ТЕОРИЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЖЕСТКИМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБАХ

Э. И. Григолюк, П. П. Чулков

(Новосибирск)

Строится теория конечного прогиба многослойных оболочек из линейно-вязко-упругого материала для каждого слоя. В основу положены уравнения пологих оболочек [1, 2] и гипотеза о линейном изменении перемещений по высоте пакета [1], а также гипотеза о несжимаемости слоев в поперечном направлении. В отличие от теории трехслойных оболочек [3–5], предполагается произвольное чередование заполнителей и несущих слоев, причем число их не устанавливается. Под заполнителем, который, как и несущий слой, воспринимает крутящие и изгибающие моменты, а также усилия в своей срединной поверхности, подразумевается слой, передающий деформации поперечного сдвига. В результате получена система трех дифференциальных уравнений относительно функции перемещений χ, силовой функции F и некоторой потенциальной функции φ. Отсюда могут быть получены различные частные случаи: система уравнений для оболочки с легким заполнителем, система уравнений трехслойных оболочек и т. п. Показано, что при решении практических задач уравнения, содержащие φ, можно не рассматривать и, следовательно, основываться на системе нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих F и χ.

Ряд линейных задач обсуждался раньше [6–9].

В статье [6] дан вывод уравнений трехслойной пластины с несимметричной структурой при малых, гармонических перемещениях в предположении, что несущие слои — упругие мембраны, прикрепленные срединными поверхностями к внешним поверхностям вязко-упругого заполнителя, воспринимающего только поперечный сдвиг. Для одномерного случая отсюда следует выражение работы [7], в которой результаты расчета сопоставлены с экспериментом.

В работе [8] уравнения статьи [3] распространены на случай малых гармонических колебаний вязко-упругой трехслойной ортотропной цилиндрической круговой оболочки с жестким заполнителем; вводятся комплексные модули, описывающие упругие и демпфирующие свойства материала, рассмотрен случай нормального гармонического давления на круговую панель, у которой на каждой кромке нормальная сила, прогиб, изгибающий момент, смещение вдоль кромки и угол наклона равны нулю.

В работе [9] подробно разобран случай малых деформаций симметричной по высоте трехслойной балки с вязко-упругим безмоментным несущим слоем и упругим заполнителем, передающим поперечный сдвиг и поперечное сжатие при поперечном давлении, меняющемся с постоянной скоростью во времени, либо остающемся постоянным. Исследуется тонкая пологая оболочка, стенка которой состоит из произвольного числа слоев, жестко соединенных между собой по поверхностям соприкосновения и выполненных из различного материала, обладающего свойствами линейной вязко-упругости. Если имеются слои, выполненные из материала, значительно слабее сопротивляющегося сдвигу, по сравнению с материалами остальных слоев, использование гипотез Кирхгоффа — Лява для пакета в целом становится невозможным, так как при этом оказались бы не учтенными явления, связанные со сдвигом этих слоев. В дальнейшем будем использовать более общую систему кинематических гипотез, состоящую в том, что для каждого слоя, во-первых, материал считается несжимаемым в поперечном направлении и, во-вторых, прямолинейный отрезок, перпендикулярный поверхности оболочки, в процессе деформации поворачивается, не искривляясь, но, в отличие от гипотезы Кирхгоффа — Лява о прямой нормали, он не остается перпендикулярным к изогнутой исходной поверхности оболочки. Эта более общая система гипотез [3, 4] позволяет построить рациональное приближение, учитывающее сдвиги, происходящие в слоях. Переход к приближению, соответствующему гипотезам Кирхгоффа — Лява, осуществляется, если устремить к бесконечности модуль сдвига соответствующего слоя.

§ 1. **Постановка задачи.** Рассмотрим оболочку, состоящую из s слоев, за исходную поверхность примем внутреннюю поверхность, отнесенную к декартовым координатам x_i $(i=1,2)$, линии которых совпадают с линиями главных кривизн оболочки. Пусть z — координата, измеренная по внешней нормали, h — полная толщина оболочки, h_k — толщина k-го слоя, δ_k — расстояние от исходной поверхности до верха k-го слоя, k_{ii} — кривизна i-й координатной линии; u_i, w — тангенциальные и нормальные перемещения точки исходной поверхности; α_i^k — углы поворота нормали в пределах k-го слоя.

Уравнение совместности. Прогиб оболочки постоянен по толщине $w = w(x_1, x_2)$, так как материал слоев не сжимаем в поперечном направлении. Согласно кинематической гипотезе, тангенциальные перемещения точек k-го слоя определяются по формуле

$$u_i^z = u_i + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_i^r h_r + \alpha_i^k (z - \delta_{k-1}) \qquad (\delta_{k-1} \leqslant z \leqslant \delta_k)$$

Деформации произвольной поверхности k-го слоя равны

$$\varepsilon_{ij}^z = e_{ij} + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{ij}^r h_r + \alpha_{ij}^k (z - \delta_{k-1}), \qquad \varepsilon_{i3}^k = \alpha_i^k + w_{,i} \quad (\delta_{k-1} \leqslant z \leqslant \delta_k) \qquad (1.1)$$

Здесь

$$e_{ij} = {}^1/_2 (u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij} w + {}^1/_2 w_{,i} w_{,j}$$

$$\alpha_{ij}^k = {}^1/_2 (\alpha_{i,j}^k + \alpha_{j,i}^k), \qquad k_{12} = 0$$

Как обычно, нижний индекс, поставленный после запятой, означает дифференцирование по соответствующей координате.

Для плоского напряженного состояния связь между напряжениями и деформациями в случае вязко-упругой модели тела может быть приведена к виду

$$(\mathbf{R} + 2\Omega)\mathbf{R}\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu}\Omega\,[(\mathbf{R} + 2\Omega)\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\mathbf{R} - \Omega)\varepsilon_{rr} - 3\mathbf{R}\omega\Delta T\delta_{ij}]$$

$$\mathbf{R} = \frac{1+\nu}{1-2\nu}\left(1 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + \ldots + a_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)$$

$$\Omega = \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + \ldots + b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \qquad (\delta_{ii} = 1, \;\; \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j)$$

Здесь E — модуль упругости первого рода, ν — коэффициент Пуассона, ω — коэффициент температурного расширения, ΔT — приращение температуры, t — время. Если

$$\frac{\Omega}{\mathbf{R}} = \mu\lambda, \qquad \mu = \frac{1-2\nu}{1-\nu^2}, \; 3\omega\Delta T = \tau$$

то имеем

$$(1 + 2\mu\lambda)\sigma_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2}\lambda\,[(1 + 2\mu\lambda)\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(1 - \mu\lambda)\varepsilon_{rr} - \tau\delta_{ij}] \qquad (1.2)$$

Оператор λ имеет вид

$$\lambda = (1-\nu)\frac{1 + b_1\partial(\ldots)/\partial t + \ldots + b_n\partial^n(\ldots)/\partial t^n}{1 + a_1\partial(\ldots)/\partial t + \ldots + a_m\partial^m(\ldots)/\partial t^m}$$

Для несжимаемого материала ($\nu = {}^1/_2$, $\mu = 0$) формула (1.2) упрощается

$$\sigma_{ij} - {}^4/_3 E\lambda(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{rr} - \tau\delta_{ij})$$

Напряжения для k-го слоя определяются по формуле

$$(1+2\mu_k\lambda_k)\,\sigma_{i3}^k=\frac{E_k}{1-\nu_k^2}\lambda_k\,[(1+2\mu_k\lambda_k)\,\varepsilon_{ij}^k+\delta_{ij}(1-\mu_k\lambda_k)\,\varepsilon_{rr}-\tau_k\delta_{ij}] \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{i\,3}^{k}=G_k\mathrm{g}_k(\alpha_i^k+w_{,i}) \qquad (1.4)$$

Здесь G_k — модуль сдвига для плоскостей x_1z и x_2z материала k-го слоя, g_k — оператор вида

$$\mathrm{g}_k=\frac{1+c_1^k\partial\,(\ldots)/\partial t\ \ldots}{1+d_1^k\partial\,(\ldots)/\partial t}\qquad\left(G_k=\frac{E_k}{2\,(1+\nu_k)},\quad \mathrm{g}_k=\frac{1}{1-\nu_k}\lambda_k\right)$$

(здесь в скобках дано для изотропного материала). Перепишем соотношения (1.3), (1.4) в следующем виде:

$$\Lambda\sigma_{ij}^k=\frac{E_k\lambda_k}{1-\nu_k^2}\,[\Lambda\varepsilon_{ij}^k+\delta_{ij}\Lambda_k\varepsilon_{rr}^k-\frac{\Lambda}{1+2\mu_k\lambda_k}\,\tau_k\delta_{ij}] \qquad (1.5)$$

$$\Lambda\sigma_{i3}^k=G_k\mathrm{g}_k\Lambda(\alpha_i^k+w,{}_i),\ \Lambda=\prod_{k=1}^{s}(1+2\mu_k\lambda_k),\qquad \Lambda_k=\Lambda\,\frac{1-\mu_k\lambda_k}{1+2\mu_k\lambda_k}$$

Определим удельные тангенциальные усилия, поперечные силы и удельные моменты k-го слоя по формулам

$$N_{ij}^k=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\sigma_{ij}^k\,dz,\qquad Q_i^k=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\sigma_{i3}^k\,dz,\quad M_{ij}^k=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\sigma_{ij}^k\,(z-\delta_{k-1})\,dz \qquad (1.6)$$

Уравнения равновесия в усилиях имеют вид

$$\sum_{k=1}^{s}(N_{1i,\,1}^k+N_{2i,\,2}^k)=0 \qquad (1.7)$$

$$h_k\sum_{m=k}^{s-1}(N_{1i,\,1}^{m+1}+N_{2i,\,2}^{m+1})+M_{1i,\,1}^k+M_{2i,\,2}^k=Q_i^k \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^{s}(Q_{1,\,1}^k+Q_{2,\,2}^k)-\sum_{k=1}^{s}(k_{11}N_{11}^k+k_{22}N_{22}^k)+\sum_{i,\,j}w,{}_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{s}N_{ij}^k\Big)+q=0 \qquad (1.9)$$

Для того чтобы воспользоваться этими уравнениями, необходимо произвести над ними операцию Λ. Рассмотрим первые два уравнения (1.7). Согласно формулам (1.6), (1.5) и (1.1)

$$\Lambda N_{ij}^k=\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2}\lambda_k\Big[\Lambda\Big(e_{ij}+\sum_{q=1}^{k-1}\alpha_{ij}^kh_q\Big)+\delta_{ij}\,\Lambda_k\Big(e_{rr}+\sum_{q=1}^{k-1}h_q\alpha_{rr}^q\Big)+$$

$$+\frac{h_k}{2}\,\Lambda\alpha_{ij}^k+\delta_{ij}\Lambda_k\,\frac{h_k}{2}\,\alpha_{rr}^k\Big]-\frac{\Lambda\lambda_k}{1+2\mu_k\lambda_k}\,\delta_{ij}N_k\,,\qquad N_k=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\frac{E_k\tau_k}{1-\nu_k^2}\,dz$$

Найдем далее

$$\Lambda N_{ij}=\Lambda\sum_{k=1}^{s}N_{ij}^k$$

Пусть

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}=\sum_{k=1}^{s}\frac{E_kh_k}{1-\nu_k^2},\qquad \gamma_k=\frac{E_kh_k\,(1-\nu^2)}{(1-\nu_k^2)\,Eh},\qquad t_k=\frac{h_k}{h}$$

Для определенности обозначим $\nu=\nu_1\gamma_1+\ldots+\nu_s\gamma_s$

В дальнейшем E и ν будем называть соответственно приведенным модулем упругости и коэффициентом Пуассона. Кроме того, введем

$$h_k\alpha_1^k = ha_{,1}^k + h\varphi_{,2}^k, \qquad h_k\alpha_2^k = ha_{,2}^k - h\varphi_{,1}^k$$

Тогда

$$h_k\alpha_{11}^k = ha_{,11}^k + h\varphi_{,12}^k, \qquad h_k\alpha_{22}^k = ha_{,22}^k - h\varphi_{,12}^k$$

$$h_k\alpha_{12}^k = ha_{,12}^k + {}^1/_2 h(\varphi_{,22}^k - \varphi_{,11}^k)$$

Функции a^k и φ^k являются соответственно скалярным и векторным потенциалами вектора $(\alpha_1^k,\ \alpha_2^k)$. Тогда

$$\mathbf{\Lambda} N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\mathbf{I}e_{11} + \mathbf{P}e_{22}] + \frac{Eh^2}{1-\nu^2}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r a_{,11}^r + \mathbf{P}_s^r a_{,22}) +$$

$$+ \frac{Eh^2}{1-\nu}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r - \mathbf{P}_s^r)\,\varphi_{,\,12}^r - \mathbf{\Lambda} N$$

$$\mathbf{\Lambda} N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\mathbf{I}e_{22} + \mathbf{P}e_{11}] + \frac{Eh^2}{1-\nu^2}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r a_{,22} + \mathbf{P}_s^r a_{,\,11}) -$$

$$- \frac{Eh^2}{1-\nu^2}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r - \mathbf{P}_s^r)\,\varphi_{,\,12}^r - \mathbf{\Lambda} N$$

$$\mathbf{\Lambda} N_{12} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\,e_{12} + \frac{Eh^2}{1-\nu^2}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r - \mathbf{P}_s^r)\,a_{,12}^r +$$

$$+ \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}\sum_{r=1}^{s}(\mathbf{I}_s^r - \mathbf{P}_s^r)(\varphi_{,\,22}^r - \varphi_{,\,11}^r)$$

Здесь

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{s}\gamma_k\boldsymbol{\lambda}_k(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_k), \qquad \mathbf{P} = \sum_{k=1}^{s}\gamma_k\boldsymbol{\lambda}_k\mathbf{\Lambda}_k,\ N = \sum_{k=1}^{s}\frac{\boldsymbol{\lambda}_k}{1+2\mu_k\boldsymbol{\lambda}_k}N_k \tag{1.10}$$

$$\mathbf{I}_s^r = \sum_{k=r}^{s}\gamma_k\boldsymbol{\lambda}_k(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_k) - \frac{1}{2}\gamma_r\boldsymbol{\lambda}_r(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_r), \quad \mathbf{P}_s^r = \sum_{k=r}^{s}\gamma_k\boldsymbol{\lambda}_k\mathbf{\Lambda}_k - \frac{1}{2}\gamma_r\boldsymbol{\lambda}_r\mathbf{\Lambda}_r$$

Пусть

$$u_1 = u_1^\circ + hv_{,1} + h\psi_{,2}, \qquad u_2 = u_2^\circ + hv_{,2} - h\psi_{,1}$$

Потребуем выполнения равенств

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}e_{11,1}^\circ + \mathbf{P}e_{22,1}^\circ + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\,e_{12,2}^\circ - \frac{1-\nu^2}{Eh}\mathbf{\Lambda} N_{,\,1} = 0 \\ &\mathbf{I}e_{22,2}^\circ + \mathbf{P}e_{11,2}^\circ + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\,e_{12,1}^\circ - \frac{1-\nu^2}{Eh}\mathbf{\Lambda} N_{,\,2} = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$e_{ij}^\circ = {}^1/_2(u_{i,j}^\circ + u_{j,\,i}^\circ) + k_{ij}w + {}^1/_2\, w_{,\,i}w_{,\,j} \tag{1.12}$$

Уравнения (1.11) тождественно удовлетворяется при

$$\begin{aligned} e_{11}^\circ &= \frac{1}{Eh}(\mathbf{I}F_{,\,22} - \mathbf{P}F_{,11}) + \frac{1-\nu^2}{Eh}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}N \\ e_{22}^\circ &= \frac{1}{Eh}(\mathbf{I}F_{,\,11} - \mathbf{P}F_{,\,22}) + \frac{1-\nu^2}{Eh}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}N \\ e_{12}^\circ &= -\frac{1}{Eh}(\mathbf{I} + \mathbf{P})\,F_{,\,12} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Используя условие совместности деформаций (1.12), получим уравнение для силовой функции F

$$\mathbf{I}\nabla^2\nabla^2 F + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{I}+\mathbf{P})^{-1}(1-\nu^2)\nabla^2 N = \tag{1.14}$$
$$= Eh(k_{22}w_{,11} + k_{11}w_{,22} + w_{,12}{}^2 - w_{,11}w_{,22})$$

Кроме того, из уравнений (1.7) получаем равенства

$$\mathbf{I}v + \sum_{r=1}^{s} \mathbf{I}_s{}^r a^r = 0, \qquad \mathbf{I}\psi + \sum_{r=1}^{s} \mathbf{I}_s{}^r \varphi^r = 0 \tag{1.15}$$

§ 2. Уравнение равновесия. Выразим удельные моменты

$$\mathbf{\Lambda} H_{ij}{}^k = \mathbf{\Lambda} M_{ij}{}^k + \mathbf{\Lambda} h_k \sum_{m=k+1}^{s} N_{ij}{}^m$$

через скалярный a^k и векторный потенциалы φ^k

$$\mathbf{\Lambda} H_{11}{}^k = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} t_k \Big[\mathbf{I}_s{}^k e_{11} + \mathbf{P}_s{}^k e_{22} + h\mathbf{I}_s{}^k \sum_{m=1}^{k} a_{,11}{}^m + h\mathbf{P}_s{}^k \sum_{m=1}^{k} a_{,22}{}^m +$$
$$+ h \sum_{m=k+1}^{s} \left(\mathbf{I}_s{}^m a_{,11}^{m} + \mathbf{P}_s{}^m a_{,22}^{m}\right) - \frac{h}{6} \lambda_k \gamma_k (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_k) a_{,11}^{k} - \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda}_k a_{,22}^{k} +$$
$$+ h(\mathbf{I}_s{}^k - \mathbf{P}_s{}^k) \sum_{m=1}^{k} \varphi_{,12}^{m} + h \sum_{m=k+1}^{s} (\mathbf{I}_s{}^m - \mathbf{P}_s{}^m) \varphi_{,12}^{m} - \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda} \varphi_{,12}^{k}\Big] - \mathbf{\Lambda} H_k$$

$$\mathbf{\Lambda} H_{22}{}^k = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} t_k \Big[\mathbf{I}_s{}^k e_{22} + \mathbf{P}_s{}^k e_{11} + h\mathbf{I}_s{}^k \sum_{m=1}^{k} a_{,22}^{m} +$$
$$+ h\mathbf{P}_s{}^k \sum_{m=1}^{k} a_{,11}^{m} + h \sum_{m=k+1}^{s} \mathbf{I}_s{}^m a_{,22}^{m} + h \sum_{m=k+1}^{s} \mathbf{P}_s{}^m a_{,11}^{m} -$$
$$- h(\mathbf{I}_s{}^k - \mathbf{P}_s{}^k) \sum_{m=1}^{k} \varphi_{,12}^{m} - h \sum_{m=k+1}^{s} (\mathbf{I}_s{}^m - \mathbf{P}_s{}^m) \varphi_{,12}^{m} -$$
$$- \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_k) a_{,22}^{k} - \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda}_k a_{,11}^{k} + \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda} \varphi_{,12}^{k}\Big] - \mathbf{\Lambda} H_k$$

$$\mathbf{\Lambda} H_{12}{}^k = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} t_k \Big[(\mathbf{I}_s{}^k - \mathbf{P}_s{}^k) e_{12} + h(\mathbf{I}_s{}^k - \mathbf{P}_s{}^k) \sum_{m=1}^{k} a_{,12}^{m} +$$
$$+ h \sum_{m=k+1}^{s} (\mathbf{I}_s{}^m - \mathbf{P}_s{}^m) a_{,12}^{m} - \frac{h}{6} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda} a_{,12}^{k} + \frac{h}{2} (\mathbf{I}_s{}^k - \mathbf{P}_s{}^k) \sum_{m=1}^{k} (\varphi_{,22}^{m} - \varphi_{,11}^{m}) +$$
$$+ \frac{h}{2} \sum_{m=k+1}^{s} (\mathbf{I}_s{}^m - \mathbf{P}_s{}^m)(\varphi_{,22}^{m} - \varphi_{,11}^{m}) - \frac{h}{12} \boldsymbol{\lambda}_k \gamma_k \mathbf{\Lambda} (\varphi_{,22}^{k} - \varphi_{,11}^{k})$$

где

$$\mathbf{\Lambda} H_k = \mathbf{\Lambda} h_k \sum_{m=k+1}^{s} \frac{\boldsymbol{\lambda}_m}{1 + 2\mu_m \lambda_m} N + \mathbf{\Lambda} \frac{\boldsymbol{\lambda}_k}{1 + 2\mu_k \lambda_k} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \frac{E_k \tau_k (z - \delta_{k-1})}{1 - \nu_k{}^2} dz$$

Поперечные силы ΛQ_i^k, согласно (1.6), равны

$$\Lambda Q_1^k = \Lambda G_k g_k h(a_{,1}^k + w_{,1}t_k + \varphi_{,2}^k), \qquad \Lambda Q_2^k = \Lambda G_k g_k h(a_{,2}^k + w_{,2}t_k - \varphi_{,1}^k)$$

Уравнения (1.8) распадаются на независимые системы

$$\frac{1}{Eh^2}(\mathbf{IP}_s^k - \mathbf{I}_s^k\mathbf{P})\nabla^2\nabla^2 F + \mathbf{I}_s^k\nabla^2\nabla^2 v +$$

$$+ \mathbf{I}_s^k\nabla^2\nabla^2\sum_{m=1}^{k} a^m + \nabla^2\nabla^2\sum_{m=k+1}^{s}\mathbf{I}_s^m a^m - \frac{1}{6}\lambda_k\gamma_k(\Lambda + \Lambda_k)\nabla^2\nabla^2 a^k - \tag{2.1}$$

$$- \frac{1-\nu^2}{Eh^3}\Lambda\nabla^2[H_k - (\mathbf{I}+\mathbf{P})^{-1}(\mathbf{I}_s^k + \mathbf{P}_s^k)hN] = \nabla^2\Lambda g_k h^{-2}\beta_k(a^k + wt_k)$$

$$(\mathbf{I}_s^k - \mathbf{P}_s^k)\nabla^2\nabla^2\psi + (\mathbf{I}_s^k - \mathbf{P}_s^k)\sum_{m=1}^{k}\nabla^2\nabla^2\varphi^m + \sum_{m=k+1}^{s}(\mathbf{I}_s^m - \mathbf{P}_s^m)\nabla^2\nabla^2\varphi^m -$$

$$-\frac{1}{6}\lambda_k\gamma_k\Lambda\nabla^2\nabla^2\varphi^k = \nabla^2\Lambda g_k h^{-2}\beta_k\varphi^k \qquad (k = 1, \ldots, s), \; \beta_k = \frac{G_k(1-\nu^2)}{Et_k} \tag{2.2}$$

Из системы (2.1) функция v может быть исключена при помощи первого равенства (1.15), а функция ψ из системы (2.2) — при помощи второго равенства (1.15). Умножая уравнения (2.1) на оператор $\mathbf{I}$ и используя первое равенство (1.15), найдем

$$\frac{1}{Eh^2}\mathbf{I}(\mathbf{IP}_s^k - \mathbf{I}_s^k\mathbf{P})\nabla^2\nabla^2 F + \mathbf{II}_s^k\nabla^2\nabla^2\sum_{m=1}^{k} a^m -$$

$$- \nabla^2\nabla^2\mathbf{I}_s^k\sum_{r=1}^{s}\mathbf{I}_s^r a^r + \nabla^2\nabla^2\mathbf{I}\sum_{m=k+1}^{s}\mathbf{I}_s^m a^m - \frac{1}{6}\mathbf{I}\lambda_k\gamma_k(\Lambda + \Lambda_k)\nabla^2\nabla^2 a^k -$$

$$-\nabla^2\frac{1-\nu^2}{Eh^3}\mathbf{I}\Lambda[H_k - (\mathbf{I}+\mathbf{P})^{-1}(\mathbf{I}_s^k + \mathbf{P}_s^k)hN] = \nabla^2\mathbf{I}\Lambda g_k h^{-2}\beta_k(a^k + wt_k)$$

или, в матричной форме

$$h^2\nabla^2\nabla^2\mathrm{A}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{f}}{E}\nabla^2\nabla^2 F = \nabla^2(\mathrm{B}\mathbf{a} + \mathbf{b}w + \mathbf{p}) \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ — векторы-столбцы с элементами

$$\mathbf{a} = \{a^1, \ldots, a^s\}, \qquad \mathbf{b} = \{\mathbf{I}\Lambda g_1\beta_1 t_1, \ldots, \mathbf{I}\Lambda g_s\beta_s t_s\}$$

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{I}(\mathbf{IP}_s^1 - \mathbf{I}_s^1\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{I}(\mathbf{IP}_s^s - \mathbf{I}_s^s\mathbf{P})\}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1-\nu^2}{Eh^2}\{\mathbf{I}\Lambda[H_1 + (\mathbf{P}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}_s^1 + \mathbf{P}_s^1)hN, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{I}\Lambda[H_s + (\mathbf{P}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}_s^s + P_s^s)hN]\}$$

а А и В — матрицы с элементами

$$\mathrm{A}_{ij} = \begin{cases}\mathbf{II}_s^i - \mathbf{I}_s^i\mathbf{I}_s^j - {}^1/_6\,\delta_{ij}\mathbf{I}\lambda_i\gamma_i(\Lambda + \Lambda_i) & (i \geqslant j)\\ \mathbf{II}_s^j - \mathbf{I}_s^i\mathbf{I}_s^j & (i < j)\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\mathrm{B}_{ij} = \mathbf{I}\Lambda g_i\beta_i\delta_{ij} \tag{2.5}$$

Как следует из (2.4) и (2.5), матрица А симметрична, а матрица В диагональна.

Уравнение (2.3) получено при учете сдвига для всех слоев, однако чаще всего это необходимо только для группы слоев, обладающей малой, сравнительно с остальными, жесткостью на сдвиг. Иначе получается неоправданное увеличение порядка уравнений, так как это равносильно учету членов вида $k_{ii}^2 a^2$ (a — характерный размер оболочки в плане), поэтому для жестких (несущих) слоев следует считать $a^l = -wt_l$ ($\beta_l = \infty$). С учетом этого замечания уравнение (2.3) перепишется в виде

$$h^2\nabla^2\nabla^2\mathrm{A}_1\mathbf{a}_1 - h^2\nabla^2\nabla^2\mathbf{c}w + \frac{\mathbf{f}_1}{E}\nabla^2\nabla^2 F = \nabla^2(\mathrm{B}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 w + \mathbf{p}_1) \tag{2.6}$$

Матрицы A_1 и B_1 получены соответственно из матриц А, В вычеркиванием строк и столбцов, на пересечении которых находились элементы a^k, принадлежащие несущим слоям, таким же путем найдены векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{p}_1$, из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$ соответственно. Вектор $\mathbf{c}$ получится, если в строках матрицы А, принадлежащих заполнителям, выбрать элементы, соответствующие несущим слоям, и построчно просуммировать их, предварительно умножив на толщину t_l соответствующего несущего слоя.

Удовлетворим тождественно уравнение (2.6) при условиях $F = 0$ и $\mathbf{p}_1 = 0$, полагая

$$w = \left[\sum_{n=0}^{p}(h^2\nabla^2)^n \mathrm{w}_n\right]\chi, \qquad \mathbf{a}_1 = \left[\sum_{n=0}^{p}(h^2\nabla^2)^n \boldsymbol{\eta}_n\right]\chi \tag{2.7}$$

Здесь w_n — скалярный временной оператор, $\boldsymbol{\eta}_n$ — векторный временной оператор, p — число заполнителей. Подставляя (2.7) в уравнение (2.6) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях оператора $h^2\nabla^2$, получим рекуррентную формулу для определения векторов $\boldsymbol{\eta}_k$

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathrm{B}_1^{-1}\mathrm{A}_1\boldsymbol{\eta}_{k-1} - \mathrm{B}_1^{-1}\mathbf{c}\mathrm{w}_{k-1} - B_1^{-1}\mathbf{b}\mathrm{w}_k$$

при этом уравнения будут тождественно удовлетворены, если в качестве скаляров w_0, w_1, w_2, ..., w_n принять соответствующие коэффициенты характеристического полинома матрицы $\mathrm{B}_1^{-1}\mathrm{A}_1$.

Для полного удовлетворения уравнений (2.6) нужно добавить к вектору $\mathbf{a}_1$, определяемому формулой (2.7), вектор $\mathbf{a}_1^\circ$, удовлетворяющий линейному уравнению

$$h^2\nabla^2\nabla^2\mathrm{A}_1\mathbf{a}_1^\circ + \frac{\mathbf{f}_1}{E}\nabla^2\nabla^2 F = \nabla^2(\mathrm{B}_1\mathbf{a}_1^\circ + p_1) \tag{2.8}$$

в котором $\nabla^2\nabla^2 F$ может быть заменено через функцию χ при помощи уравнения (1.14) или отброшено из-за малости элементов вектора $\mathbf{f}_1$. В последнем случае задача упрощается, так как достаточно будет найти любое частное решение этого уравнения. Таким образом, вектор

$$\mathbf{a}_1 = \left[\sum_{n=0}^{p}(h^2\nabla^2)^n \boldsymbol{\eta}_n\right]\chi + \mathbf{a}_1^0 \tag{2.9}$$

Рассмотрим уравнение (1.9). При $\varphi_k = 0$ вектор-столбец H_{ij}, элементами которого являются моменты H_{ij}^k, имеет вид

$$\Lambda H_{ij} = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}T\left[\frac{\mathbf{f}}{Eh}F_{,ij} + Aa_{,ij}\right] - \Lambda H, \quad T = \begin{pmatrix} t_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & t_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & t_s \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

а из уравнения (1.9) следует равенство

$$\Lambda\sum_{k=1}^{s}(H_{11,11}^k + 2H_{12,12}^k + H_{22,22}^k) -$$

$$-\Lambda(k_{11}N_{11} + k_{22}N_{22}) + \Lambda\sum_{i,j} w_{,ij}N_{ij} + \Lambda q = 0 \tag{2.11}$$

Поэтому, вводя единичный вектор-строку $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$ порядка s запишем (2.11) в виде

$$\frac{Eh^3}{1-\nu^2}\nabla^2\nabla^2\mathbf{e}\left(\frac{1}{Eh}\,\mathrm{T}\,\mathbf{f}\,F + \mathrm{T}\Lambda\,\mathbf{a}\right) - \nabla^2\Lambda\mathbf{e}\mathbf{H} -$$
$$-\boldsymbol{\Lambda}(k_{11}N_{11} + k_{22}N_{22}) + \boldsymbol{\Lambda}\sum_{i,j} w_{,ij}N_{ij} + \boldsymbol{\Lambda}q = 0$$

но, согласно (2.9), вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = \left[\sum_{n=0}^{p}(h^2\nabla^2)^n\zeta_n\right]\chi + \mathbf{a}^\circ$$

Здесь ζ_n-вектор имеет следующую структуру: элементы, соответствующие l-му несущему слою, равны — $t_l\mathrm{w}_l$, а элементы, соответствующие заполнителям, совпадают с соответствующими элементами векторов η_n. Элементы вектора $\mathbf{a}^\circ$, соответствующие заполнителям, совпадают с элементами вектора $\mathbf{a}_l^\circ$, остальные элементы равны нулю. Кроме того, по (1.34),

$$\Lambda N_{ij} \approx \frac{\mathbf{I}^2 - \mathbf{P}^2}{1-\nu^2}\left(\delta_{ij}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)F - \boldsymbol{\Lambda}N\delta_{ij} \qquad (2.12)$$

но, согласно (1.30),

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}\sum_{k=1}^{s}\gamma_k\,\boldsymbol{\lambda}_k$$

Поэтому формулы (2.12) могут быть переписаны в виде

$$N_{ij} = \mathbf{K}\left(\delta_{ij}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)F - N_{ij}\delta_{ij} \qquad \left(\mathbf{K} = \frac{\mathbf{I}+\mathbf{P}}{1-\nu^2}\sum_{k=1}^{s}\gamma_k\,\boldsymbol{\lambda}_k\right)$$

Уравнение равновесия (2.13) сил в направлении нормали к исходной поверхности окончательно запишется так:

$$\frac{Eh^3}{1-\nu^2}\mathbf{e}\,(\mathrm{T}\,A\nabla^2\nabla^2\mathbf{a})\,\Lambda\,(k_{11}KF_{,22} + k_{22}KF_{,11}) +$$
$$+\Lambda\,(w_{,11}KF_{,22}) - 2\Lambda\,(w_{,12}KF_{,12}) + \Lambda\,(w_{,22}KF_{,11} +$$
$$+\Lambda q - \nabla^2\Lambda\mathbf{e}H + \Lambda\,(k_{11}+k_{22})\,N - \Lambda\,(\nabla^2 wN) = 0 \qquad (2.13)$$

При выводе формулы (2.10) предполагалось $\varphi_k = 0$. Легко видеть, что и без этого предположения уравнения (2.13) не будет содержать указанных функций. Как и в случае чистоупругого материала, влияние функций φ_k незначительно, оно определяет различие в постановке граничных условий вдоль края оболочки, и поэтому при отсутствии внешних крутящих моментов их можно не учитывать. Таким образом, приходим к двум разрешающим уравнениям равновесия (1.14) и (2.13), сформулированным относительно функций F и χ, и одному вспомогательному уравнению (2.8). При этом пренебрегалось в формулах (2.8) и (2.13) малыми членами, содержащими функцию F, и при вычислении тангенциальных усилий N_{ij} — малыми членами, содержащими функцию χ (учитывается, что эти члены отражают влияние некоторой части тангенциальных усилий, воспринимаемых заполнителями, на изгиб оболочки).

Уравнения (1.14), (2.13), (2.8) позволяют исследовать конечные прогибы многослойных тонких оболочек из линейного вязко-упругого материала с произвольным числом слоев и произвольным чередованием несущих слоев и заполнителей. При исследовании колебаний таких оболочек вместо q нужно ввести величину

$$q = q_0 + \left(\sum_{=1}^{s}\rho_k h_k\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

где ρ_k — удельная плотность материала k-го слоя.

§ 4. **Граничные условия.** Будем основываться на системе (1.14), (2.13) относительно силовой функции F и функции перемещений χ. Выпишем основные граничные условия.

1. Край $x_1 = x_1^\circ$ свободно оперт: $w = H_{11}{}^1 = \ldots = H_{11}{}^{p+1} = 0$, или

$$\chi = 0,\ \nabla^2\chi = 0, \qquad \nabla^2\nabla^2\chi = 0, \qquad \underbrace{\nabla^2\nabla^2 \ldots \nabla^2}_{p+1}\ \chi = 0$$

2. Край $x_1 = x_1^\circ$ защемлен: $w = w_{,1} = a^1 = \ldots = a^p = 0$, или

$$\left[\sum_{n=0}^{p} (h^2\nabla^2)^n w_n\right]\chi = 0, \quad \chi_{,1} = (\nabla^2\chi)_{,1} = (\nabla^2\nabla^2\chi)_{,1} \ldots = (\underbrace{\nabla^2\nabla^2 \ldots \nabla^2}_{p}\chi)_{,1} = 0$$

3. Край свободен от связей: $H_{11}^1, \ldots, H^{p+1}_{11} = 0,\ \sum\limits_{k=1}^{s} Q_1{}^k = 0$ или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\chi = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\underbrace{\nabla^2 \ldots \nabla^2}_{p})\,\chi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\nabla^2\chi = 0, \qquad \left[\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (2 - \nu_0)\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2}\right]\left[\sum_{n=0}^{s} \eta_{1n}(\nabla^2 h^2)^n\right]\chi = 0$$

коэффициенты ν_0 и η_{1n} должны быть вычислены для каждого конкретного типа оболочки на основании формул (2.2).

Граничные условия для силовой функции F не отличаются от соответствующих граничных условий однородных упругих оболочек. Так, например, если на крае $x_1 = x_1^\circ$ отсутствуют тангенциальные усилия N_{11} и деформации ε_{22}, граничные условия для F будут $F = 0$, $\nabla^2 F = 0$.

Аналогично формулируются и другие случаи граничных условий.

Поступила 18 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. München Oldenburg Verlag, 1907, Bd. 5, S. 132.
2. Marguerre K. Zur Theorie gekrümmten Platte grosser Förmänderung. Jahrbuch 1939 der deutschen Akademie der Luftfahrtfoischung I, 413—418. Proceedings of the fifth International congress of Applied Mechanics. Cambridge, Massachusetts, September 12—16, 1938. John Wiley and Sons, inc, New York, London: Chapman and Hall, Ltd. 93—101, 1939.
3. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. Изв. АН СССР, ОТН, 1963, № 1, стр. 26.
4. Григолюк Э. И., Чулков П. П. К общей теории трехслойных оболочек большого прогиба. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 5. стр. 1012.
5. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Общая теория упругих трехслойных оболочек большого прогиба. Сб. «Вопросы динамики и прочности», АН ЛатвССР, Рига, вып. 10, 1963, стр. 95.
6. Yildiz A. On the damping of a multilayer plate. J. Acoust. Soc. America, 1962, vol. 34, No. 3, p. 353.
7. Kerwin E. .M, jr. Damping of flexural waves by constrained viscoelastic layer. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 7, p. 952.
8. Bieniek M. P., Freudenthal A. M. Forced vibration of cylindircal sandwich shells. J. Aerospace Sci. 1962, vol. 29, No. 2, p. 180.
9. Никишин А. А., Рабинович А. Л. Некоторые задачи цилиндрического изгиба трехслойных пластинок с учетом высокоэластичной деформации обшивки из стеклопластиков. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, стр. 528.