

УДК 539.3 + 622.83

СЛЕД ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПО ИЛЬЮШИНУ В СЫПУЧИХ СРЕДАХ
ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПО ДВУХЗВЕННЫМ ЛОМАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Д. С. Журкина, С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: daria.zhurk@gmail.com, lvk64@mail.ru, olgarev@yandex.ru, revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

С использованием метода дискретных элементов проведен численный анализ скалярных и векторных свойств сыпучей среды при нагружении по двухзвенным ломаным траекториям. Выполнены расчеты по нагружению образцов сыпучей среды при циклическом знакопеременном сдвиге и сдвиге с изломом траектории деформирования. Исследован вопрос о величине следа запаздывания по Ильюшину. На основе анализа дилатансии даны оценки следа запаздывания скалярных свойств среды. Запаздывание векторных свойств оценено путем сравнения компонент тензоров напряжений и деформаций в процессе нагружения. Даны количественные оценки. Установлено, что след запаздывания скалярных и векторных свойств для сыпучих сред на один-два порядка выше, чем для металлов.

Сыпучая среда, пластическая деформация, сложное нагружение, излом траектории, след запаздывания по Ильюшину

DOI: 10.15372/FTPRPI20250103
EDN: KRVACB

Как известно, в геомеханике широко применяется модель линейно-упругого тела. В последние десятилетия в связи с переходом на большие глубины и ростом горного давления все большую актуальность приобретают математические модели, описывающие неупругое поведение породного массива при различных способах его нагружения [1–5]. Основное свойство неупругого поведения связано с тем, то материал “помнит” историю своего предварительного нагружения. В теории пластичности в качестве характеристики памяти материала используется понятие следа запаздывания по Ильюшину. В настоящей работе предполагается применить это понятие для изучения поведения геоматериалов на примере исследования сыпучих сред.

Наличие эффекта запаздывания имеет принципиальное значение для построения определяющих уравнений и решения прикладных задач. Известно, что при сложном нагружении за пределом упругости связь между компонентами девиаторов тензоров напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ и деформаций $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - [(\varepsilon/3)\delta_{ij}]$ (δ_{ij} — символ Кронекера), образующими соответствующие

Работа выполнена в рамках проекта НИР (номер госрегистрации 121052500138-4). Численные расчеты проведены с помощью программного комплекса Altair EDEM (академическая лицензия).

векторы \mathbf{s} и \mathbf{e} в пятимерном линейном пространстве, характеризуется скалярными и векторными свойствами [6, 7]. Согласно [7], физическому процессу деформирования ставится в соответствие два обобщенных образа: один — для задания скалярных, второй — для задания векторных свойств связи напряжений с деформациями. Скалярный образ процесса нагружения включает в себя траекторию деформирования с заданными в каждой точке значениями времени, длины дуги этой траектории и скорости ее изменения, а также скалярных характеристик процесса: гидростатического давления, температуры, модуля вектора напряжений и др. в каждой точке траектории. Векторный образ включает в себя единичный направляющий вектор для вектора напряжений в каждой точке траектории деформирования. В соответствии с данными определениями скалярные свойства сыпучей среды можно охарактеризовать изменением среднего давления, модуля вектора напряжений, пористости, а векторные — направлением вектора напряжений \mathbf{s} при движении вдоль траектории деформирования в пространстве деформаций.

При простом нагружении направления векторов \mathbf{s} и \mathbf{e} совпадают. При сложном нагружении в момент изменения траектории деформирования указанные векторы отклоняются друг от друга. Далее, если траектория деформирования не меняет направление, то через определенное время векторы \mathbf{s} и \mathbf{e} вновь становятся коллинеарными. Таким образом, происходит эффект запаздывания реакции среды на изменение условий ее деформирования.

Явление запаздывания векторных свойств впервые обнаружено при растяжении и кручении стальных трубчатых образцов по двухзвенным ломаным траекториям [8]. Установлено, что явление запаздывания скалярных и векторных свойств — общее свойство всех пластических сред [9–11]. Мгновенное изменение направления вектора \mathbf{e} приводит к тому, что последующее изменение как скалярных параметров, так и направления вектора \mathbf{s} наблюдается в течение определенного времени, т. е. на конечном участке траектории деформирования h (рис. 1). Зависимость скалярных и векторных свойств материала отмечается не на всей истории предварительного нагружения, а только на определенной ее части, которая непосредственно предшествует излому траектории нагружения. Глубина памяти об истории нагружения характеризуется величиной h , которая получила название “след запаздывания”. В целом это означает, что материал обладает памятью об истории своего нагружения.

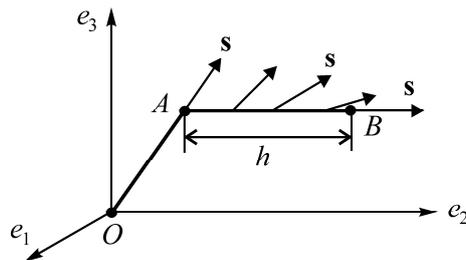


Рис. 1. Двухзвенная ломаная траектория деформирования OAB в пространстве главных значений девиатора тензора деформаций e_i , изменение направления вектора \mathbf{s} в процессе нагружения, h — след запаздывания по Ильюшину

Для металлов вопрос о следе запаздывания изучен достаточно полно [12–15], для геоматериалов — гораздо меньше. Здесь число самих материалов и траекторий нагружения, представляющих интерес, является чрезвычайно большим.

В настоящей работе в качестве исследуемого выбран один из наиболее простых представителей геоматериалов — идеально сыпучий материал (без сцепления). Сыпучий материал состоит из отдельных твердых частиц. Их упаковка имеет астрономическое число степеней свободы.

Данная упаковка вместе с силами и моментами сил, действующих на контактах между частицами, является носителем большого объема памяти обо всех процессах, которые привели к достигнутому состоянию среды.

Можно выделить два направления теоретических исследований. Первое — исследования в рамках континуальной механики сплошной среды, второе — в рамках моделей, которые в той или иной степени учитывают реальный дискретный характер среды. Наиболее универсальной при втором подходе представляется модель метода дискретных элементов (модель МДЭ). При соответствующем выборе параметров и траекторий нагружения МДЭ-модель согласуется с моделью линейно деформируемого тела, моделями (или их модификациями) Ильюшина, Николаевского, Зарецкого, моделью двойного упрочнения, моделью ИГД [16–22]. МДЭ-модель предсказывает переход среды в предельное состояние и локализацию деформаций [23]. Принципиальное отличие континуальных моделей от МДЭ-модели состоит в том, что в континуальных моделях используется весьма ограниченное число параметров. В целом подобные модели носят феноменологический характер. Поэтому для описания следа запаздывания можно вначале использовать МДЭ-модель, в которую никакая информация об эффекте запаздывания изначально не закладывается. В МДЭ-модели учитывается (хотя и упрощенно) реальный физический механизм деформирования среды. Главным является то обстоятельство, что учитывается астрономическое (хотя и заниженное в связи с ограниченностью вычислительных ресурсов) число степеней свободы реальной упаковки дискретных частиц. Далее результаты МДЭ-расчетов и соответствующие экспериментальные данные могут быть перенесены в континуальные модели.

Настоящая работа посвящена численному моделированию сложного нагружения сыпучих сред с использованием метода дискретных элементов, исследованию поведения дилатансии и напряженного состояния среды и оценке следа запаздывания ее скалярных и векторных свойств. Расчеты проводились с использованием программного комплекса Altair EDEM (академическая лицензия). При реализации оригинальных способов сложного нагружения разработаны собственные API приложения на языке C++ для встраивания в программный комплекс Altair EDEM [24].

БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ МДЭ

Рассмотрим базовую версию модели метода дискретных элементов. В МДЭ среда заменяется ансамблем дискретных частиц, которые движутся по законам механики Ньютона:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n_b} \mathbf{F}_{ij} + m_i \mathbf{g}, \quad J_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n_b} \mathbf{M}_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

где \mathbf{v}_i , $\boldsymbol{\omega}_i$ — соответственно векторы линейной и угловой скорости; m_i — масса; J_i — момент инерции i -й частицы; \mathbf{F}_{ij} , \mathbf{M}_{ij} — соответственно главный вектор и главный момент сил, действующие на i -ю частицу со стороны j -й частицы при их взаимодействии; n_b — количество соседних частиц, с которыми i -я частица взаимодействует (имеет контакт) в текущий момент времени; N — общее число частиц; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения.

В МДЭ частицы предполагаются недеформируемыми. Расчет сил, возникающих при взаимодействии частиц между собой и взаимодействии частиц с ограждающими стенками емкости, в которую помещен образец сыпучей среды, основан на величинах перекрытий (областей несовместности), возникающих при относительном движении частиц. При взаимодействии

используется вязкоупругая модель Кельвина–Фойгта с учетом нормальной и касательной составляющих. Нормальная компонента вектора силы рассчитывается с помощью решения задачи Герца о соударении двух упругих сфер (нелинейный закон) [25] либо линейного соотношения на основе закона Гука. При расчете касательной составляющей используется потенциал Миндлина–Дересевича [26]. Уравнения для расчета сил имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ij} &= F_{n,ij} \mathbf{n}_{ij} + F_{t,ij} \mathbf{t}_{ij}, \\ F_{n,ij} &= k_{n,ij} d_{n,ij} - \gamma_{n,ij} v_{n,ij}, \\ F_{t,ij} &= k_{t,ij} d_{t,ij} - \gamma_{t,ij} v_{t,ij},\end{aligned}\quad (1)$$

где \mathbf{n}_{ij} , \mathbf{t}_{ij} — нормальные и касательные единичные векторы в плоскости контакта i -й и j -й частиц; $v_{n,ij}$, $v_{t,ij}$ — нормальная и касательная проекции вектора относительной скорости в точке контакта; $d_{n,ij}$ — нормальное перекрытие; $d_{t,ij}$ — проскальзывание между контактирующими частицами.

Упругие $k_{n,ij}$, $k_{t,ij}$ и вязкие $\gamma_{n,ij}$, $\gamma_{t,ij}$ модули в соотношении (1) в случае использования потенциала Герца имеют вид:

$$\begin{aligned}k_{n,ij} &= \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^* d_{n,ij}}, \quad k_{t,ij} = 8G^* \sqrt{R^* d_{n,ij}}, \\ \gamma_{n,ij} &= -2\sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_{n,ij} m^*}, \quad \gamma_{t,ij} = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_{t,ij} m^*}, \\ S_{n,ij} &= 2E^* \sqrt{R^* d_{n,ij}}, \quad S_{t,ij} = 8G^* \sqrt{R^* d_{n,ij}}.\end{aligned}$$

При использовании линейного потенциала, основанного на законе Гука, указанные модули вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}k_{n,ij} &= \frac{16}{15} \sqrt{R^*} E^* \left(\frac{15m^* V_0^2}{16\sqrt{R^*} E^*} \right)^{1/5}, \quad k_{t,ij} = k_{n,ij}, \\ \gamma_{n,ij} &= 2\beta \sqrt{m^* k_{n,ij}}, \quad \gamma_{t,ij} = \gamma_{n,ij}.\end{aligned}$$

Здесь V_0 — характерная скорость процесса; $\beta = \ln(c_r) / \sqrt{\ln^2(c_r) + \pi^2}$.

Величина $0 \leq c_r \leq 1$ представляет собой коэффициент восстановления скорости (отношение нормальной составляющей вектора скорости разлета частиц после соударения к соответствующей скорости их подлета до соударения). Данный коэффициент описывает вязкость взаимодействия и механизм диссипации энергии при неупругом соударении частиц. Обобщенные величины R^* , m^* , E^* , G^* рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^*} &= \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}, \quad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}, \quad \frac{1}{E^*} = \frac{(1-\nu_i)^2}{E_i} + \frac{(1-\nu_j)^2}{E_j}, \\ \frac{1}{G^*} &= \frac{2(2-\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2(2-\nu_j)(1+\nu_j)}{E_j},\end{aligned}$$

R_i , m_i , E_i , ν_i — радиус, масса, модуль упругости и коэффициент Пуассона i -й частицы.

Касательная сила $F_{t,ij}$ вычисляется в соответствии с (1) только до определенного момента, пока $F_{t,ij} < \operatorname{tg}\phi F_{n,ij}$ (стадия неразвитого трения), в противном случае полагаем $F_{t,ij} = \operatorname{tg}\phi F_{n,ij}$ (стадия развитого трения), где ϕ — заданный угол сухого трения скольжения между частицами либо между частицами и ограждающими стенками емкости.

ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ УПАКОВКИ ЧАСТИЦ

Одна из проблем при решении задач методом дискретных элементов — генерация начальной упаковки частиц, помещенных в заданную емкость, т. е. формирование образца материала. Если при генерации используется датчик случайных чисел, то всегда существует вероятность, что следующая размещаемая частица будет иметь область несовместности (перекрывание) с ранее размещенными частицами. В таких алгоритмах как правило используется параметр M — число попыток размещения очередной частицы. Если в процессе реализации заданного числа попыток не удастся разместить частицу в емкости без перекрытия с ранее размещенными частицами, то формирование упаковки останавливается. Указанный подход позволяет сформировать только очень рыхлые упаковки. Расчеты показывают, что при числе попыток $M = 20$ удастся сгенерировать упаковку сферических частиц одинакового радиуса с относительной плотностью $\eta = V_h / V$ (V_h — суммарный объем всех частиц, V — объем емкости) не выше, чем $\eta \leq 0.4$. В отечественной литературе по механике сыпучих сред и грунтов вместо относительной плотности часто используется понятие пористости среды, определяемое как $n = 1 - \eta$, в зарубежной литературе — коэффициент пористости $e = (1 - \eta) / \eta$.

Известно, что теоретически максимальная плотность упаковки равновеликих шаров по Гауссу составляет $\eta = \pi / (3\sqrt{2}) \approx 0.7405$. В свою очередь насыпная плотность сухого кварцевого песка при гравитационной засыпке песка в емкость составляет около $\eta \approx 0.6$, а плотность уплотненного кварцевого песка может достигать $\eta \approx 0.65$. Исходя из этого, будем рассматривать задачу формирования начального образца сферических частиц одинакового радиуса с заданной относительной плотностью в диапазоне $0.6 \leq \eta_0 < 0.7405$ или пористостью $0.2595 \leq n_0 < 0.4$.

В работе применялся следующий алгоритм генерации упаковок частиц. В заданную емкость случайным образом помещаются частицы одинакового радиуса, заведомо меньшего, чем требуемый. Малый радиус обеспечивает случайное размещение необходимого числа частиц без взаимных перекрытий. Далее радиусы частиц равномерно увеличиваются и одновременно включается алгоритм метода дискретных элементов. При этом и частицы, и стенки емкости предполагаются гладкими. С увеличением радиусов частицы вступают во взаимодействие и переупаковываются. Рост размеров частиц останавливается после достижения радиусами фиксированного значения, которое однозначно определяется заданной начальной пористостью упаковки n_0 . На последнем этапе между частицами, а также между частицами и стенками емкости задаются необходимые параметры трения и сформированная упаковка выстаивается в течение определенного времени, достаточного для затухания колебаний частиц, т. е. до достижения стационарного равновесного состояния.

Перейдем к вопросу о сложном нагружении и следе запаздывания по Ильюшину.

СДВИГОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОБРАЗЦА СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ПО ДВУХЗВЕННЫМ ЛОМАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

В соответствии с описанным алгоритмом сформируем образец сыпучей среды кубической формы (рис. 2). Частицы имеют сферическую форму, свойства частиц: модуль упругости $E = 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, плотность $\rho = 2500$ кг/м³. Начальные параметры образца выбраны в следующем виде: число частиц $N = 100\,000$, пористость $n_0 = 0.31$ (относительная плотность $\eta_0 = 0.69$), коэффициент трения скольжения между частицами и между частицами и боковыми стенками камеры при последующем нагружении выберем $\operatorname{tg}\varphi = 0.57$, коэффициент восстановления скорости $c_r = 0.5$.

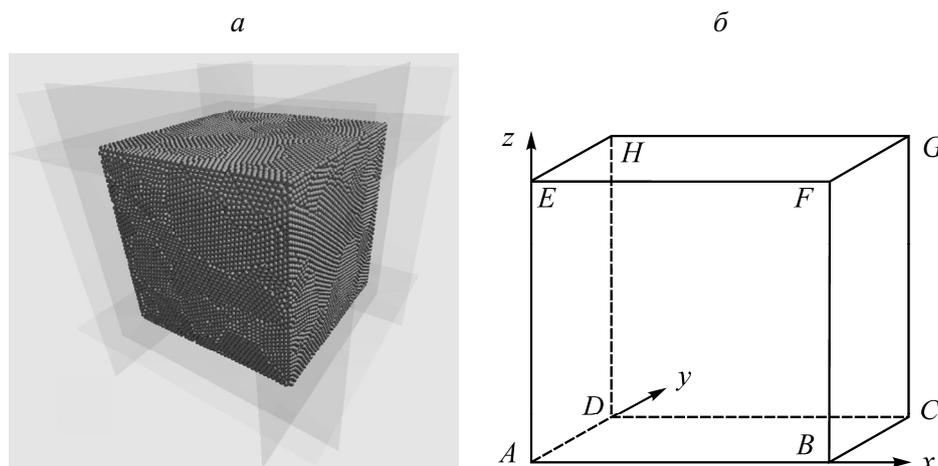


Рис. 2. Образец сыпучего материала: *a* — внешний вид; *б* — обозначение ограничивающих стенок камеры сдвига

Для металлов след запаздывания имеет порядок 1–2%. Для исследования следа запаздывания в сыпучих средах требуется реализация гораздо больших деформаций, причем близких к однородным.

Один из наиболее простых способов нагружения — простой сдвиг. В [27] представлен лабораторный стенд, позволяющий выполнить однородный сдвиг сыпучих материалов. Материал помещается в кубическую камеру, его нагружение осуществляется путем сдвижения стенок камеры по заданному правилу. При сдвигах малой амплитуды, в том числе при циклическом (знакопеременном) сдвиге, в среде реализуется близкое к однородному распределение напряжений. При сдвигах порядка 10% происходит потеря устойчивости, локализация деформаций и переход к неоднородному деформированию. Аналогичный результат получается и при численном моделировании сдвига методом дискретных элементов [23].

В [27] предложен также способ сдвигового нагружения сыпучей среды по двухзвенной ломаной траектории, когда в процессе нагружения направление сдвига меняется скачком на заданный конечный угол. Реализация указанного сложного нагружения осуществляется заданием на границе кинематических условий движения стенок камеры, которые обеспечивают (в случае устойчивого поведения среды) близкое к однородному распределение напряжений и деформаций внутри образца сыпучей среды. Во всех случаях сдвигового нагружения площадь сечения камеры горизонтальной плоскостью не меняется, что позволяет судить о дилатансии среды по одному параметру — изменению высоты засыпки образца в камере.

В настоящей работе рассмотрим численную МДЭ-реализацию сдвигового деформирования по описанным в [27] программам:

- циклический знакопеременный сдвиг — направление сдвига меняется на противоположное;
- сдвиг с изломом траектории — направление сдвига меняется скачком на заданный конечный угол. Близкое к однородному распределение напряжений внутри образца позволяет по значениям суммарных сил, действующих со стороны частиц на боковые стенки камеры сдвига, рассчитать все компоненты тензора напряжений в плоскости сдвига.

Циклический сдвиг. Численная реализация сдвига образца сыпучей среды осуществлялась следующим образом. Верхняя $EFGH$ и нижняя $ABCD$ стенки камеры выбирались гладкими (см. рис. 2б). Сдвиговое нагружение проводилось жестким смещением боковых стенок камеры в положительном $ABFE$ и отрицательном $DCGH$ направлениях вдоль оси Ox с одновременным жестким вращением боковых стенок $ADHE$, $BCGF$ вокруг прямых, параллельных оси Oz , и проходящих через центры масс этих стенок. Данное нагружение обеспечивает близкий к однородному сдвиг образца внутри. Закон движения материальных точек в плоскости сдвига Oxy имеет вид

$$x(t) = x_0 - \operatorname{tg}\chi(t)y_0, \quad y(t) = y_0, \quad (2)$$

где $\chi(t)$ — угол сдвига; t — время; x_0, y_0 — начальные координаты точки в момент $t = 0$.

При вращении боковых стенок камеры $ABFE$ и $DCGH$ поверхность их контакта с сыпучим материалом внутри емкости изменяется. Программная реализация метода дискретных элементов не предусматривает изменения размеров ограничивающих стенок камеры. По этой причине стенки камеры с самого начала выбирались заведомо большего размера, а их движение сводилось к жесткому вращению относительно их центров масс по закону (2). Описанный способ привносит в процесс деформирования определенную неоднородность, которая будет тем меньше, чем меньше сдвиг, т. е. угол $\chi(t)$.

Циклический сдвиг моделировался заданием знакопеременного угла сдвига: $-\chi_{\max} \leq \chi(t) \leq \chi_{\max}$ с амплитудой $\chi_{\max} = 5^\circ$. При такой амплитуде сдвига деформирование происходит устойчиво, без локализации деформаций и формирования поверхностей скольжения, а привнесенной при реализации сдвигового нагружения неоднородностью можно пренебречь. Одному циклу сдвига соответствует процесс деформирования, когда сдвиг происходит последовательно из положения камеры $\chi = 0$ в положение $\chi = -\chi_{\max}$, далее в положение $\chi = \chi_{\max}$ и, наконец, снова в $\chi = 0$.

Для моделирования дилатансионного изменения объема среды на гладких верхней и нижней гранях камеры задавалось условие постоянного поджатия $\sigma_{zz} = \sigma_0 = \text{const}$, выполнение которого обеспечивалось за счет соответствующего жесткого смещения этих граней вдоль оси Oz (реализовано в программном продукте Altair EDEM).

Рассмотрим вопрос о скалярном следе запаздывания. Одним из основных свойств сыпучей среды является дилатансия — свойство среды менять свой объем при сдвиге. Изменение объема означает перестройку упаковки, поэтому текущее значение пористости n — это скалярный функционал всей истории нагружения. Иными словами, n характеризует память среды о ее предшествующем деформировании.

На рис. 3 приведена дилатансионная кривая, полученная при циклическом знакопеременном сдвиге образца сыпучей среды. Она представляет собой зависимость пористости среды, отнесенной к начальной пористости, от числа циклов сдвига. Видно, что за один цикл сдвига

данная кривая проходит через два локальных максимума (в моменты положения камеры $\chi = \pm\chi_{\max}$) и два локальных минимума (в моменты положения камеры $\chi = 0$). С увеличением числа циклов при заданных параметрах упаковки материал в камере в целом разрыхляется, его пористость увеличивается. Заметим, что в зависимости от начальной пористости n_0 и поджатия образца σ_0 объем среды может как увеличиваться (разрыхление), так и уменьшаться (уплотнение). Из рис. 3 видно, что изменение пористости со временем замедляется и стремится к переходу в стационарный режим. В этом режиме пористость материала в камере зависит только от фазы сдвига внутри цикла и не меняется от цикла к циклу.

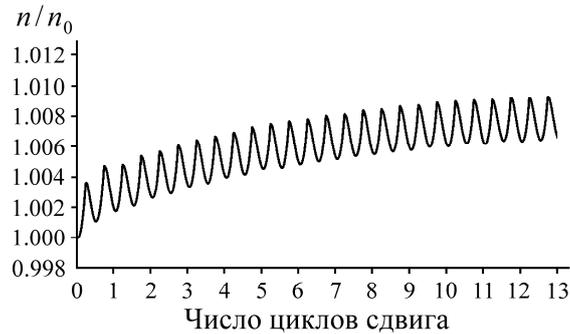


Рис. 3. Относительное изменение пористости образца n/n_0 (дилатансионная кривая) в зависимости от числа циклов сдвига

Начальная упаковка частиц, полученная в результате случайной генерации и роста размеров частиц, является стохастической. Она содержит множество дефектов (арок, вакансий, дислокаций и т. д.). Если образец продеформировать по траектории, замкнутой в пространстве деформаций, например при циклическом сдвиге, то получим новый образец. Его дилатансионные и упругопластические характеристики будут другими. Расчеты показывают, что если пройти по замкнутому пути достаточное число циклов, то деформирование переходит в стационарный режим, в котором упаковка становится обратимой. Деформации в цикле будут пластическими, но сама упаковка каждый раз возвращается в прежнее состояние. Отметим, что обратимая упаковка содержит гораздо меньше дефектов, чем исходная необратимая упаковка.

При достижении стационарного состояния память упаковки о своем начальном состоянии стирается. Согласно расчетам, упаковка выходит на стационарный (обратимый) режим при выбранных параметрах задачи примерно через 25 циклов сдвига. Если за один цикл суммарный сдвиг среды осуществляется на угол $4\chi_{\max} = 20^\circ$, т. е. деформация составляет $\sim 35\%$, то скалярный след запаздывания по Ильюшину за 25 циклов можно оценить $h \sim 875\%$.

На рис. 4 показано изменение нормальной σ_{yy} (а) и касательной σ_{xy} (б) компонент тензора напряжений после достижения упаковкой стационарного режима деформирования. Свойство обратимости упаковки здесь проявляется в замкнутости диаграмм напряжений — за один цикл сдвига упаковка возвращается в прежнее напряженное состояние. Мгновенная смена направления сдвига на противоположное (точки *b*, *c* на рис. 4б) не приводит к мгновенной смене знака касательного напряжения σ_{xy} . Видно, что происходит эффект запаздывания разгрузки среды: знак касательного напряжения меняется на противоположный только после сдвига в обратном направлении на $\sim 1.5\%$ при амплитуде циклического сдвига $\chi_{\max} = 5^\circ$.

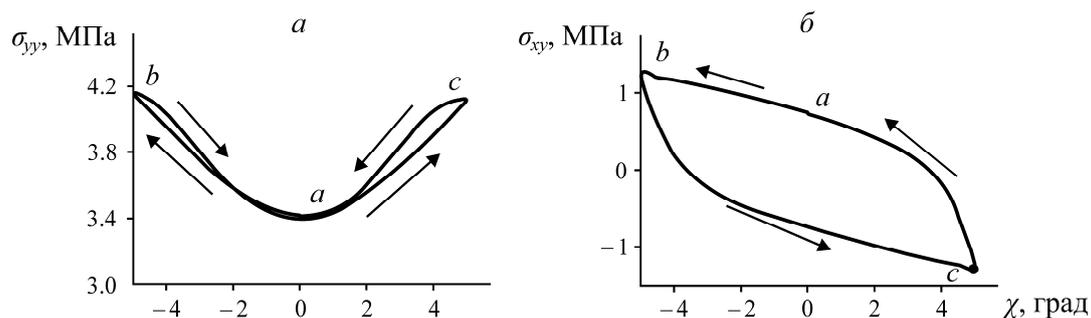


Рис. 4. Изменение напряжений в зависимости от угла сдвига. Один цикл соответствует траектории $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, стрелками показано направление сдвига

Сдвиг с изломом траектории деформирования. Реализация сдвига с изломами траектории выполнялась следующим образом. Сначала по описанному алгоритму в течение заданного времени осуществлялся циклический сдвиг образца. Далее, в момент положения камеры $\chi = 0$, мгновенно происходил поворот направления сдвига на конечный угол κ . Дальнейшее деформирование протекало также в циклическом режиме, но в направлении, повернутом относительно оси Ox (в плоскости Oxy) на конечный угол $\kappa = \text{const} \neq 0$. Через определенное число циклов в момент $\chi = 0$ мгновенно осуществлялся возврат к прежней траектории сдвига при $\kappa = 0$. Таким образом, в процессе циклического сдвига излом траектории выполнялся дважды: сначала на угол κ , затем при возврате на прежнюю траекторию — на $-\kappa$.

Закон движения ограждающих стенок камеры и внутренних материальных точек среды в плоскости Oxy при сдвиге с произвольным углом излома κ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \text{tg}\chi(t)(-\sin \kappa x_0 + \cos \kappa y_0) \cos \kappa, \\ y(t) &= y_0 + \text{tg}\chi(t)(-\sin \kappa x_0 + \cos \kappa y_0) \sin \kappa. \end{aligned} \tag{3}$$

До излома траектории и после возврата к прежней траектории, т. е. при $\kappa = 0$, закон (3) совпадает с (2). Расчеты проводились для углов излома $\kappa = \pi/8$ и $\pi/4$.

Примем, что в течение трех полных циклов выполняется циклический сдвиг. Затем происходит излом траектории и реализуется циклический сдвиг в отклоненном на угол κ направлении в течение следующих двенадцати циклов. Затем направление сдвига меняется скачком на угол $-\kappa$ (возвращается на исходную траекторию). Если через m обозначить число циклов сдвига, то в процессе нагружения направление сдвига меняется скачком дважды ($m = 3$ и $m = 15$). Расчетные диаграммы для описанного нагружения сравним с аналогичными, полученными при циклическом сдвиге без излома траектории.

На рис. 5 приведена дилатансионная кривая (сплошная линия — без излома траектории, точечная — с двумя изломами, $\kappa = \pi/4$). На первом этапе $m \leq 3$ обе линии совпадают. В момент первого излома траектории $m = 3$ материал резко разрыхляется по сравнению с аналогичным поведением без излома. С увеличением числа циклов процесс замедляется и характер изменения объема свидетельствует о приближении к стационарному состоянию. Второй излом траектории на угол $-\kappa$ в момент $m = 15$ приводит к резкому уплотнению среды с последующей стабилизацией. Видно, что в течение приблизительно пяти циклов после второго излома дилатансионная кривая практически сливается с аналогичной, построенной при нагружении без изломов. След запаздывания скалярных свойств для упаковки, обладающей свойствами, достигнутыми к моменту времени $m = 15$, может быть оценен длиной траектории в пять циклов сдвига, т. е. $h \sim 175\%$.

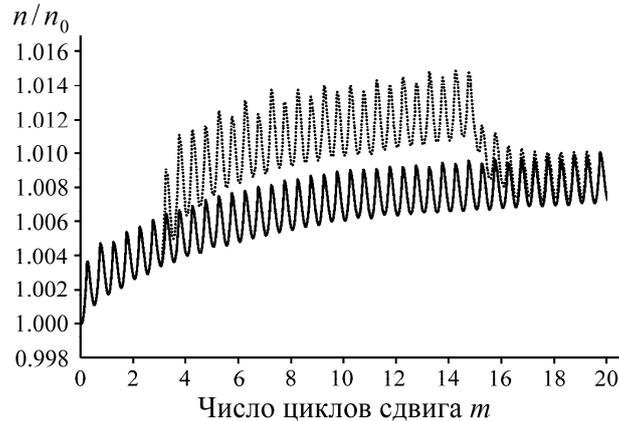


Рис. 5. Относительное изменение пористости образца n/n_0 (дилатансионная кривая) в зависимости от числа циклов сдвига. Сплошная линия — циклический сдвиг без излома, точечная — в момент $t=3$ излом траектории на угол $\kappa=\pi/4$, в момент $t=15$ обратный излом на угол $\kappa=-\pi/4$ (возврат на прежнюю траекторию)

На рис. 6, 7 приведены диаграммы изменения нормальной σ_{xx} и касательной σ_{xy} компонент тензора напряжений. В момент первого излома траектории $t=3$ наблюдается резкое расхождение кривых, полученных при деформировании после излома (точечная линия) и без излома (сплошная) (рис. 6а, 7а). В момент второго излома $t=15$ (рис. 6б, 7б) обе кривые сходятся и примерно за один цикл сдвига становятся практически неотличимыми друг от друга. Векторный след запаздывания оценивается в один цикл сдвига, т. е. $h \sim 35\%$.

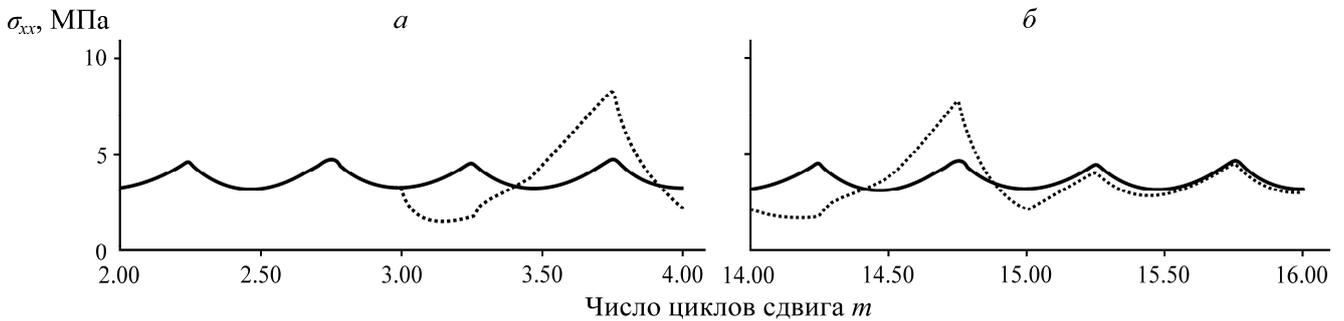


Рис. 6. Изменение напряжения нормальной компоненты σ_{xx} от числа циклов сдвига. Сплошная линия — сдвиг без излома, точечная: а — в момент $t=3$ излом траектории на $\kappa=\pi/4$; б — в момент $t=15$ обратный излом на $\kappa=-\pi/4$ (возврат на прежнюю траекторию)

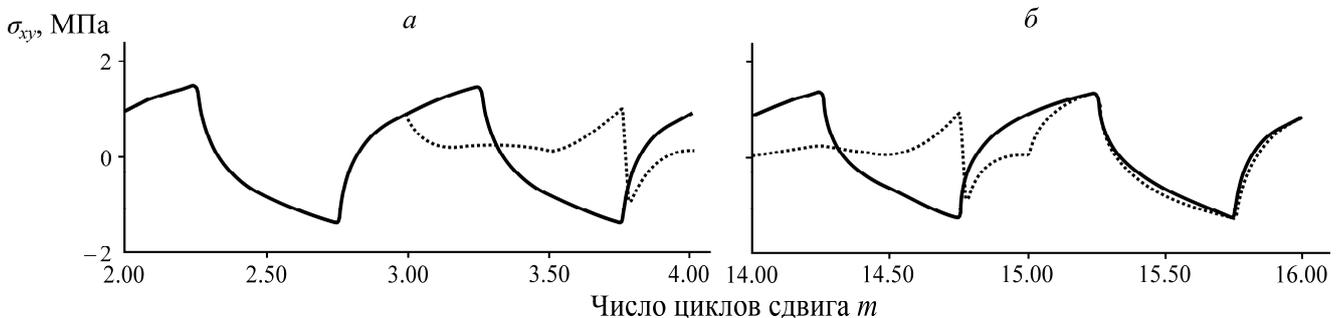


Рис. 7. Изменение напряжения касательной компоненты σ_{xy} от числа циклов сдвига. Сплошная линия — сдвиг без излома, точечная: а — в момент $t=3$ излом траектории на $\kappa=\pi/4$; б — в момент $t=15$ обратный излом на $\kappa=-\pi/4$ (возврат на прежнюю траекторию)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СЛЕДА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Пусть θ — угол между площадкой максимального касательного напряжения и осью Ox_1 , т. е. угол, отличающийся на $\pi/4$ от направления главного напряжения. Через β обозначим направление скорости наибольшего сдвига. Угол β будем относить к характеристике траектории нагружения, а угол θ — к характеристике отклика среды, t — параметр нагружения. Основной вопрос — описание следа запаздывания векторного и скалярных свойства h .

Рассмотрим двухзвенные траектории нагружения. Пусть на первом звене угол $\beta = \beta_0$ и сохраняется постоянным. Первое звено реализуется от момента $t = 0$ до $t = t_1$. Деформации пластические, поэтому за время $0 \leq t \leq t_1$ структура материала изменяется. Пластические деформации связаны со сдвигами. В качестве параметра, характеризующего изменение структуры, можно выбрать максимальный сдвиг Γ . На первом звене траектории сдвиг увеличивается от нуля до $\Gamma = \Gamma_1$. Интересен не сам сдвиг, а только его влияние на меру изменения свойств материала. Обозначим ее $M(\Gamma_1)$. Считаем, что функция $M(\Gamma_1)$ является возрастающей и имеет горизонтальную асимптоту: $\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} M(\Gamma) = M^*$. Последнее означает, что при достаточно большом сдвиге изменение структуры материала либо прекращается, либо происходит разрушение. В этом случае сдвиг Γ увеличивать уже невозможно.

Материал в исходном состоянии предполагается изотропным. Для первого звена (простое нагружение) угол θ должен равняться β^0 (рис. 8): $\theta \equiv \beta^0$. В точке t_1 реализуется излом траектории, т. е. угол $\beta(t)$ скачком меняется от β^0 до некоторого значения $\beta = \beta^*$. Отклик среды, угол θ увеличивается постепенно.

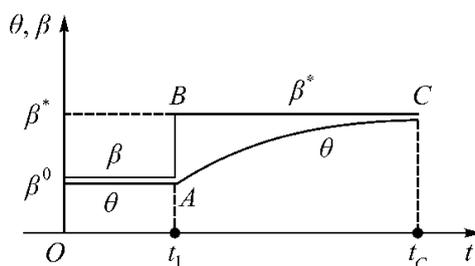


Рис. 8. Отклик среды на нагружение по двухзвенной траектории

Обозначим через $\Gamma_2(t - t_1)$ сдвиг, который реализуется на втором звене траектории при $t > t_1$: $\Gamma_2(0) = 0$. Сдвиг Γ_2 вызывает стирание памяти об истории нагружения на первом звене. Это приводит к изменению угла θ — отклика среды на излом траектории. В общем виде запишем:

$$\theta(t) = \beta^0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$\theta(t) = \beta^0 + f(\beta^* - \beta^0, \Gamma_1, \Gamma_2(t - t_1)) \quad \text{при } t > t_1.$$

Функция отклика $\theta(t)$ удовлетворяет ряду условий, которые можно использовать для ее аппроксимации. Ясно, что если процесс деформирования на втором звене ($\beta = \beta^* = \text{const}$) осуществляется достаточно долго, то память о прошлом, т. е. о первом звене, полностью стира-

ется. Тогда угол θ приближается к β^* и при $t = t^*$, $\Gamma_1 = \Gamma_2^*$ можно принять, что $\theta \approx \beta^*$. Разность $(t^* - t_1)$ — не что иное, как след запаздывания h по Ильюшину. Таким образом,

$$\lim_{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma^*, \infty} f(\beta^* - \beta^0, \Gamma_1, \Gamma_2) \approx \beta^* - \beta^0. \quad (4)$$

Если сдвиг на первом звене $\Gamma_1 \rightarrow 0$, то значение h также должно стремиться к нулю. Действительно, если $t_1 = 0$ точно, то $h = 0$, так как первого звена фактически нет, а на втором звене должно быть $\theta = \beta^*$ в силу изотропности среды. Если же $t_1 = \delta$ мало, но $\delta > 0$, то такое возмущение может быть сингулярным. Эксперименты и данные о физическом механизме пластических деформаций не указывают на возможность сингулярного возмущения. Поэтому можно принять, что $h \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow 0$ ($\Gamma_1 \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} f(\beta^* - \beta^0, 0, \Gamma_2) &\equiv \beta^* - \beta^0, \\ \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} f(\beta^* - \beta^0, \Gamma_1, \Gamma_2) &= \beta^* - \beta^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что сдвиги Γ_1, Γ_2 влияют на структуру с коэффициентами k_1 и k_2 , а также, что стирание памяти о первом звене проходит по закону $k_1\Gamma_1 / k_2\Gamma_2$, зависимость функции f от первого аргумента ($\beta^0 - \beta^*$, т. е. от излома траектории) линейна. Выберем наиболее простой вариант зависимости:

$$\theta(t) = \beta^0 + (\beta^* - \beta^0) \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 + k\Gamma_1} \right)^r, \quad (6)$$

где $k = k_1 / k_2$; r — свободные параметры; $t > t_1$.

Аппроксимация (6) удовлетворяет указанным условиям (4), (5). След определяется заданной точностью выполнения равенства $\theta \approx \beta^*$. Проведенные расчеты по анализу изменения напряженного состояния при изломе траектории сдвига (см. рис. 7) показали, что параметры аппроксимации (6) можно принять равными $r = 2$, $k \approx 0.025$.

ВЫВОДЫ

Согласно численному МДЭ-моделированию, сыпучие материалы обладают свойством запаздывания скалярных и векторных свойств, т. е. памятью об истории своего предварительного нагружения. Глубина памяти материала зависит от начальной упаковки и достигнутого уровня напряжений к моменту начала наблюдения. След запаздывания по Ильюшину для сыпучих сред на один-два порядка превышает аналогичные показатели для металлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шемякин Е. И. Об одном эффекте сложного нагружения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика, механика. — 1996. — № 5. — С. 32–38.
2. Ишлинский А. И., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2003. — 701 с.
3. Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. — Новосибирск: СО РАН, 1999. — 342 с.

4. **Кондауров В. И., Никитин Л. В.** Теоретические основы реологии геоматериалов. — М.: Наука, 1990. — 207 с.
5. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе испытаний неупругих материалов // *Механика твердого тела*. — 1990. — № 4. — С. 178–182.
6. **Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.** Запаздывание векторных и скалярных свойств материалов при сложном нагружении // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. — 2012. — № 4 (14). — С. 26–39.
7. **Муравлев А. В.** Обобщение теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина на случай конечных деформаций // *Вестн. Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела*. — 2011. — № 4 (4). — С. 1642–1644.
8. **Хоэнземер К., Прагер В.** К механике пластического поведения стали // *Теория пластичности*. — М.: ГИИЛ, 1948. — С. 257–282.
9. **Ильюшин А. А.** О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошной среды // *Прикл. математика и механика*. — 1954. — Т. 18. — № 6. — С. 641–666.
10. **Ильюшин А. А.** Вопросы общей теории пластичности // *Прикл. математика и механика*. — 1960. — Т. 24. — № 3. — С. 399–411.
11. **Ильюшин А. А.** *Механика сплошной среды*. — М.: МГУ, 1990. — 310 с.
12. **Ленский В. С.** Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // *Изв. АН СССР. ОТН*. — 1958. — № 11. — С. 15–24.
13. **Коровин И. М.** Экспериментальное определение зависимости напряжение–деформация при сложном нагружении с одной точкой излома // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1969. — № 3. — С. 152–158.
14. **Васин Р. А.** О “памяти” материала в теории упругопластических процессов // *Изв. ТулГУ. Естественные науки*. — 2013. — Вып. 2. — Ч. 2. — С. 59–70.
15. **Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И.** Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двухзвенным ломаным траекториям // *Проблемы прочности и пластичности*. — 2014. — Т. 76. — № 1. — С. 18–25.
16. **Гольдштейн Р. В., Кузнецов С. В.** Континуальные модели в динамике гранулированных сред. Обзор // *Вычисл. механика сплошных сред*. — 2015. — Т. 8. — № 1. — С. 35–59.
17. **Христианович С. А., Шемякин Е. И.** О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // *Механика твердого тела*. — 1969. — № 5. — С. 138–149.
18. **Кончакова Н. А.** О поведении упругопластического континуума при ортогональном догружении // *Вестн. ВГУ. Серия: Физика, математика*. — 2005. — № 2. — С. 160–163.
19. **Шашкин А. Г.** Вязко-упруго-пластическая модель поведения глинистого грунта // *Развитие городов и геотехническое строительство*. — 2011. — Вып. 2. — С. 1–9.
20. **Schanz T., Vermeer P. A., and Bonnier P. G.** The hardening-soil model: Formulation and verification. Beyond 2000 in computational geotechnics, 1999, Balkema, Rotterdam. — P. 281–296.
21. **Ревуженко А. Ф.** Трехмерная модель пластического деформирования сыпучей среды // *ФТПРПИ*. — 2022. — № 1. — С. 3–11.
22. **Журкина Д. С., Лавриков С. В.** К вопросу определения макросвойств образцов геоматериалов при простом сдвиге в зависимости от микропараметров метода дискретных элементов // *Динамические процессы в геосферах*. — 2023. — Т. 15. — № 1. — С. 1–10.

- 23. Журкина Д. С., Клишин С. В., Лавриков С. В., Леонов М. Г.** Моделирование локализации сдвигов и перехода геосреды к неустойчивым режимам деформирования на основе метода дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2022. — № 3. — С. 13–22.
- 24. Лавриков С. В., Журкина Д. С.** Сложное нагружение с резкими изломами траектории деформирования и расчет напряженного состояния сыпучих сред на основе метода дискретных элементов. Свид-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2023680438, дата рег. 29.09.2023.
- 25. Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989. — 509 с.
- 26. Mindlin R. D. and Deresiewicz H.** Elastic spheres in contact under various oblique forces, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 1953, No. 20. — P. 327–344.
- 27. Ревуженко А. Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: Изд-во ОФСЕТ, 2003. — 373 с.

Поступила в редакцию 13/ХІІ 2024

После доработки 20/І 2025

Принята к публикации 23/І 2025