УДК 539.374

В.М. Садовский

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРОЧНЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ

На основе формулировки модели упругопластического течения с изотропным и трансляционным упрочнением в виде вариационного неравенства получено интегральное обобщение, позволяющее исследовать класс разрывных решений. В задаче о распространении плоских волн сдвига проведено сравнение обобщенных решений, отвечающих различным видам упрочнения.

Вопросы построения обобщенных решений в динамических задачах теории упругопластического течения Прандтля — Рейсса впервые рассматривались Манделем [1], сделавшим ошибочный вывод о неоднозначности описания фронтов разрыва скоростей и напряжений в рамках этой теории. Полная система соотношений сильного разрыва получена [2] исходя из соображения о максимальной пластической диссипации энергии на фронте для модели линейного изотропного и трансляционного упрочнения.

Было показано [3], что система квазилинейных уравнений Прандтля — Рейсса, соответствующая упругоидеальнопластической модели, неприводима к дивергентной форме. Таким образом, невозможно ее обобщение в виде полной системы интегральных законов сохранения и построение разрывных решений аналогично моделям идеальных сред [4].

В данной работе предлагается интегральная формулировка, эквивалентная исходным уравнениям теории течения для произвольной диаграммы упрочнения и исходя из этой формулировки выписываются соотношения сильного разрыва решения без привлечения каких-либо дополнительных соображений.

1. Вариационное неравенство модели упрочняющегося тела. В рамках геометрически линейного приближения модель упругопластического тела может быть представлена в виде системы уравнений движения, закона Гука и принципа максимума скорости диссипации энергии:

$$\rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j},\ e^0_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl,t},\ (\bar\sigma_{ij} - \sigma_{ij})e^p_{ij} \leqslant 0,\ \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = e^0_{ij} + e^p_{ij}. \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность; v_i — вектор скорости относительно декартовой системы координат; a_{ijkl} — тензор модулей упругой податливости, обладающий симметрией и свойством положительной определенности; e^0_{ij}, e^p_{ij} — упругие и пластические составляющие тензора скоростей деформации. Принцип максимума выполняется для произвольной вариации тензора напряжений, подчиненной ограничению

$$f(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) \leqslant \theta, \tag{1.2}$$

где $f = f(\sigma_{ij})$ — выпуклая положительно-однородная функция текучести недеформированного материала; τ_{ij} — симметричный тензор микронапряжений; θ — переменный предел текучести.

Неравенство (1.2) описывает классические варианты упрочнения: изотропному упрочнению отвечает $\tau_{ij} = 0$, трансляционному — $\theta = \theta_s = \mathrm{const}$. Для модели упругоидеальнопластической среды $\tau_{ij} = 0$, $\theta = \theta_s$. В общем случае к системе (1.1) необходимо добавить уравнения эволюции параметров τ_{ij} и θ:

$$\xi_{ij,t} = e^p_{ij},\ \theta\eta_{,t} = (\sigma_{ij} - \tau_{ij})e^p_{ij}. \tag{1.3}$$

Входящие в эти уравнения тензор пластической деформации ξ_{ij} и скалярный коэффициент η считаются заданными функциями параметров упрочнения, причем

$$\xi_{ij} = \partial\Phi^p/\partial\tau_{ij},\ \eta = \partial\Phi^p/\partial\theta$$

($\Phi^p = \Phi^p(\tau_{ij}, \theta)$ — пластический потенциал Гиббса).

Система соотношений (1.1), (1.3) эквивалентна неравенству

(1.4) $$(v_i^* - v_i)(\rho v_{i,t} - \sigma_{ij,j}) + (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \times$$
$$\times (a_{ijkl}\sigma_{kl,t} - v_{i,j}) + (\tau_{ij}^* - \tau_{ij})\xi_{ij,t} + (\theta^* - \theta)\eta_{,t} \geqslant 0,$$

в котором вариация вектора скорости произвольна, а вариации тензора напряжений и параметров упрочнения удовлетворяют ограничению (1.2). Действительно, выбирая в (1.4) допустимые вариации специальным образом, можно получить все соотношения (1.1), (1.3). В частности, при $\sigma_{ij}^* = \bar\sigma_{ij}$, $\tau_{ij}^* = \tau_{ij}$, $\theta^* = \theta$ отсюда следует (1.1). При $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + \gamma_{ij}$, $\tau_{ij}^* = \tau_{ij} + \gamma_{ij}$, где γ_{ij} — произвольный симметричный тензор, вытекает система уравнений эволюции τ_{ij}. При $\sigma_{ij}^* = \tau_{ij}^* = \theta^* = 0$ и $\sigma_{ij}^* = 2\sigma_{ij}$, $\tau_{ij}^* = 2\tau_{ij}$, $\theta^* = 2\theta$ получается последнее уравнение (1.3). С другой стороны, полагая в (1.1)

$$\bar\sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^* - \tau_{ij}^*)\frac{\theta}{\theta^*} + \tau_{ij},$$

можно с учетом (1.3) вывести (1.4).

Неравенство (1.4), представляющее собой одну из эквивалентных формулировок теории течения, является частным случаем гиперболического вариационного неравенства с нелинейным оператором:

(1.5) $$(\mathrm{u}^* - \mathrm{u})(\mathrm{N}\langle \mathrm{u} \rangle - \mathrm{g}) \geqslant 0 \quad \mathrm{u}, \mathrm{u}^* \in \mathrm{K},$$
$$\mathrm{N}\langle \mathrm{u} \rangle = \partial\varphi/\partial t - \sum_{s=1}^{n} \partial\psi_s/\partial x_s.$$

Здесь $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t, \mathrm{x})$ — неизвестная m-мерная вектор-функция; $\mathrm{K} = \mathrm{K}(t, \mathrm{x})$ — выпуклое множество допустимых вариаций решения; $\varphi = \partial\Phi/\partial\mathrm{u}$; $\psi_s = \partial\Psi_s/\partial\mathrm{u}$; $\Phi = \Phi(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$ и $\Psi_s = \Psi_s(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$ — заданные скалярные потенциалы; $\mathrm{g} = \mathrm{g}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$ — заданная векторная функция. Символы $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x_s$ обозначают полные производные по соответствующим переменным. Ниже предполагается, что φ и ψ_s являются непрерывно дифференцируемыми, а K и g — непрерывными функциями своих аргументов.

В рассматриваемой модели u содержит компоненты вектора скорости, тензора напряжений и параметры упрочнения,

$$\Phi = \Phi^p + \frac{1}{2}\rho v_i v_i + \frac{1}{2} a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},\ \Psi_s = \sigma_{is}v_i,$$

вектор g равен нулю, а множество K определяется ограничением (1.2).

В случае, если функция Φ строго выпукла, а g удовлетворяет условию Липшица по переменной u, для неравенства (1.5) справедливы априорные оценки, обобщающие оценки решений квазилинейных гиперболических систем уравнений в характеристических коноидах. Эти оценки доказывают единственность и непрерывную зависимость от начальных данных «в малом по времени» решений задачи Коши

$$\mathrm{u}|_{t=0} = \mathrm{u}_0(\mathrm{x})$$

и смешанных задач с диссипативными граничными условиями, а также ограниченность области зависимости решений (конечность скорости распространения возмущений в соответствующих моделях, см. [5]).

2. Соотношения сильного разрыва решения. Вариационное неравенство общего вида может быть записано в дивергентной форме

$$\mathrm{u}^*\mathrm{N}\langle \mathrm{u} \rangle - (\mathrm{u}^* - \mathrm{u})\mathrm{g} \geq \partial(\mathrm{u}\varphi - \Phi)/\partial t -$$
$$- \sum_{s=1}^{n} \partial(\mathrm{u}\psi_s - \Psi_s)/\partial x_s + h,\ h(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) = \Phi_{,t} - \sum_{s=1}^{n} \Psi_{s,s}$$

и имеет, таким образом, интегральное обобщение, эквивалентное ему на гладких решениях:

$$\iint_G \{-\varphi(\chi\mathrm{u}^*)_{,t} + \sum_{s=1}^{n}\psi_s(\chi\mathrm{u}^*)_{,s} - (\mathrm{u}^* - \mathrm{u})\chi\mathrm{g}\}d\omega_x dt \geq \tag{2.1}$$
$$\geq \iint_G \{-(\mathrm{u}\varphi - \Phi)\chi_{,t} + (\mathrm{u}\psi_s - \Psi_s)\chi_{,s} + h\}d\omega_x dt\,.$$

Здесь $\chi \in C^\infty(G)$ — произвольная финитная в области G неотрицательная функция; $\mathrm{u}^* = \mathrm{u}^*(t, \mathrm{x}) \in \mathrm{K}$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Интегральное неравенство естественным образом определяет класс обобщенных решений, к которому относятся всевозможные векторные функции $\mathrm{u} \in \mathrm{L}_1(G)$, удовлетворяющие (2.1) при всех допустимых u^*. В этот класс, в частности, входят решения с сильным разрывом, имеющие разрыв первого рода на некоторой гиперповерхности S и непрерывно дифференцируемые в остальной части области G.

Применяя формулу Грина к интегралам по подобластям непрерывности такого решения, можно с учетом произвольности χ показать, что в точках гиперповерхности S справедливо неравенство

$$\mathrm{u}^*[\mathrm{r}] \geq c[\mathrm{u}\varphi - \Phi] + \sum_{s=1}^{n} [\mathrm{u}\psi_s - \Psi_s]\nu_s,\ \mathrm{r} = c\varphi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\nu_s,$$

где $c \geq 0$ — скорость движения фронта разрыва, представляющего собой сечение S гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$, в направлении его нормали ν_s; квадратные скобки означают скачок функции.

Последнее неравенство переписывается в эквивалентной форме

$$(\mathrm{u}^* - \mathrm{u}^0)\,[\mathrm{r}] \geq d \equiv c(\varphi^0[\mathrm{u}] - [\Phi]) + \sum_{s=1}^{n} (\psi_s^0[\mathrm{u}] - [\Psi_s])\nu_s. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathrm{u}^0 = (\mathrm{u}^+ + \mathrm{u}^-)/2$ ($\mathrm{u}^\pm$ — односторонние пределы решения на S), а величины φ^0 и ψ_s^0 определяются аналогично. Полагая в (2.2) $\mathrm{u}^* = \mathrm{u}^0 \in \mathrm{K}$, можно получить условие реализуемости разрыва ($d \leq 0$), играющее для вариационного неравенства (1.5) такую же роль, как условие неотрицательности скачка энтропии в моделях идеальных сред.

Разложением скачков $[\Phi]$ и $[\Psi_s]$ в ряды Тейлора нетрудно показать, что $d/[\mathrm{u}]^2 \to 0$ при $[\mathrm{u}] \to 0$, т.е. величина d имеет третий порядок малости по сравнению с $[\mathrm{u}]$.

В дальнейшем рассматриваются два типа решений с сильным разрывом: регулярные решения, для которых в точках гиперповерхности S левая часть неравенства (2.2) неотрицательна при всех $\mathrm{u}^* \in \mathrm{K}$, и нерегулярные, для которых существует такой вектор $\mathrm{u}' \in \mathrm{K}$, что $(\mathrm{u}' - \mathrm{u}^0)\,[\mathrm{r}] < 0$ в некоторой точке S.

Имеет место следующее утверждение: на фронте разрыва регулярного решения для всякого λ ($|\lambda| \leq 1/2$, в этом случае $\mathrm{u}^\lambda = (\lambda + 1/2)\mathrm{u}^+ + (1/2 - \lambda)\mathrm{u}^- \in \mathrm{K}$)

$$(\mathrm{u}^* - \mathrm{u}^\lambda)\,[\mathrm{r}] \geq 0. \tag{2.3}$$

Действительно, по определению регулярного решения неравенство (2.3) выполняется при $\lambda = 0$. Принимая в нем в качестве $\mathbf{u}^*$ сначала вектор $\mathbf{u}^+$, а затем $\mathbf{u}^-$ и суммируя полученные неравенства, можно установить, что $[\mathbf{u}]\,[\mathbf{r}] = 0$. Отсюда с учетом формулы $\mathbf{u}^\lambda = \mathbf{u}^0 + \lambda[\mathbf{u}]$ вытекает неравенство (2.3) при любом λ.

С геометрической точки зрения доказанное утверждение означает, что если какая-либо точка $\mathbf{u}^\lambda$ отрезка в m-мерном пространстве с концами $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ лежит строго внутри множества $\mathbf{K}$, то в силу произвольности входящей в (2.3) вариации $\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^\lambda$ выполняется равенство $[\mathbf{r}] = 0$. Если же весь отрезок принадлежит границе $\mathbf{K}$, то вектор $[\mathbf{r}]$ направлен по ее внутренней нормали, общей для всех точек отрезка.

Таким образом, регулярные решения в теории упругопластического течения могут содержать разрывы двух видов: упругие волны, определяемые системой уравнений $[\mathbf{r}] = 0$, и пластические волны, отвечающие условию ортогональности по отношению к поверхности текучести. Следует отметить, что в случае упругоидеальнопластической среды функции Φ и Ψ_s квадратичные ($d = 0$), поэтому любое разрывное решение является регулярным. Вытекающая из (2.3) полная система соотношений сильного разрыва для упругоидеальнопластической модели была получена рассмотренным здесь способом в [6, 7].

3. Распространение сдвиговых волн напряжений. В замкнутой форме обобщенные решения с сильным разрывом могут быть построены в одномерной задаче о распространении плоских волн сдвига, вызванных приложением касательного напряжения $\sigma_{13} = q$ к поверхности полупространства $x_1 \geqslant 0$. В этой задаче вариационное неравенство (2.3) и ограничение на вариации принимают вид

$$(3.1)\qquad (\sigma_{13}^* - \sigma_{13}^\lambda)\left(\frac{1}{G} - \frac{1}{\rho c^2}\right)[\sigma_{13}] + 2(\tau_{13}^* - \tau_{13}^\lambda)\,[\xi_{13}] +$$
$$+ (\theta^* - \theta^\lambda)\,[\eta] \geqslant 0,\ \sigma_{13}^* - \tau_{13}^* \leqslant \theta^*$$

(G — модуль сдвига).

Из системы уравнений, получаемой после применения к вариационному неравенству (1.4) правила множителей Лагранжа (теорема Куна — Таккера):

$$(3.2)\qquad \rho v_{3,t} = \sigma_{13,1},\ \frac{1}{G}\sigma_{13,t} - v_{3,1} + \eta_{,t} = 0,\ 2\xi_{13,t} = \eta_{,t} \geqslant 0,$$

вытекает, что в случае чистого сдвига параметры упрочнения τ_{13} и θ являются зависимыми. Они связаны равенством $\eta = 2\xi_{13}$, сопоставление которого с диаграммой деформирования материала ($2\xi_{13} + \sigma_{13}/G = F(\sigma_{13})$) позволяет определить величину пластического потенциала

$$\Phi^p = \int 2\xi_{13}d\tau_{13} + \eta d\theta = \int_0^{\tau_{13}+\theta} \{F(\sigma) - \sigma/G\}d\sigma.$$

При постоянном значении $q > 0$ регулярное обобщенное решение задачи содержит две линии разрыва в плоскости переменных t, x_1: упругий предвестник $x_1 = c_s t$, распространяющийся со скоростью поперечных волн $c_s = \sqrt{G/\rho}$, и пластическую волну $x_1 = c_\tau t$. В области между разрывами $\sigma_{13} = \theta_s$, за фронтом пластической волны $\sigma_{13} = q$. Ее скорость может быть найдена из вариационного неравенства (3.1) с учетом правила множителей Лагранжа в виде

$$c_\tau = \left(\frac{1}{\rho}\frac{q - \theta_s}{F(q) - F(\theta_s)}\right)^{1/2}.$$

Условие реализуемости пластического разрыва приводит к неравенству

$$\int\limits_{\theta_s}^{q} \sigma dF(\sigma) \leqslant \{F(q) - F(\theta_s)\}(q + \theta_s)/2,$$

которое имеет простую геометрическую интерпретацию и автоматически выполняется для выпуклой вниз диаграммы деформирования. В случае выпуклой вверх диаграммы реализуется автомодельное решение системы (3.2), зависящее от переменной $c = x_1/t$, с одной линией разрыва: $x_1 = c_s t$. В области центрированной волны это решение определяется обычным уравнением (см., например, [8])

$$\rho c^2 dF/d\sigma_{13} = 1.$$

Для широкого класса упругопластических материалов диаграмма чистого сдвига содержит выпуклый вниз участок, отвечающий «площадке текучести», и выпуклый вверх участок «активного упрочнения». Условие реализуемости для диаграммы такого вида запрещает возникновение двух пластических разрывов, распространяющихся с различными (рис. 1) или равными скоростями. При достаточно большом значении внешнего напряжения q линия пластического разрыва соответствует точке касания θ_c луча, выпущенного из точки предельного упругого состояния, с диаграммой, а величина скорости c_c вычисляется по той же формуле после замены q на θ_c. При $q > \theta_c$ к пластическому разрыву примыкает автомодельное решение, зависящее от $c = x_1/t$ (рис. 2).

Таким образом, регулярное разрывное решение, описывающее распространение сдвиговых волн нагружения, определяется только конкретным видом функции F и не зависит от типа упрочнения материала.

4. Стационарная устойчивость сдвиговых волн. Наряду с регулярными решениями задачи о распространении сдвиговых волн напряжений может существовать множество нерегулярных разрывных решений, которые получаются после замены равенства $\sigma_{13} - \tau_{13} = \theta$ за фронтом пластического разрыва строгим неравенством. Такая замена приводит к нарушению вариационного неравенства (3.1) для некоторых вариаций касательного напряжения и параметров упрочнения. Проблема выбора единственного разрывного решения задачи может быть решена на основе метода вязкости [9].

Рассматривается система уравнений, описывающая распространение вязкоупруго-вязкопластических волн сдвига в упрочняющейся среде:

$$\rho v_{3,t} = \sigma_{13,1} + \mu_0 v_{3,11}, \quad \frac{1}{G}\sigma_{13,t} - v_{3,1} + \eta_{,t} = 0, \tag{4.1}$$

$$2\xi_{13,t} = \eta_{,t} = \max\{0, \sigma_{13} - \tau_{13} - \theta\}/\mu_p.$$

Здесь μ_0 и μ_p — коэффициенты вязкости Кельвина — Фойхта и Шведова — Бингема. При стремлении μ_0 и μ_p к нулю система (4.1) переходит в (3.2), поэтому естественно требование устойчивости обобщенных решений упругопластической модели в смысле предельного перехода по параметрам вязкости в последовательности решений системы (4.1).

Так как для вязкоупруго-вязкопластической модели параметры упрочнения вновь являются зависимыми величинами, то $\tau_{13} + \theta = H(\eta)$, где функция $H(\eta)$ может быть найдена по диаграмме чистого сдвига как решение уравнения $\eta + H/G = F(H)$. Двухкратное дифференцирование этого уравнения приводит к уравнению

$$\left(\frac{1}{G} - \frac{dF}{d\sigma_{13}}\right)\frac{d^2H}{d\eta^2} = \left(\frac{dH}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2F}{d\sigma_{13}^2},$$

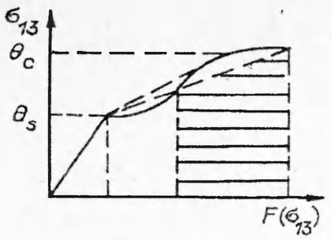

Рис. 1

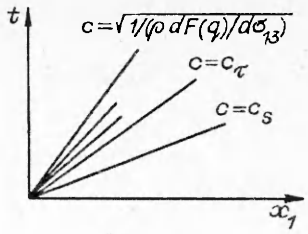

Рис. 2

из которого с учетом неравенства $1/G < dF/d\sigma_{13}$ следует, что свойство выпуклости функции $H(\eta)$ взаимно однозначно связано с выпуклостью диаграммы упрочнения.

В стационарном случае система (4.1) приводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$(4.2) \qquad \mu_0 c d\sigma_{13}/dy = P(\sigma_{13}, \eta), \; \mu_0 c d\eta/dy = Q(\sigma_{13}, \eta),$$

где $y = ct - x_1$; $Q(\sigma_{13}, \eta) = \mu_0 \max\{0, \sigma_{13} - H(\eta)\}/\mu_p$;

$$P(\sigma_{13}, \eta)/G = -(1 - \rho c^2/G)(\sigma_{13} - C) + \rho c^2 \eta - Q(\sigma_{13}, \eta)$$

(C — произвольная постоянная интегрирования). Доказывается, что если функции $\sigma_{13}(y)$ и $\eta(y)$ представляют собой решение системы (4.2), то функции $\sigma_{13}(y/\varepsilon)$ и $\eta(y/\varepsilon)$ являются решением аналогичной системы уравнений с параметрами вязкости $\mu_0\varepsilon$ и $\mu_p\varepsilon$. Поэтому предельный переход при $\mu_0 \to 0$ ($\mu_p/\mu_0 = \mathrm{const}$) эквивалентен стремлению $\varepsilon \to 0$ или $|y| \to \infty$, а исследование стационарно-устойчивых по вязкости решений сводится к анализу интегральных кривых системы (4.2), отвечающих решениям с бесконечной областью определения $-\infty < y < \infty$.

Согласно качественной теории дифференциальных уравнений [10], любая незамкнутая интегральная кривая системы (4.2), соответствующая решению с бесконечной областью определения, соединяет особые точки системы

$$P(\sigma_{13}^{\pm}, \eta^{\pm}) = Q(\sigma_{13}^{\pm}, \eta^{\pm}) = 0.$$

На плоскости переменных σ_{13}, η этим точкам отвечают точки прямой $\sigma_{13} = \varkappa\eta + C$, $\varkappa = \rho c^2 G/(G - \rho c^2)$, расположенные ниже графика функции $\sigma_{13} = H(\eta)$ (рис. 3).

При $\sigma_{13} < H$ исследуемая система линейна. Ее интегральные кривые представляют собой отрезки прямых линий, параллельные оси σ_{13}. При $\sigma_{13} \geqslant H$ матрица Якоби системы равна

$$\frac{\mu_0}{\mu_p}\begin{pmatrix} \mu_p(\rho c^2 - G)/\mu_0 - G & G(\mu_p \rho c^2/\mu_0 + dH/d\eta) \\ 1 & -dH/d\eta \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы

$$2\lambda_{1,2} = -\left\{G - \rho c^2 + \frac{\mu_0}{\mu_p}\left(G + \frac{dH}{d\eta}\right)\right\} \pm \sqrt{\left\{G - \rho c^2 - \frac{\mu_0}{\mu_p}\left(G + \frac{dH}{d\eta}\right)\right\}^2 + 4G^2\frac{\mu_0}{\mu_p}}$$

всегда действительные. Условие невырожденности, при выполнении которого граничные точки особых линий системы (4.2) являются простыми особыми точками, принимает вид $dH/d\eta \neq \varkappa$. Причем если $dH/d\eta < \varkappa$, то $\lambda_1\lambda_2 < 0$, т.е. соответствующая точка — седло (точки *1*, *3* на рис. 3), а если $dH/d\eta > \varkappa$ ($\lambda_1\lambda_2 > 0$) — устойчивый узел (точка *2*).

Анализ поля направлений позволяет построить примерную картину интегральных кривых в окрестности особых точек каждого типа (рис. 4, 5).

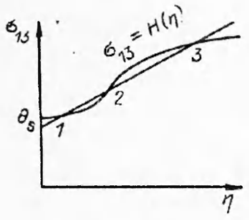

Рис. 3

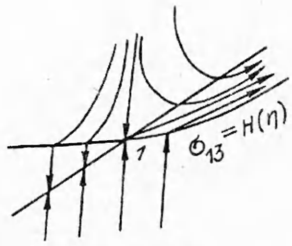

Рис. 4

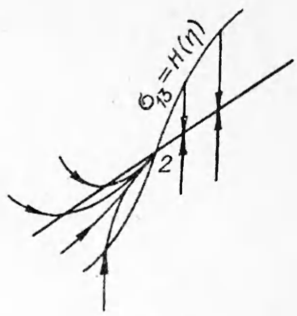

Рис. 5

Повторяя стандартные рассуждения [9, с. 238—239], можно доказать, что существует единственная интегральная кривая, выходящая из точки *1* как сепаратрисы седла и входящая в узел *2*, и не существует интегральных кривых, соединяющих какие-либо другие особые точки. Таким образом, единственное при фиксированных постоянных c и C стационарно-устойчивое решение соответствует состоянию *1* «перед фронтом» и *2* «за фронтом» пластического разрыва. Это решение реализуется только при наличии выпуклого «вниз» участка диаграммы чистого сдвига и характеризуется соотношениями

$$[\sigma_{13}] = \varkappa[\eta], \ \sigma_{13}^{\pm} = H(\eta^{\pm}).$$

Полученные соотношения показывают, что класс стационарно-устойчивых решений совпадает с классом регулярных пластических волн сильного разрыва. Таким образом, нерегулярные решения, описывающие распространение сдвиговых волн напряжений в упругопластическом полупространстве, не удовлетворяют критерию стационарной устойчивости пластических разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мандель Ж.** Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика: Сб. пер. — М., 1963. — № 5.
2. **Быковцев Г.И., Кретова Л.Д.** О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. — 1972. — Т. 36, вып. 2.
3. **Кукуджанов В.Н.** К исследованию уравнений динамики упругопластических тел при конечных деформациях // Нелинейные волны деформаций. — Таллинн, 1978.
4. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1976.
5. **Садовский В.М.** Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // Прикл. математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып 6.
6. **Садовский В.М.** О динамической корректности теории упругоидеальнопластического течения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. // АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1983. — Вып. 63.
7. **Drugan W.J., Shen Yinong.** Restrictions on dynamically propagating surfaces of strong discontinuity in elastic-plastic solids // J. Mech. and Phys. Solids. — 1987. — V. 35, N 6.
8. **Новацкий В.К.** Волновые задачи теории пластичности. — М.: Мир, 1978.
9. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978.
10. **Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1978.

г. Красноярск *Поступила 19/XI 1993 г.*