области D $W = k\theta/(2\pi)$. Следовательно, на границе $\text{Im } W = 0$. Таким образом, условие 2 также выполняется и справедливость формулы (4) полностью доказана. С использованием (4) получаем равенство (5). Теорема доказана.

Из теоремы 1 и формул (2), (3) соответственно следует, что комплексная скорость течения, создаваемого вихрем, выражается через конформные отображения на единичный круг и верхнюю полуплоскость по формулам

$$V = -\frac{k}{2\pi i} \frac{(1 - |w(z_0)|^2)w'(z)}{(\overline{w(z)} - \overline{w(z_0)})(1 - w(z_0)\overline{w(z)})}; \quad (7)$$

$$V = -\frac{k}{2\pi i} \frac{(h(z_0) - \overline{h(z_0)})h'(z)}{(\overline{h(z)} - \overline{h(z_0)})(\overline{h(z)} - \overline{h(z_0)})}. \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения движения вихря вблизи границы. С помощью формул (5), (7), (8) можно получить уравнения движения вихря с интенсивностью k в области D . Например, из формулы (5) находим скорость отраженного течения в точке z

$$V_0 = -\frac{k}{2\pi i} \left(\frac{\overline{w'(z, z_0)}}{w(z, z_0)} - \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right). \quad (9)$$

Формально для этой функции точка $z = z_0$ является особой. Однако эта особенность устранимая. Для того чтобы найти значение скорости V_0 в точке z_0 , нужно вычислить предел

$$H = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{w'(z, z_0)}{w(z, z_0)} - \frac{1}{z - z_0} \right).$$

Используя ряды Тейлора для функции $w(z, z_0) = 0$ и ее производной и учитывая, что $w(z_0, z_0), w'(z_0, z_0) \neq 0$, получаем

$$w(z, z_0) = w_z(z_0, z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} w_{zz}(z_0, z_0)(z - z_0)^2 + o((z - z_0)^2),$$

$$w_z(z, z_0) = w_z(z_0, z_0) + w_{zz}(z_0, z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

С помощью данных выражений находим

$$H = \frac{w_{zz}(z_0, z_0)}{2w_z(z_0, z_0)}.$$

Подставляя это значение в равенство (9), при $z = z_0$ получаем

$$V_0 = -\frac{k}{4\pi i} S(z_0, \bar{z}_0), \quad (10)$$

где

$$S(z_0, \bar{z}_0) = \overline{R(z_0, z_0)}, \quad R(z, z_0) = \frac{w_{zz}(z, z_0)}{w_z(z, z_0)} = (\ln w_z(z, z_0))_z. \quad (11)$$

Поскольку скорость вихря совпадает с местной скоростью отраженного течения, уравнение движения вихря в области D имеет вид

$$\dot{z}_0 = -\frac{k}{4\pi i} S(z_0, \bar{z}_0). \quad (12)$$

Более целесообразно использовать два других выражения для величины S в формуле (12), которые получаются с помощью (2), (3), (10), (11). В результате находим две новые формы уравнения движения вихря вблизи границы:

$$\dot{z}_0 = -\frac{k}{4\pi i} \left(\frac{\overline{w''(z_0)}}{\overline{w'(z_0)}} + 2 \frac{w(z_0)\overline{w'(z_0)}}{1 - |w(z_0)|^2} \right); \quad (13)$$

$$\dot{z}_0 = -\frac{k}{4\pi i} \left(\frac{\overline{h''(z_0)}}{\overline{h'(z_0)}} + \frac{2\overline{h'(z_0)}}{h(z_0) - \overline{h(z_0)}} \right). \quad (14)$$

Две формы алгебраического уравнения линий в односвязной области, по которым движется вихрь. Покажем, что уравнения движения вихря интегрируются, в результате чего получаются две формы алгебраического уравнения линий, по которым движутся вихри вблизи границы. Уравнение (13) выражается через конформное отображение на единичный круг, а уравнение (14) — через конформное отображение на верхнюю полуплоскость.

Из уравнения (12) и комплексно-сопряженного к нему уравнения путем исключения дифференциала dt получаем

$$\overline{S(z_0, \bar{z}_0)} dz_0 + S(z_0, \bar{z}_0) d\bar{z}_0 = 0. \quad (15)$$

При использовании уравнения движения в форме (13) выражение (15) принимает вид

$$\left(\frac{w''(z_0)}{w'(z_0)} + 2 \frac{\overline{w(z_0)} w'(z_0)}{1 - |w(z_0)|^2} \right) dz_0 + \left(\frac{\overline{w''(z_0)}}{\overline{w'(z_0)}} + 2 \frac{w(z_0)\overline{w'(z_0)}}{1 - |w(z_0)|^2} \right) d\bar{z}_0 = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) является уравнением в полных дифференциалах, так как его левая часть есть дифференциал функции $-2 \ln(1 - |w(z_0)|^2/|w'(z_0)|)$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть вихрь движется в односвязной области D , которая отображается на единичный круг с помощью функции $w(z)$. Тогда уравнение траектории этого вихря имеет вид

$$\frac{1 - |w(z_0)|^2}{|w'(z_0)|} = a, \quad (17)$$

где a — некоторая положительная константа.

Из уравнения (17) не следует закон движения вихря, т. е. зависимость $z_0 = z_0(t)$. Однако в некоторых случаях эту зависимость можно получить следующим образом. Выражая в уравнении (17) \bar{z}_0 через z_0 и подставляя полученное уравнение в дифференциальное уравнение (16), имеем уравнение вида $\dot{z}_0 = -kS_0(z_0)/(4\pi i)$, представляющее собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Если это уравнение интегрируется в явном виде и задача обращения интеграла разрешима, то получим закон движения вихря.

При использовании другой формы представления потенциала при выводе уравнений траекторий используется конформное отображение на верхнюю полуплоскость. В результате получаем аналогичное (16) уравнение

$$\left(\frac{h''(z_0)}{h'(z_0)} - \frac{2h'(z_0)}{h(z_0) - \overline{h(z_0)}} \right) dz_0 + \left(\frac{\overline{h''(z_0)}}{\overline{h'(z_0)}} + \frac{2\overline{h'(z_0)}}{h(z_0) - \overline{h(z_0)}} \right) d\bar{z}_0 = 0,$$

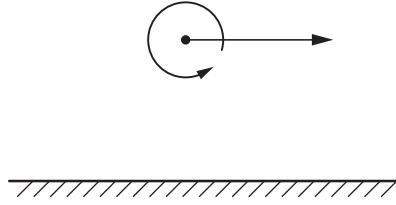


Рис. 1. Движение вихря, вращающегося против часовой стрелки, вблизи прямолинейной границы

которое также является уравнением в полных дифференциалах, поскольку его левая часть — дифференциал функции $-2 \ln ((h(z_0) - \overline{h(z_0)})/|h'(z_0)|)$. Тогда

$$\frac{h(z_0) - \overline{h(z_0)}}{|h'(z_0)|} = 2di, \tag{18}$$

где d — действительная константа.

Движение вихря вблизи прямолинейной границы. Рассмотрим случай, когда область D представляет собой полуплоскость $\text{Im } z > 0$. В данном случае используем формулу (18), полагая $h(z) = z$, $h'(z) = 1$. В результате получаем

$$z_0 - \bar{z}_0 = 2di, \tag{19}$$

или

$$\text{Im } z_0 = d, \tag{20}$$

где d — расстояние от вихря до границы D . Из формулы (20) следует, что это расстояние остается неизменным и вихрь движется параллельно границе.

Определим закон движения вихря. Заметим, что уравнение движения (14) с учетом равенства (19) принимает вид $\dot{z}_0 = k/(4\pi d)$. Интегрируя полученное уравнение с учетом равенства (20), находим

$$z_0 = v_0 t + di, \quad v_0 = k/(4\pi d). \tag{21}$$

Здесь и далее при интегрировании несущественная действительная постоянная полагается равной нулю, что соответствует определенному выбору начала отсчета времени либо начала координат.

Формула (21) показывает, что вблизи границы вихрь, вращающийся против часовой стрелки, движется вправо (если смотреть со стороны границы) (рис. 1), а вихрь, вращающийся по часовой стрелке, — влево. Скорость движения обратно пропорциональна расстоянию до границы, т. е. чем ближе вихрь к границе, тем быстрее он движется.

Движение вихря в канале. Исследуем движение вихря в полосе $0 < \text{Im } z < d$, используя формулу (18). В этом случае

$$h(z) = \exp\left(\frac{\pi z}{d}\right), \quad h'(z) = \frac{\pi}{d} \exp\left(\frac{\pi z}{d}\right), \quad |h'(z)| = \frac{\pi}{d} \exp\left(\frac{\pi x}{d}\right),$$

поэтому из формулы (19), в которой выполнена замена d на d_0 , следует уравнение для траекторий

$$\exp\left(\frac{\pi z_0}{d}\right) - \exp\left(\frac{\pi \bar{z}_0}{d}\right) = \frac{2\pi d_0}{d} i \exp\left(\frac{\pi x_0}{d}\right),$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi y_0}{d}\right) = \frac{\pi d_0}{d}.$$

Тогда $y_0 = \text{const}$.

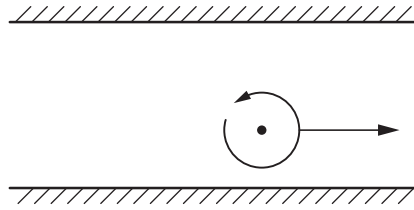


Рис. 2. Движение вихря в канале

Интегрируя уравнение движения вихря, получим зависимость его координаты z_0 от времени. В рассматриваемом случае

$$\dot{z}_0 = \frac{k}{4d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi y_0}{d} \right).$$

Отсюда также следует, что $y_0 = \operatorname{const}$ и уравнение траектории имеет вид

$$z_0 = \frac{k}{4d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi y_0}{d} \right) t + y_0 i. \quad (22)$$

Анализ уравнения (22) позволяет выделить три режима движения вихря.

1. В случае $0 < y_0 < d/2$, если вихрь вращается против часовой стрелки (по часовой стрелке), он движется в положительном (отрицательном) направлении параллельно границам канала (рис. 2).

2. В случае $y_0 = d/2$ вихрь неподвижен (застывает на месте).

3. В случае $d/2 < y_0 < d$, если вихрь вращается против часовой стрелки (по часовой стрелке), он движется в отрицательном (положительном) направлении параллельно границам канала.

Движение вихря в угловой области. Пусть область D представляет собой угловую область $0 < \arg z < \varphi$, $0 < \varphi \leq 2\pi$. При $h(z) = z^p$, $h'(z) = pz^{p-1}$, $|h'(z)| = p|z|^{p-1}$, $p = \pi/\varphi$ из формулы (18) следует уравнение

$$z_0^p - \exp(-2\pi pi) \bar{z}_0^p = 2pdi|z_0|^{p-1}. \quad (23)$$

Для того чтобы изучить траектории движения вихря, перейдем к полярным координатам:

$$z_0 = r \exp(i\theta). \quad (24)$$

Тогда уравнение (23) после замены в нем pd на d принимает вид

$$r \sin(p\theta) = d, \quad 0 < \theta < \varphi = \pi/p. \quad (25)$$

Так как в данном случае $0 < p\theta < \pi$, то $\sin(p\theta) > 0$. Следовательно, $d > 0$.

Траекториями вихря являются линии, подобные гиперболам, асимптотами которых являются границы угловой области (рис. 3). Заметим, что d есть расстояние от вихря до угловой точки в момент наибольшего приближения к ней.

Определим зависимости r и θ от времени t . Для вывода дифференциального уравнения движения вихря используем уравнение (14). Выполнив необходимые расчеты, получаем уравнение движения

$$\dot{z}_0 = -\frac{k}{4\pi i} \left(\frac{p-1}{\bar{z}_0} - \frac{2p}{\bar{z}_0 - \exp(2\pi pi) z_0^p \bar{z}_0^{1-p}} \right). \quad (26)$$

Для интегрирования (26) используем представление (24). Подставляя (24) в уравнение (26), сокращая обе части равенства на $\exp(i\theta)$ и отделяя действительные и мнимые части, получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{r} = \frac{pk}{4\pi r} \operatorname{ctg}(p\theta), \quad \dot{\theta} = -\frac{k}{4\pi r^2}. \quad (27)$$

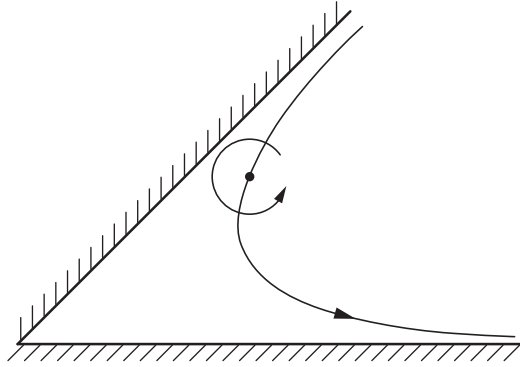


Рис. 3

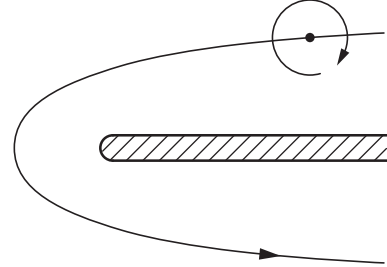


Рис. 4

Рис. 3. Движение вихря, вращающегося против часовой стрелки, в угловой области

Рис. 4. Движение вихря, вращающегося по часовой стрелке, в окрестности плоского выступа

Найдем зависимость $r(t)$ путем интегрирования первого уравнения в (27) с помощью соотношения (25). Вследствие симметрии траекторий вихря относительно осевой линии угловой области (линии $\theta = \varphi/2$) достаточно рассмотреть случай $0 < \theta < \varphi/2$. В силу неравенства $\operatorname{ctg}(p\theta) > 0$ и соотношения (25) получаем $\operatorname{ctg}(p\theta) = \sqrt{r^2 - d^2}/d$, поэтому первое уравнение в (27) сводится к уравнению $\dot{r} = pk\sqrt{r^2 - d^2}/(4\pi dr)$, которое интегрируется путем разделения переменных. В результате получаем зависимость

$$r = \sqrt{p^2 k^2 t^2 + 16\pi^2 d^4}/(4\pi d) \tag{28}$$

(начало отсчета времени выбрано таким образом, чтобы при $t = 0$ выполнялось условие $\min r = d$).

Определяя предельное расстояние d_0 от вихря до границы области при $t \rightarrow +\infty$, находим

$$d_0 = \varphi d/\pi. \tag{29}$$

Из формулы (29) следует, что если угол раствора сектора меньше развернутого угла (этот случай соответствует движению вихря в заливах), то вихрь приближается к границе на предельно малое расстояние. Если угол раствора больше развернутого угла (этот случай соответствует движению вихря в окрестности мыса), то вихрь сначала приближается к вершине угла, а затем начинает удаляться от границы области.

С помощью уравнений (27) и соотношения (25) несложно найти зависимость модуля скорости вихря от расстояния до угловой точки области:

$$|V| = k\sqrt{p^2 r^2 + (1 - p^2)d^2}/(4\pi ar). \tag{30}$$

Из формулы (30) следует, что в тот момент, когда вихрь находится максимально близко к угловой точке, $|V| = k/(4\pi d)$, а в тот момент, когда он удаляется от нее на достаточно большое расстояние, $|V| = pk/(4\pi d)$.

В частном случае $\varphi = 2\pi$, $p = 1/2$ угловая область представляет собой плоский выступ (рис. 4). Если при некотором значении $t < 0$ координата вихря удовлетворяет условию $\operatorname{Im} z_0 > 0$, то вихрь будет огибать выступ только в случае, когда он вращается по часовой стрелке. Уравнением траекторий движения вихря является уравнение $r \operatorname{ctg}(\theta/2) = d$.

Таким образом, при уменьшении расстояния от вихря до выступа в два раза скорость вихря увеличивается также в два раза.

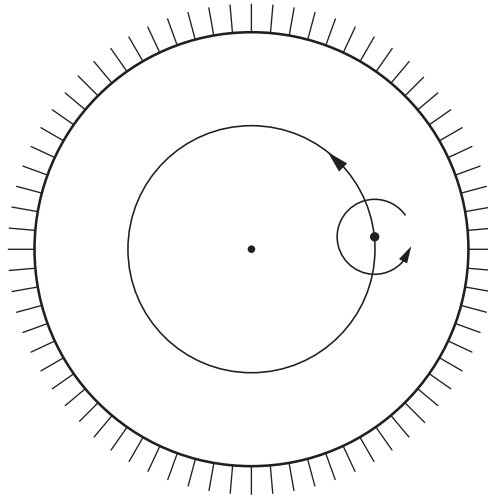


Рис. 5. Движение вихря, вращающегося против часовой стрелки, по окружности в круглом бассейне

Движение вихря в круглом бассейне. Рассмотрим случай, когда область D представляет собой круг радиусом r с центром в начале координат: $D = \{|z| < r\}$. При

$$w(z) = z/r, \quad w'(z) = 1/r \quad (31)$$

формула (17) принимает вид $|z_0|^2 = r_0^2$, $r_0^2 = r^2 - ar$, или

$$|z_0| = r_0 < r. \quad (32)$$

Равенство (32) имеет следующий физический смысл: в процессе движения расстояние от вихря до центра бассейна не меняется, т. е. траекторией вихря является окружность (рис. 5) или точка (вихрь находится в центре бассейна).

С учетом формул (31), (32) уравнение движения (13) принимает вид

$$\dot{z}_0 = i\omega z_0, \quad (33)$$

где

$$\omega = \frac{k}{2\pi(r^2 - r_0^2)}, \quad r_0 < r. \quad (34)$$

Решение уравнения (33) имеет вид

$$z_0 = r_0 \exp(i\omega t) \quad (35)$$

(ω — угловая скорость вращения вихря).

Формула (35) показывает, что вихрь движется равномерно по окружности радиусом r_0 с угловой скоростью ω . Из формулы (34) следует, что скорость движения вихря тем больше, чем ближе к окружности он находится. Для вихря, движущегося вблизи окружности, и угловая, и линейная скорости обратно пропорциональны расстоянию до нее.

Движение вихря вблизи параболической границы. Рассмотрим движение вихря в области $y^2 > 2px + p^2$, которая ограничена параболой $y^2 = 2px + p^2$ и является ее внешностью. В этом случае при

$$h(z) = \sqrt{z} - \sqrt{\frac{p}{2}}i, \quad \overline{h(z)} = \sqrt{\bar{z}} + \sqrt{\frac{p}{2}}i = -\sqrt{\bar{z}} + \sqrt{\frac{p}{2}}i, \quad h'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad |h'(z)| = \frac{1}{2\sqrt{|z|}}$$

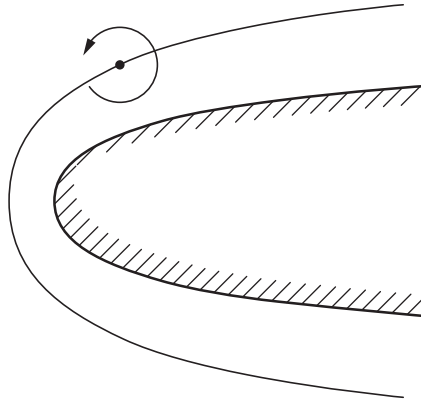


Рис. 6. Движение вихря вблизи параболической границы

из формулы (18) следует уравнение траекторий

$$(\sqrt{z_0} + \sqrt{\bar{z}_0} - \sqrt{2p}i)\sqrt{|z_0|} = di. \tag{36}$$

Для анализа этих траекторий используем параболические координаты:

$$z_0 = (\xi + \eta i)^2, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad 0 < \eta < +\infty. \tag{37}$$

Рассматриваемая парабола совпадает с координатной линией: $\eta = p$, а вне параболы $\eta > p$. Из определения регулярной ветви функции \sqrt{z} следуют равенства

$$\sqrt{z_0} = \xi + \eta i, \quad \sqrt{\bar{z}_0} = -\xi + \eta i, \quad \sqrt{|z_0|} = \xi^2 + \eta^2,$$

поэтому уравнение (36) принимает вид

$$(2\eta - \sqrt{2p})\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = d. \tag{38}$$

Вихрь движется по линиям, незначительно отклоняющимся от параболы (рис. 6).

С использованием формул (37), (38) можно определить связь между параметром d и расстоянием d_0 от вихря до вершины параболы в тот момент, когда вихрь пересекает осевую линию ($\xi = 0$):

$$d = 2d_0 - \sqrt{2pd_0}.$$

Заключение. В работе получены универсальные интегрируемые уравнения динамики вихря, движущегося вблизи границы произвольной формы. Выведена общая формула для поля скоростей течений, создаваемых вихрем в односвязной области. Получены дифференциальные уравнения движения вихря вблизи границ. В выражении для поля скоростей течений и дифференциальных уравнениях используются конформные отображения на единичный круг и верхнюю полуплоскость. В результате интегрирования уравнений динамики вихря получены две формы алгебраического уравнения траекторий движения вихря. Рассмотрены примеры движения вихря вблизи прямолинейной границы, в канале, в угловой области, в окрестности выступа, в круглом бассейне и вблизи параболической границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Пуанкаре А. Теория вихрей. М.; Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 2000.

3. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
4. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
5. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. **Бэтчелор Дж.** Введение в гидродинамику жидкости. М.: Мир, 1973.
7. **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
8. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
9. **Козлов В. В.** Общая теория вихрей. Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 1998.
10. **Сэффмэн Ф. Дж.** Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000.
11. **Ахметов Д. Г.** Вихревые кольца. Новосибирск: Изд-во ГЕО, 2007.
12. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
13. **Гурвиц А.** Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. М.: Наука, 1968.
14. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
15. **Сидоров Ю. В.** Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. М.: Наука, 1982.
16. **Бицадзе А. В.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
17. **Шубин М. А.** Лекции об уравнениях математической физики. М.: Моск. центр непрерывного мат. образования, 2001.

*Поступила в редакцию 3/VI 2011 г.,
в окончательном варианте — 5/IV 2012 г.*
