

**НЕЛОКАЛЬНО-УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ  
И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ГЛУБИННЫХ ПЛАСТАХ**

*Е. Ф. Афанасьев, В. Н. Николаевский*

(Москва)

Рассматриваются осесимметричные фильтрационные течения при нелокально-упругом режиме фильтрации. Приводится решение задачи о восстановлении давления в пласте после внезапного прекращения отбора жидкости. Показано, что кривая восстановления давления в скважине имеет два асимптотических прямолинейных участка, соответствующих разным коэффициентам проницаемости пласта (при малых временах — большому, при больших временах — меньшему), что открывает возможности новых интерпретаций известных форм замеряемых кривых.

1. Согласно теории нелокально-упругого режима фильтрации однородной жидкости в глубинном плоском пласте [1], линейное уравнение нестационарного фильтрационного течения

$$(\alpha_p + a) \frac{\partial p}{\partial t} - \dot{\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{k_0}{m_0 \mu_0} \nabla^2 p + \frac{G}{m_0 \rho_0} \quad (1.1)$$

дополняется интегральным условием постоянства горного давления  $\Gamma(x_1, x_2)$  в каждой точке пласта

$$\sigma(x_1, x_2; t) + \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x_i - \xi_i}{d}\right) p(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2 = \Gamma(x_1, x_2) \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho, \mu$  — плотность и вязкость фильтрующейся жидкости,  $k, m$  — проницаемость и пористость пласта,  $p$  — поровое давление,  $\sigma$  — эффективное давление в скелете пористой среды

$$\rho / \rho_0 = 1 + a_p(p - p_0); \quad m / m_0 = 1 + a(p - p_0) - b(\sigma - \sigma_0), \quad k_0 = \text{const}$$

индекс нуль относится к невозмущенному состоянию,  $G$  — интенсивность источников (стоков), имитирующих работу скважин, а  $\Phi$  — функция влияния, задаваемая [1] в виде

$$\Phi\left(\frac{x_i - \xi_i}{d}\right) = \frac{1}{\pi d^2} \exp\left\{-\sum_{i=1,2} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{d^2}\right\} \quad (1.3)$$

Если масштаб  $d$  зоны влияния гораздо меньше характерного размера области изменения давления  $p$ , то условие (1.2) переходит в обычное [2, 3] локальное условие постоянства горного давления:  $\sigma + p = \Gamma$ . Если же масштаб  $d$  относительно велик, то условие (1.2) при  $d \rightarrow \infty$  сводится к условию  $\partial \sigma / \partial t = 0$ .

Условию (1.2) приписывается [1] следующая физическая интерпретация: при относительно малых размерах воронки депрессии кровля и подошва пласта не прогибаются, сжатия скелета среды не происходит ( $\sigma = \sigma_0$ ). По мере увеличения воронки депрессии кровля и подошва начинают прогибаться, нагрузка на скелет пласта в рассматриваемой точке  $x_1, x_2$  возрастает, а вместе с тем увеличивается и эффективная сжимаемость пласта.

2. Если записать условие (1.2), (1.3) в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , а затем воспользоваться условием независимости локальных приращений  $\Delta \sigma(r, t), \Delta p(r, t)$  от полярного угла  $\varphi$ , что характерно для течений с осевой симметрией, то воспользовавшись интегралом (см. [4], стр. 972)

$$\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{2r\rho}{d} \cos \varphi\right) d\varphi = 2\pi I_0\left(\frac{2r\rho}{d}\right)$$

получим

$$\Delta \sigma(r, t) + \frac{2}{a^2} \int_0^{\infty} I_0\left(2 \frac{r\rho}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{a^2}\right) \Delta p(\rho, t) \rho d\rho = 0 \quad (2.2)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Рассмотрим задачу о восстановлении давления в пласте после мгновенного закрытия скважины, работавшей с дебитом  $Q = \text{const}$ . Пусть  $p_0(r)$  — начальное стационар-

ное распределение давления. Начальные и граничные условия следующие:

$$p = p_0(r) \text{ при } t = 0 \text{ и при } r \rightarrow \infty, \quad \partial p / \partial r = 0 \text{ при } r = 0, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

При этом начальное распределение давления  $p_0(r)$  удовлетворяет условию

$$\frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial p_0}{\partial r} \right) = Q \quad \text{при } r = 0, \quad t < 0 \quad (2.4)$$

Положим

$$p = p_0(r) + \frac{Q\mu}{2\pi kh} u(r, t) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение (1.1), полагая в нем  $G = 0$  и принимая во внимание (2.2) — (2.4), приходим к решению интегро-дифференциального уравнения

$$(1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2\alpha}{d^2} \int_0^\infty I_0 \left( 2 \frac{rp}{d^2} \right) \exp \left( - \frac{r^2 + p^2}{d^2} \right) \frac{\partial u(p, t)}{\partial t} p^2 dp = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

при следующих условиях:

$$u = 0 \text{ при } t = 0 \text{ и при } r \rightarrow \infty, \quad (r \partial u / \partial r) = -1 \text{ при } r = 0, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

Здесь  $\kappa = k_0 (\mu_0 \beta m_0)^{-1}$  — коэффициент пьезопроводности,  $\alpha = b / \beta$ ,  $\beta = a_p + a + b$  — максимальная сжимаемость пласта.

Применяя к уравнению (2.6) интегральное преобразование Ханкеля, относительно трансформанты

$$U(\lambda, t) = \int_0^\infty u(r, t) J_0(\lambda r) r dr$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \varphi(\lambda) U = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2}, \quad \varphi(\lambda) = \frac{\kappa \lambda^2}{1 - \alpha [1 - \exp(-1/4 d^2 \lambda^2)]} \quad (2.8)$$

$$U = 0 \text{ при } t = 0$$

Решение задачи (2.8) имеет вид

$$U(\lambda, t) = \frac{1 - \exp[-\varphi(\lambda)t]}{\lambda^2}, \quad u(r, t) = \int_0^\infty \frac{1 - \exp[-\varphi(\lambda)t]}{\lambda} J_0(r\lambda) d\lambda \quad (2.9)$$

и может быть использовано для интерпретации кривых восстановления давления в скважинах, т. е. функции  $p(r_c, t)$ , где  $r_c$  — радиус скважины. При этом будем считать, как обычно, что внутри реальной скважины находится точечная (фиктивная) того же дебита, которая может моделировать реальную при условии, что  $r_c^2 / (\kappa t) \ll 1$  — относительной малости радиуса скважины, что практически всегда выполняется.

Из решения (2.9) имеем

$$u(r_c, t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\psi(z, \tau; \theta, \alpha)}}{z} J_0(z) dz, \quad \psi = \frac{\tau z^2}{1 - \alpha [1 - \exp(-\theta z^2)]} \quad (2.10)$$

где  $\theta = d^2 / (4r_c^2)$ ,  $\tau = \kappa t / r_c^2$ . Величина  $\varepsilon = \alpha [1 - \exp(-\theta z^2)] < 1$ , так как  $\alpha < 1$ ,  $\theta > 0$ . Отметим, что

$$\psi = \frac{\tau z^2}{1 - \varepsilon} = \tau z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n, \quad e^{-\psi} = e^{-\tau z^2} + e^{-\tau z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\tau z^2)^m}{i! j! \dots k!} \quad (2.11)$$

где суммирование по  $m$  распространено на все решения в целых положительных числах уравнений  $i + 2j + \dots + lk = n$ ,  $i + j + \dots + k = m$  (см. [4], стр. 34). Кроме того, имеет место разложение

$$\varepsilon^n = \alpha^n (1 - e^{-\theta z^2})^n = \alpha^n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v n!}{v! (n-v)!} e^{-v\theta z^2} \tag{2.12}$$

Подставляя ряды (2.11), (2.12), в интеграл (2.10) и интегрируя, получаем

$$u = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left( -\frac{1}{4\tau} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sum_m \frac{(-1)^m \tau^m}{i! j! \dots k!} \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v n! (m-1)!}{v! (n-v)!} \times \\ \times \frac{\exp(-1/8(\tau + v\theta))}{(\tau + v\theta)^{m-1/2}} M_{m-1/2} \left( \frac{1}{8(\tau + v\theta)} \right) \tag{2.13}$$

где введена функция Уиттекера [4]

$$M_{m-1/2}(x) = \frac{x^{1/2} e^{1/2x}}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dx^{(m-1)}} (x^{m-1} e^{-x}), \quad m \geq 1$$

В предельных случаях — при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \infty$  — имеем соответственно

$$u_0 = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left( -\frac{1}{4\tau} \right), \quad u_{\infty} = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left( -\frac{1-\alpha}{4\tau} \right) \tag{2.14}$$

Проведем грубую оценку выхода функции  $u(\tau)$  на указанные предельные при произвольном  $\theta$ . Согласно [4] при достаточно больших  $\tau + v\theta$  имеем

$$M_{m-1/2} \left( \frac{1}{8(\tau + v\theta)} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}(\tau + v\theta)^{1/2}} + O \left( \frac{1}{(\tau + v\theta)^{3/2}} \right) \tag{2.15}$$

$$u = u_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sum_m \frac{(-1)^m (m-1)!}{i! j! \dots k!} \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v n!}{v! (n-v)!} \left( i + v \frac{\theta}{\tau} \right)^{-m} + O \left( \frac{1}{\tau} \right)$$

Если  $\theta \ll \tau$  то,

$$1 + v\theta / \tau \approx 1$$

для главных членов разложения (2.15). Тогда в силу равенства

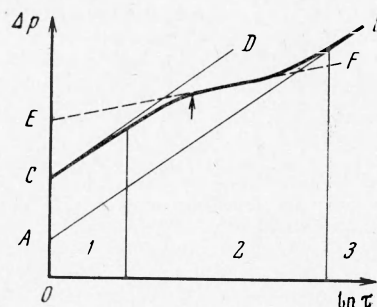
$$\sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v n!}{v! (n-v)!} = 0$$

получим

$$u = u_0 + O(1/\tau) \quad \text{при } \tau \gg \theta \tag{2.16}$$

В начальные моменты времени  $\theta \gg \tau$ . Тогда в разложении (2.15) главными будут члены при  $v=0$ , а члены  $v \neq 0$  имеют порядок  $O(\tau_n/\theta)$  и выше. Сохранив, соответственно, в разложении (2.14) лишь первый член  $\varepsilon^n = \alpha^n$ , получаем  $\psi = \tau z^2 (1 - \alpha)^{-1}$ , что дает  $u = u_{\infty}$ . Отсюда окончательно имеем оценку

$$u = u_{\infty} + O(\tau/\theta) \quad \text{при } \tau \ll \theta \tag{2.17}$$



3. Фиксируемое в реальных скважинах возрастание давления  $\Delta p = p(r_c, \frac{r_c}{r_e}, t) - p(r_c, 0)$  выражается согласно формуле (2.5) через полученное решение для  $u(\tau)$ . В соответствии со сказанным выше можно выделить три характерных участка кривой восстановления давления. Первый участок 1 соответствует интервалу времени

$$0 \leq \tau < 0.1\theta$$

$$\Delta p \approx -\frac{Q\mu}{4\pi kh} \text{Ei} \left( -\frac{1-\alpha}{4\tau} \right) \approx \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left( \ln \frac{2.25}{1-\alpha} + \ln \tau \right) \tag{3.1}$$

Второй участок 2 соответствует интервалу  $0.1\theta < \tau < 10\theta$ . Здесь изменение давления будем приближенно описывать тремя членами разложения (2.13), соответствующими

циями слагаемым порядка  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  в представлении (2.11)

$$\Delta p \approx \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left( \ln \frac{2.25}{1-\alpha} \tau - \frac{\alpha(1+2\alpha+3\alpha^2)}{2(1+\theta/\tau)} + \frac{\alpha^2(1+3\alpha)}{(1+\theta/\tau)^2} - \frac{\alpha^3}{2(1+\theta/\tau)^3} + \frac{\alpha(\alpha+3\alpha^2)}{2(1+2\theta/\tau)} - \frac{\alpha^2(1+6\alpha)}{4(1+2\theta/\tau)^2} + \frac{\alpha^3}{2(1+2\theta/\tau)^3} - \frac{\alpha^3}{2(1+3\theta/\tau)} + \frac{\alpha^3}{2(1+3\theta/\tau)^2} - \frac{\alpha^3}{6(1+3\theta/\tau)^3} \right) \quad (3.2)$$

Третий участок 3 соответствует интервалу времени  $10\theta < \tau < \infty$ , здесь

$$\Delta p = - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \text{Ei} \left( - \frac{1}{4\tau} \right) \approx \frac{Q\mu}{4\pi kh} (\ln 2.25 + \ln \tau) \quad (3.3)$$

Примерный вид теоретической кривой восстановления давления представлен на фигуре. Асимптота  $CD$  соответствует меньшей сжимаемости и большей пьезопроводности пласта (кровля и подошва пласта еще неподвижны), асимптота  $AB$  — максимальной сжимаемости пласта (кровля и подошва пласта сжимают скелет пористой среды); обе асимптоты описываются одной и той же традиционной формулой упругого режима фильтрации (3.1) и (3.3) с одинаковой проводимостью  $kh/\mu$ , но с разными эффективными параметрами пьезопроводности ( $\kappa/(1-\alpha)$  и  $\kappa$ ).

Проведем числовые оценки. Пусть  $d = 20$  м,  $r_c = 10$  см,  $\kappa = 10^4$  см<sup>2</sup>/сек. Тогда  $\theta = 10^4$  и продолжительность интервала 1 будет  $\tau_1 = 0.1 \theta = 10^3$  или  $t = 10$  сек. Участок 3 начнется при  $\tau_2 = 10\theta = 10^5$  или при  $t = 1000$  сек. Таким образом, продолжительность переходного участка 2 будет порядка 17 мин.

Из этого примера видно, что при практических замерах на скважинах участок 1 может быть вообще пропущен, а основным объектом наблюдения может служить участок кривой 2. При этом его первую половину (до стрелки на фигуре) можно принять за дефектную часть кривой (например, из-за мгновенного закрытия скважины), а вторую (после стрелки) — за асимптоту  $AB$ . Тогда проведение по экспериментальным точкам ложной асимптоты  $EF$  (пунктир) приведет к завышению коэффициента пьезопроводности  $\kappa$  и уменьшению проводимости  $kh/\mu$  по сравнению с их действительными значениями.

В случае малопроницаемых пластов ( $\kappa$  мало) на кривых восстановления давления может быть зафиксирован участок 1. Тогда переход на участок 2 (до стрелки) может быть ложно принят за асимптоту, соответствующую традиционной теории упругого режима фильтрации.

В заключение подчеркнем, что при очень больших временах восстановления давления предположение о стационарности начального распределения давления перестает выполняться. Необходимая корректура, как известно [5,6] состоит в том, что строится график зависимости  $\Delta p$  от  $\ln [\tau/(\tau+T)]$ , где  $T$  — время работы исследуемой скважины до момента ее закрытия.

Поступила 27 II 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. ПМТФ, 1968, № 4.
2. Jacob С. E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. Trans. Amer. Geophys. Union, Repts and Papers, pt 2, Hydrology, Washington, Nat. Acad. Sci., D. C., 1940.
3. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОН, 1955 № 2.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. Hogner D. R. Pressure build-up in wells. Proc. Third World Petr. Congress, Sect. 2, Hague, 1951, p. 503—520.
6. Petroleum Production Handbook, vol. 2, Reservoir engineering, McGraw Hill Book Company, 1962. (Рус. перев.: Справочник по эксплуатации нефтяных месторождений. М., «Недра», 1965, т. 2.)