

УДК 532.5.013.12

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЧАСТИЦУ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

О. Б. Бочаров*, Я. С. Игнатенко*,**

* Новосибирский технологический центр “Бейкер Хьюз”, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

E-mails: oleg.bocharov@bakerhughes.com, yaroslav.ignatenko@gmail.com

Проведено численное моделирование процесса обтекания покоящейся сферы ускоряющимся потоком псевдопластической жидкости в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 0 \div 200$ и безразмерных ускорений $Ga = 10 \div 10^4$. Показано, что аналитическое выражение силы присоединенной массы для идеальной жидкости применимо для псевдопластической жидкости. Предложено выражение для расчета наследственной силы типа силы Бассэ для псевдопластической жидкости.

Ключевые слова: псевдопластическая жидкость, обтекание шара, нестационарное течение, ускоряющийся поток, сила Бассэ.

DOI: 10.15372/PMTF20160614

Введение. Описание движения частиц (капель) играет важную роль при моделировании многофазных течений. Поскольку аналитическое решение нестационарных уравнений Навье — Стокса отсутствует, необходимую информацию о поле течения и силах, действующих на частицу, можно получить только с использованием численного моделирования. Численное решение трехмерных нестационарных уравнений для моделирования движения облака частиц с малыми размерами, имеющего большой объем, существенно затруднено. Определив силы, действующие на частицу, можно перейти от моделирования движения отдельной частицы к моделированию движения смеси в целом.

В большинстве работ, посвященных исследованию двухфазных течений, рассматривается движение тел в ньютоновских жидкостях. Однако возросшие технологические требования обуславливают необходимость изучения сред с более сложной реологией. Задачи такого типа находят применение в нефтедобывающей, пищевой, фармакологической и других отраслях промышленности.

Одними из первых нестационарное движение сферы в несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости изучали Ж. Буссинеск (1885 г.), А. Бассэ (1888 г.) и Ч. Озеен (1927 г.). Ими была решена система уравнений Стокса для ползущих течений в пренебрежении конвективными членами и получено выражение для силы, действующей на сферу, в виде суммы силы Стокса F_S , силы F_{am} , обусловленной влиянием присоединенной массы, и силы

Бассэ \mathbf{F}_B [1, 2]:

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu\mathbf{v}r + A_{am}m_f \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 6r^2(\pi\mu\rho)^{1/2} \int_0^t \frac{d\mathbf{v}/dt}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \equiv \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_{am} + \mathbf{F}_B. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}(t)$ — скорость жидкости на бесконечности; $A_{am} = 1/2$; $r = 0,5d$ — радиус сферы; μ — вязкость жидкости; m_f — масса жидкости, вытесненной сферой; ρ — плотность жидкости.

Появление нелокальной во времени (наследственной) составляющей \mathbf{F}_B затрудняет моделирование течений суспензий и эмульсий. Проблема выбора подходящей аппроксимации силы типа силы Бассэ до сих пор остается нерешенной [3]. Имеется большое количество работ, в которых моделируется обтекание сферы стационарным потоком неньютоновской жидкости [4], однако работ, посвященных исследованию нестационарного обтекания, очень мало.

В данной работе путем численного моделирования исследуются силы, действующие на сферу со стороны нестационарного однородного потока неньютоновской жидкости. Анализируется возможность использования традиционной параметризации силы сопротивления с помощью квазистационарной \mathbf{F}_S , инерционной \mathbf{F}_{am} и наследственной \mathbf{F}_B составляющих. Используется степенное реологическое уравнение с показателем, меньшим единицы (псевдопластические жидкости), что, как правило, соответствует поведению буровых и промысловых жидкостей.

Формулировка задачи и методика ее численного решения. Система уравнений, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости в системе, связанной с частицей, может быть записана в виде [1]

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial U_i}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где $\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} \equiv (\mu/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ — тензор вязких напряжений; $\mathbf{U} = U(t)\mathbf{e}_1$ — скорость набегающего потока. Дополнительное слагаемое $\rho \partial U_i/\partial t$ учитывает неинерциальность системы отсчета, связанной с частицей. Таким образом, в системе отсчета, связанной с частицей, скорость \mathbf{U} имеет смысл скорости жидкости на бесконечности. Для модели неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом вязкость задается формулой $\mu = k|\dot{\gamma}|^{n-1}$, где $|\dot{\gamma}| = \sqrt{2\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}$ — скорость сдвига; $n \in (0, 1]$.

Переходя к безразмерным переменным, в данной системе координат получаем два параметра: число Рейнольдса для неньютоновской жидкости $Re = \rho \tilde{U}^{2-n} d^n/k$ и характеризующее ускорение потока число Галилея $Ga = \rho^2 a^{2-n} d^{2+n}/k^2$ (\tilde{U} — характерная скорость потока; a — его характерное ускорение). Введем безразмерное время $t^* = ta/U_m$ ($U_m = (Re_m k/(\rho d^n))^{1/(2-n)}$ — скорость, соответствующая максимальному значению числа Рейнольдса, рассматриваемому в данной работе; $Re_m = 200$). Безразмерная сила, действующая на сферу, выражается через коэффициент сопротивления $C_d = F/F_{ch}$, $F_{ch} = 0,5\pi\rho r^2 \tilde{U}^2$ (F — полная сила, действующая на сферу). Также введем следующие коэффициенты: $C_S = F_S/F_{ch}$, $C_{am} = F_{am}/F_{ch}$, $C_B = F_B/F_{ch}$. Безразмерные коэффициенты, соответствующие максимальной скорости U_m , далее будем помечать звездочкой. Через Re_t обозначим число Рейнольдса, соответствующее текущей скорости $U(t)$, через Re_e — число Рейнольдса, соответствующее равномерному движению частицы при $t > t_e$.

Задача решается в системе отсчета, связанной со сферой, т. е. центр сферы покоится, а жидкость движется равноускоренно. Центр системы координат совпадает с центром шара, ось OX направлена вдоль оси симметрии (вдоль потока), ось OY — вертикально.

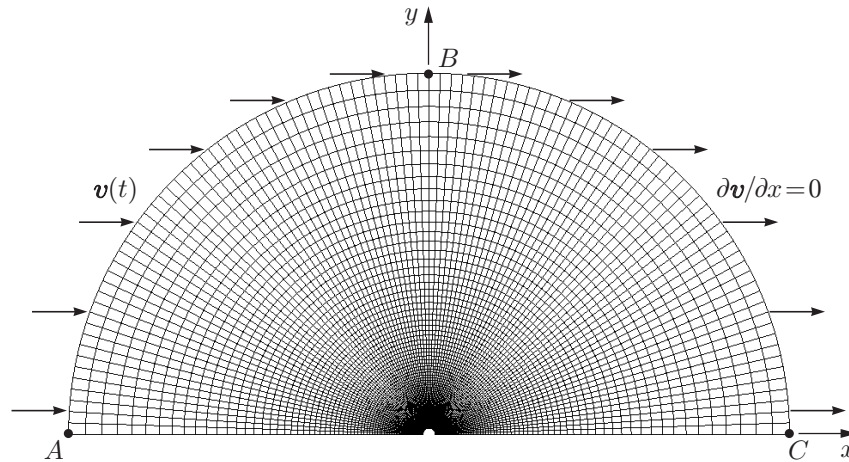


Рис. 1. Расчетная область, вычислительная сетка и граничные условия

Скорость набегающего потока $U(t)$ задается следующим образом:

$$U(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 + at, & 0 \leq t \leq t_e, \\ U_0 + at_e, & t \geq t_e, \end{cases} \quad a = \text{const}.$$

Здесь U_0 — начальная скорость; t_e — момент прекращения движения с ускорением.

Система уравнений гидродинамики с переменной вязкостью решается численно с помощью пакета OpenFOAM. Поскольку набегающий поток однороден, задача обладает осевой симметрией, поэтому для расчетов можно использовать двумерную расчетную область, причем только верхнюю полуплоскость. Узлы вычислительной сетки построены на пересечении коаксиальных окружностей, центры которых совпадают с центром сферы и лучей, исходящих из него. Таким образом, сетка является ортогональной (рис. 1). Сетка сгущается вблизи сферы и включает 10 000 элементов: 100 узлов в радиальном направлении и 100 — в угловом. При радиусе расчетной области, равном $30d$, влияние границы на течение вблизи сферы отсутствует. Минимальная длина стороны ячейки составляет $0,01d$. Дальнейшее измельчение сетки и увеличение размеров расчетной области не приводят к изменению структуры течения и силы сопротивления сферы потоку.

На передней полусфере (дуга AB на рис. 1) задается однородное распределение скорости $\mathbf{v} = (U(t), 0, 0)$, на задней полусфере (дуга BC на рис. 1) ставится “мягкое” граничное условие (условие свободного выхода) $\partial \mathbf{v} / \partial x = 0$. На оси симметрии (отрезок AC на рис. 1) выполняется условие $\partial \mathbf{v} / \partial y = 0$, на поверхности сферы — условия прилипания $\mathbf{v} = 0$.

Результаты моделирования стационарного течения неньютоновской жидкости по описанной методике согласуются с известными результатами расчетов. Проведено сравнение коэффициента сопротивления C_S сферы однородному потоку неньютоновской жидкости с результатами расчетов, представленными в работе [5] (см. таблицу). Погрешность δ не превышает 3 %.

С использованием приближенного аналитического решения (1) для силы, действующей на частицу в ускоряющемся потоке жидкости, можно протестировать численный алгоритм, выбранную расчетную область и сетку при малых числах Рейнольдса. При постоянном ускорении $dU/dt = a$ и нулевой начальной скорости формула Бассэ — Буссинеска — Озеена упрощается:

$$F = 3\pi\mu dat + \pi d^3 a \rho / 4 + (3/2)d^2 a \sqrt{\pi \rho \mu t}. \quad (2)$$

Результаты численного решения, полученные в данной работе и работе [5]

Re	C_S				$\delta, \%$	
	Данные настоящей работы		Данные работы [5]		$n = 1,0$	$n = 0,4$
	$n = 1,0$	$n = 0,4$	$n = 1,0$	$n = 0,4$		
0,01	2475,18	3578,71	2457,12	3475,10	0,73	2,98
1	27,25	35,65	27,36	34,63	-0,41	2,93
10	4,30	3,84	4,31	3,75	-0,15	2,42
50	1,58	1,04	1,55	1,03	1,86	1,18
100	1,04	0,65	1,02	0,63	1,95	2,38

При малых числах Рейнольдса результаты численного моделирования такого течения при $a = 10^{-2} \div 10 \text{ м/с}^2$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $d = 10^{-3} \text{ м}$ хорошо согласуются с приближенным решением (2). При $Re < 1$, что соответствует малому интервалу времени движения частицы, различие аналитического и численного решений не превышает 1 %.

Результаты численного моделирования. Проведены расчеты силы, действующей на сферу, в случае течения жидкости с ускорением при $Ga = 10 \div 10^4$ (для воды этот диапазон соответствует ускорениям $a = 10^{-2} \div 10 \text{ м/с}^2$ при диаметре сферы $d = 10^{-3} \text{ м}$). Начальная скорость изменялась в диапазоне, соответствующем значениям числа Рейнольдса $Re_0 = 0 \div 150$, конечная скорость соответствовала числу Рейнольдса $Re_m = 200$. Проведено сравнение течений ньютоновской жидкости и жидкости со степенным реологическим законом с показателями степени $n = 0,5; 0,7; 0,9$.

На рис. 2 показана зависимость силы, действующей на сферу, от времени при значениях показателя степени $n = 1$ и $n = 0,5$.

Аппроксимация инерционной составляющей. С целью определения коэффициента присоединенной массы проведены расчеты течений жидкости с постоянным ускорением (торможением) в заданном интервале времени. Из выражения (1) следует, что силы F_S и F_B непрерывно зависят от времени, а сила F_{am} , пропорциональная ускорению, имеет скачок в моменты начала и прекращения движения с ускорением. Таким образом, по скачку полной силы в момент ускорения потока или в момент перехода к равномерному движению можно определить значение коэффициента присоединенной массы A_{am} . Такой подход применялся в работах [2, 6] при исследовании ньютоновской жидкости. Полная сила (и соответственно коэффициент C_d^*) может быть представлена в виде суммы силы трения (коэффициента C_f^*) и силы, обусловленной несимметричным распределением давления на поверхности сферы (коэффициента C_p^*). На рис. 2 видны значительные скачки C_p^* и C_d^* в моменты начала и прекращения движения с ускорением. При этом коэффициент C_f^* остается непрерывным. Скачок силы вызван влиянием инерции и присоединенной массы. Таким образом, влияние присоединенной массы обусловлено распределением давления на сфере. Этот результат получен аналитически для сферы, движущейся в невязкой жидкости, и численно подтвержден для линейно-вязких ньютоновских жидкостей [2, 6]. Численные эксперименты показывают, что данный результат справедлив и для нелинейно-вязких псевдопластических жидкостей. В классическом выражении, описывающем силу, обусловленную влиянием присоединенной массы, эта сила пропорциональна ускорению тела и массе жидкости, вытесненной им. В рассматриваемом случае коэффициент присоединенной массы может быть определен в моменты начала и прекращения движения с ускорением по величине скачка силы сопротивления ΔF : $A_{am} = \Delta F / (m_f a)$.

Анализ расчетных данных показывает, что в указанном выше диапазоне параметров значение коэффициента присоединенной массы совпадает со значением для невязкой жидкости, полученным аналитически, с погрешностью, не превышающей 1 %, т. е. независимо от ускорения, параметров жидкости и числа Рейнольдса $A_{am} = 0,5$.

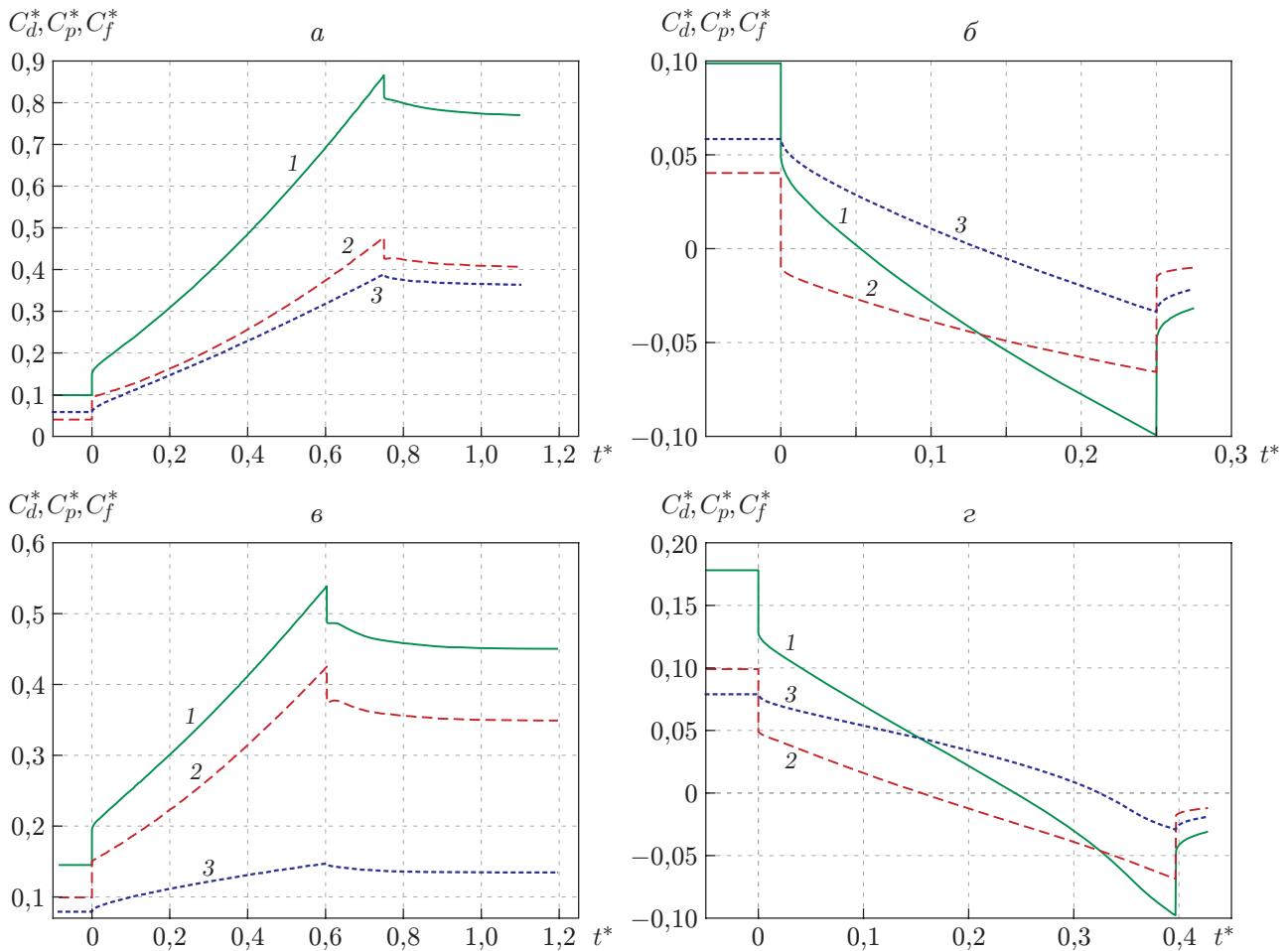


Рис. 2. Зависимость силы сопротивления от времени:

$a, в$ — $Ga = 10^3, Re_0 = 50, Re_e = 200$, $б, г$ — $Ga = -10^3, Re_0 = 50, Re_e = 0$; $a, б$ — $n = 1$, $в, г$ — $n = 0,5$; 1 — коэффициент полного сопротивления C_d^* , 2 — коэффициент C_p^* силы, обусловленной несимметричным распределением давления, 3 — коэффициент C_f^* силы, обусловленной трением

Представление квазистационарной составляющей силы. Для стационарных течений параметрическое представление силы типа силы Стокса F_S существует для большого диапазона чисел Рейнольдса для различных типов жидкостей [7]. При этом результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Ниже проведен анализ поведения нелокальной силы типа силы Бассэ. Для ее выделения из общей силы сопротивления можно использовать как расчетные данные о стационарном обтекании, так и корреляционные зависимости (см., например, [8]), хорошо согласующиеся с результатами расчетов.

Представление наследственной составляющей силы. Первые два члена в параметризации силы, действующей на сферу в нестационарном однородном потоке, можно определить с высокой точностью. Проведя моделирование процесса обтекания сферы ускоряющимся потоком жидкости, можно вычислить зависимость наследственной составляющей силы от времени:

$$F_B = F - F_S - F_{am}. \quad (3)$$

Следует отметить, что в выражении (3) силы зависят от текущей скорости набегающего потока $U(t)$.

Сила Бассэ (1) в приближении Стокса характеризует запаздывание в развитии течения. В приближении Стокса для малых чисел Рейнольдса представление $F = F_S + F_{am} + F_B$ следует из решения, в то время как для больших чисел Рейнольдса такое представление сформулировано по аналогии.

Рассматривается диапазон чисел Рейнольдса $Re = 0 \div 200$. Таким образом, всегда известна максимальная скорость течения. Поэтому далее проведем анализ поведения коэффициента C_B^* , соответствующего значению U_m .

В работах [9, 10] проведено исследование силы, действующей на покоящуюся сферу, обтекаемую осциллирующим потоком жидкости, при $Re = 0 \div 60$. На основе экспериментальных данных предложен корректирующий множитель C_h для исходного выражения для силы Бассэ (1), аппроксимированный в виде функции числа Струхала $Sr = da/U^2(t)$, причем при $Sr \rightarrow \infty$ коэффициент C_h стремится к единице. В [9, 10] также предложен коэффициент A_{am} , зависящий от числа Струхала и стремящийся к значению $A_{am} = 0,5$ при $Sr \rightarrow \infty$, что противоречит известным результатам ($A_{am} \equiv 0,5$). Так как F_B вычисляется через F_{am} по формуле (3), то вызывает сомнение справедливость формулы, предложенной в [9, 10].

В работе [11] рассмотрена задача при постоянном ускорении и предложен корректирующий множитель $C_h = \exp(-Re^{1/3}/(3\sqrt{Sr}))$. Однако в [11] утверждается, что $A_{am} = 3$. Это утверждение также противоречит соотношению (3).

Наряду с введением корректирующего множителя целесообразно выполнить модификацию ядра интегрального оператора силы Бассэ, полученного для малых чисел Рейнольдса и ньютоновской жидкости. В работах [12, 13] для нестационарного течения получено выражение для силы типа силы Бассэ

$$F_B = 6\pi\mu r \int_0^t K(t - \tau, \tau) \frac{dU}{d\tau} dt,$$

где

$$K(t - \tau, \tau) = \left[\left(\frac{\pi(t - \tau)\mu}{r^2\rho} \right)^{1/4} + \left(\frac{\pi}{2} \frac{U^3}{\mu r f_h^3(Re_t)} (t - \tau)^2 \right)^{1/2} \right]^{-2}; \quad (4)$$

$$f_h = 0,75 + 0,105 Re_t.$$

В работе [12] показано, что при больших временах степень пропорциональности ядра наследственной силы $t^{-1/2}$ меняется на t^{-2} . Первое слагаемое в выражении (4) совпадает с выражением Бассэ и характеризует изменение наследственной силы при малых временах, второе слагаемое характеризует изменение этой силы при больших временах и числах Рейнольдса. В работе [14] во второй член выражения (4) для ядра добавлен множитель $G(\tau)$, зависящий от производной ускорения по времени da/dt . Однако в рассматриваемом диапазоне параметров этот множитель мал и результаты, полученные по формуле (4), близки к результатам, полученным по формуле (1).

На основе расчетов, выполненных в данной работе, предлагается модификация ядра (4) для случая псевдопластической жидкости ($n = 0,5 \div 1,0$) в диапазоне ускорений $Ga = 10 \div 10^4$. Следует учитывать, что вязкость не является постоянной величиной и вносится под знак интеграла:

$$F_B = 6\pi r \int_0^t K(t - \tau, \tau) \mu_c(\tau) \frac{dU}{d\tau} dt; \quad (5)$$

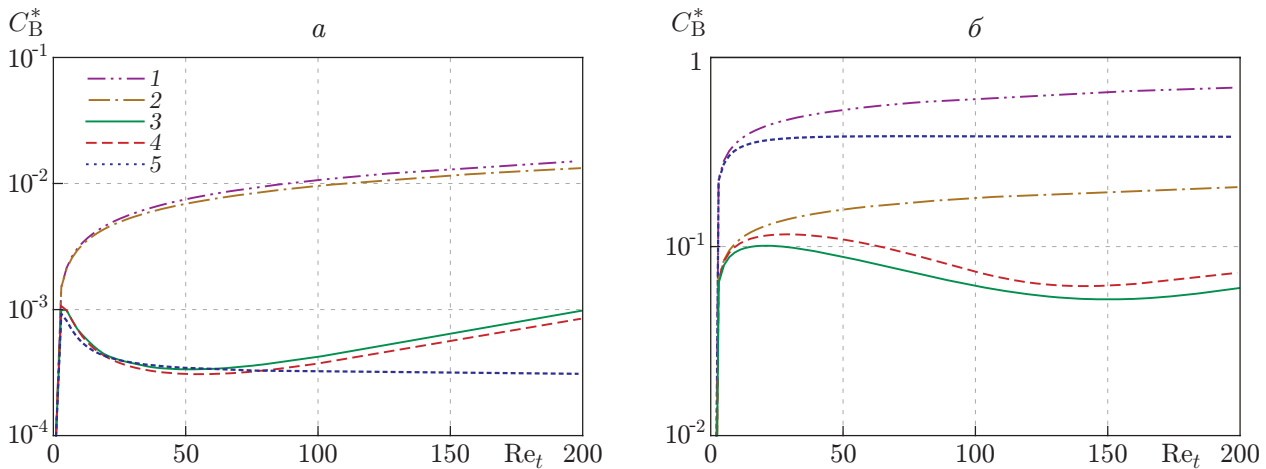


Рис. 3. Результаты расчетов коэффициента наследственной силы при различных ее аппроксимациях ($Re_0 = 1$):
 а — $Ga = 10$, $n = 1$, б — $Ga = 10^4$, $n = 0,5$; 1 — расчет по формуле (1) в работе [1]; 2 — расчет по формуле, полученной в работе [14]; 3 — результаты численного моделирования, полученные в настоящей работе; 4 — расчет по формулам (5), (6); 5 — расчет по формуле (4) в работе [12]

$$K(t - \tau, \tau) = \left[\left(\frac{\pi(t - \tau)\mu_c(\tau)n^{-3,5}}{r^2\rho} \right)^{1/4} + \left(\frac{\pi}{2} \frac{U^3}{\mu_c(\tau)r f_h^3(Re_t)} (t - \tau)^2 \right)^{1/2} \right]^{-2}; \quad (6)$$

$$f_h = 1,1 + C_1 Re_t - C_2 Re_t^2 + C_3 Re_t^3,$$

$$C_1 = (2,5 + 6n) \cdot 10^{-2}, \quad C_2 = 2,828 \cdot 10^{-4} Ga^{0,132}, \quad C_3 = 8,924 \cdot 10^{-6} n^{-3,048} Ga^{-0,08n^{-1,92}}.$$

Здесь используется характерное значение вязкости, определенное по скорости набегающего потока и диаметру сферы: $\mu_c(\tau) = k(U(\tau)/d)^{1-n}$. Проведена модификация функции f_h и в первый член ядра введен множитель, зависящий от показателя степени и описывающий изменение силы в псевдопластической жидкости при малых временах.

На рис. 3,а приведены результаты численного моделирования и расчетов коэффициента наследственной силы при различных ее аппроксимациях для ньютоновской жидкости. Видно, что расчетная функция $C_B^*(Re_t)$ (кривая 3) имеет локальные максимум и минимум. Физический смысл немонотонного поведения этой функции пока неясен. На рис. 3,а также видно, что кривые 1, 2, полученные по корреляционным формулам, близки к кривой 3, построенной с использованием результатов численного моделирования, лишь при малых числах Рейнольдса Re_t , т. е. на начальном временном интервале движения с ускорением. Результаты расчетов по формуле (4) хорошо согласуются с результатами численных расчетов (кривая 3) в диапазоне значений числа Рейнольдса $Re_t \leq 50$ (кривая 5), в то время как результаты расчетов по формулам (5), (6) (кривая 4) — при $Re_t \leq 200$ (максимальное различие не превышает 13 %). Более того, формулы (5), (6) качественно описывают немонотонную зависимость силы Бассэ от числа Рейнольдса Re_t .

Для псевдопластической жидкости корреляционные формулы для нелокальной силы отсутствуют, поэтому при моделировании движения частиц в неньютоновских средах обычно используются соответствующие формулы для ньютоновской жидкости [7]. Поскольку ни одна из этих формул не описывает наследственную силу в псевдопластической жидкости, будем использовать ядра, предложенные в работах [12, 14], и ядро Бассэ (1), а силу типа силы Бассэ будем вычислять с помощью интегрального оператора (5).

На рис. 3,б видно, что применяемая для ньютоновской среды при $Re_t \leq 75$ формула из работы [12] применима также при увеличении ускорения Ga для псевдопластической жидкости ($n < 1$) при существенно меньших Re_t (кривая 5). В данном случае все формулы, полученные с использованием (1) и формул, приведенных в работах [12, 14] (кривые 1, 2, 5), не описывают немонотонную зависимость $C_B^*(Re_t)$. Формулы (5), (6) качественно описывают зависимость нелокальной силы от числа Рейнольдса Re_t в рассматриваемом диапазоне при различных значениях n , Ga (кривая 4). При $n \geq 0,5$, $Re_t < 200$ отклонение результатов расчетов по предложенным формулам (5), (6) от результатов численного моделирования для псевдопластической жидкости не превышает 15 %.

Заключение. В работе приведены результаты анализа нелокальной составляющей силы для случая ускоренного движения. В случае торможения потока процесс перестройки течения более сложен и требует отдельного рассмотрения. Показано, что при моделировании переноса частиц и капель в потоках псевдопластических жидкостей для силы присоединенной массы можно использовать известное приближение для идеальной жидкости, а для силы типа силы Бассэ — аппроксимацию (5), (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. **Rivero M., Magnaudet J., Fabre J.** Quelques résultats nouveaux concernant les forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré // C. R. Acad. Sci. Paris. 1991. V. 312. P. 1499–1506.
3. **van Hinsberg M. A. T., ten Thije Boonkamp J. H. M., Clercx H. J. H.** An efficient, second order method for the approximation of the Basset history force // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 1465–1478.
4. **Goyal N., Derksen J. J.** Direct simulations of spherical particles sedimenting in viscoelastic fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. V. 183/184. P. 1–13.
5. **Tripathi A., Chhabra R. P., Sundararajan T.** Power law fluid flow over spheroidal particles // Industr. Engng Chem. Res. 1994. V. 33. P. 403–410.
6. **Chang E. J., Maxey M. R.** Accelerated motion of rigid spheres in unsteady flow at low to moderate Reynolds numbers. 2. Accelerated motion // J. Fluid Mech. 1995. V. 303. P. 133–153.
7. **Chhabra R. P.** Bubbles, drops, and particles in non-Newtonian fluids. Boca Raton: Chem. Industr. Taylor Francis, 2007.
8. **Michaelides E. E.** Particles, bubbles and drops. Their motion, heat and mass transfer. Singapore: World Sci., 2006.
9. **Odar F., Hamilton W. S.** Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid // Fluid. Mech. 1964. V. 18. P. 302–314.
10. **Odar F.** Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid // Fluid Mech. 1966. V. 25. P. 591–592.
11. **Li R., Boulos M.** Modeling of unsteady flow around accelerating sphere at moderate Reynolds number // Canad. J. Chem. Engng. 1993. V. 71. P. 837–843.
12. **Mei R., Lawrence C. J., Adrian R. J.** Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity // J. Fluid Mech. 1991. V. 233. P. 613–631.
13. **Mei R.** History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity // Intern. J. Multiphase Flow. 1993. V. 19, N 3. P. 509–525.
14. **Kim I., Elghobashi S., Sirignano W. A.** On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers // J. Fluid Mech. 1998. V. 367. P. 221–253.

Поступила в редакцию 7/IV 2015 г.,
в окончательном варианте — 7/IV 2016 г.