

УДК 519.633.6; 536.21; 538.945

## Оценка максимального нагрева плёнки NbN токовым импульсом при низких температурах на основе уравнения теплопроводности

М.А. Васютин, Е.В. Данилова, Н.Д. Кузьмичев

*Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск*

E-mail: vasyutinm@mail.ru

Рассматривается процесс распространения тепла в плёнке NbN при прохождении через нее импульса тока на основе неоднородного двумерного уравнения теплопроводности. Численно решена начально-краевая задача для продольного сечения пленки и проведен анализ теплопереноса в системе «контакты–пленка–подложка–термостат». Визуализирована температурная эволюция сечения пленки от начала импульса до выравнивания температуры. Сделана оценка максимального нагрева пленки. Показано, что материал контактов (бериллиевая бронза BeCu) обеспечивает эффективный теплоотвод от сверхпроводящей пленки, находящейся в резистивном состоянии, при протекании через нее тока большой плотности. Предложенный метод моделирования и материал контактов могут быть использованы при исследовании других металлических или полупроводниковых пленок.

**Ключевые слова:** перенос тепла, неоднородное уравнение теплопроводности, краевая задача, бериллиевая бронза, пленка NbN.

### Введение

Тепловая стабильность транспортных измерений при исследовании сверхпроводящих пленок является необходимым условием корректного эксперимента. Особенно важно это при изучении сверхпроводников в резистивном состоянии, переходящих в нормальное состояние при перегреве. В сильноточной технике, где необходимо учитывать нагревание токонесущих элементов, например, в сверхпроводящих магнитах и накопителях энергии [1–3], часто применяются широкие и относительно толстые сверхпроводящие пленки. Комплексное изучение сильноточных характеристик сверхпроводникового образца неразрушающими методами можно обеспечить прижимными контактами. В этом случае материал контактов должен обладать высокими характеристиками упругих свойств и хорошей электро- и теплопроводностью. В настоящей работе используются контакты из бериллиевой бронзы (BeCu), которые обладают высокой теплопроводностью при низких температурах [4].

Сверхпроводящие пленки нитрида ниобия (NbN) имеют температуру перехода в сверхпроводящее состояние  $T_c = 14 - 17$  К и в настоящее время являются одними из наиболее исследуемых материалов. Они используются в логических устройствах [5], болометрах [6],

резонаторах [7], приемных элементах терагерцового излучения [8] и других измерительных и энергопреобразовательных приборах. Нитрид ниобия прост в изготовлении, химически и радиационно устойчив, механически прочен и имеет одни из самых высоких критических параметров среди низкотемпературных сверхпроводников. Поэтому анализ распространения тепла в пленках NbN является актуальной задачей фундаментальной и прикладной физики.

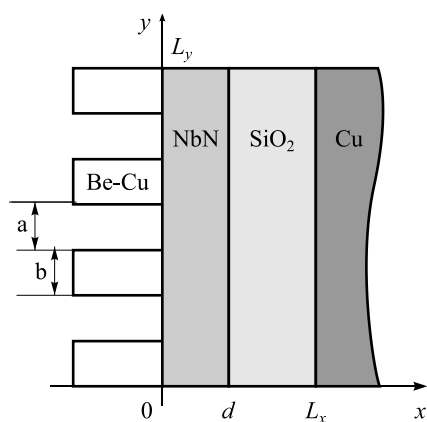
Моделирование процесса теплопереноса в системе «контакты–пленка–подложка–термостат» позволяет определить максимальный нагрев пленки при определенной длительности импульса тока. Кроме этого, анализ распространения тепла в продольном сечении сверхпроводящей пленки дает возможность видеть всю картину нагревания и охлаждения в зависимости от материала контактов и подложки.

В работе проводится математическое моделирование и численный расчет эволюции распределения температуры внутри пленки NbN на основе двумерного неоднородного уравнения теплопроводности с учетом расположения теплоотводящих контактов на поверхности пленки. Уравнение решается численно в интегрированной среде Microsoft Visual Studio. Ранее авторами была решена одномерная задача [9], в которой предполагалось, что контактная область занимает плоскость с координатой  $x = 0$ . В этом случае температура зависит только от координаты  $x$  и времени  $t$ . В действительности имеется межконтактная область, теплоотвод от которой является незначительным и осуществляется за счет теплообмена с газовой средой. Для практического применения важно определение температуры нагрева указанной области при пропускании через пленку импульса тока. От величины увеличения температуры зависит стабильность нахождения пленки в сверхпроводящем состоянии. Это обуславливает необходимость решения двумерной задачи.

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим систему «контакты–пленка–подложка–термостат» на примере пленки нитрида ниобия, напыленной на кварцевую ( $\text{SiO}_2$ ) подложку (рис. 1). В качестве термостата используем медную основу (Cu).

Исследуемый образец (пленка) NbN имеет длину  $L_y = 9$  мм, ширину  $w = 5$  мм, толщину  $d = 400$  нм. В качестве материала контактов используется бериллиевая бронза толщиной 0,13 мм. При экспериментальном исследовании, например, вольт-амперной характеристики (ВАХ) пленки, находящейся в сверхпроводящем состоянии, необходимо обеспечить хороший теплоотвод, чтобы ее нагрев не превышал нескольких десятых гра-



дуса. Эта задача решается путем использования прижимных контактов из бериллиевой бронзы. Высокая мощность теплопоглощения контактами из бериллиевой бронзы обусловлена увеличением теплопроводности меди более чем на порядок при температурах от 5 до 50 К [4, 10, 11]. Учитывая высокую теплопроводность контактов и еще более высокую теплопроводность медной основы, будем считать их температуру постоянной и равной температуре, поддерживаемой в эксперименте.

Рис. 1. Схема системы «контакты–пленка–подложка–термостат».

Неоднородное двумерное уравнение теплопроводности имеет вид [12]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1)$$

где  $a^2 = 4,3 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  — коэффициент температуропроводности пленки при 20 К,  $T$  — температура пленки,  $t$  — время,  $x$  — координата с началом на внешней от подложки плоскости пленки, направленная перпендикулярно в сторону подложки,  $y$  — координата, лежащая в плоскости пленки и направленная от одного контакта к другому (рис. 1),  $f(x, y, t) = P(x, y, t)/(c_{\text{NbN}} \cdot \rho_{\text{NbN}})$ ,  $P(x, y, t)$  — объемная плотность мощности источника тепла (пленки),  $c_{\text{NbN}} = 17 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$  — удельная теплоемкость пленки при  $T = 14 \text{ К}$  (сумма решеточной и электронной теплоемкостей),  $\rho_{\text{NbN}} = 8400 \text{ кг}/\text{м}^3$  — плотность пленки [10].

В рассматриваемом случае сила тока линейно возрастает за время  $t_0$  от 0 до  $I_{\text{max}}$ . Будем считать, что величина  $P(x, y, t)$ , определяемая законом Джоуля–Ленца, не зависит от координат (однородное тепловыделение):

$$P(x, y, t) = P(t) = \begin{cases} \rho j_0^2 t^2, & x \leq d, t \leq t_0, \\ 0, & x > d, t > t_0. \end{cases}$$

здесь  $\rho \approx 440 \text{ мОм} \cdot \text{см}$  — удельное сопротивление пленки в нормальном состоянии,  $j_0 = I_{\text{max}}/(dwt_0)$ ,  $t_0 = 0,25 \text{ мс}$ ,  $I_{\text{max}} = 1,12 \text{ А}$ . Значения данных параметров взяты из условий реального эксперимента по изучению вольт-амперных характеристик пленки нитрида ниобия, находящейся в резистивном состоянии [4, 9]. При исследовании вольт-амперных характеристик особый интерес представляет средняя межконтактная область (область между потенциальными контактами). В этой области в первом приближении тепловыделение будет однородным. Независимость от координат объемной плотности мощности источника тепла можно осуществить, если токовые контакты расположить на расстоянии  $L > L_y$  или на торцах пленки.

Начальное условие определяет начальную температуру системы «контакты–пленка–подложка–термостат»:  $T(x, y, 0) = T_0 = 14 \text{ К}$ . Левое граничное условие (левая граница пленки) можно определить, учитывая закон Ньютона для теплообмена между пленкой и контактами (третья краевая задача):

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{0,y,t} = H(y) \cdot [T(0, y, t) - 14].$$

В данном выражении коэффициент теплообмена  $H \text{ (м}^{-1}\text{)}$ , являющийся функцией координаты  $y$ , равен отношению теплоотдачи к теплопроводности материала и определяется формулой (см. рис. 1):

$$H(y) = \begin{cases} H_0, & 3a + 3b < y \leq 3a + 4b = L_y, \\ 0, & 2a + 3b < y \leq 3a + 3b, \\ H_0, & 2a + 2b < y \leq 2a + 3b, \\ 0, & a + 2b < y \leq 2a + 2b, \\ H_0, & a + b < y \leq a + 2b, \\ 0, & b < y \leq a + b, \\ H_0, & y \leq b, \end{cases}$$

здесь  $a$  — ширина межконтактной области,  $b$  — ширина контакта. В межконтактной области  $H = 0$ , в области контакта  $H = H_0 = 50 \text{ мкм}^{-1}$  [4]. Правое граничное условие

(правая граница подложки) имеет вид:  $T(L_x, y, t) = T_0 = 14 \text{ К}$  (первая краевая задача), здесь  $L_x$  — толщина подложки вместе с пленкой. Верхнее и нижнее граничные условия запишутся как  $\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{dT}{dy}(x, L_y, t) = 0$  (вторая краевая задача). Это соответствует отсутствию теплообмена.

В итоге начально-краевые условия для уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{cases} T(x, y, 0) = T_0, \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = H(y)[T(0, y, t) - T_0], \\ T(L_x, y, t) = T_0, \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, L_y, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

## 2. Методы и результаты решения поставленной задачи

Для представления дифференциального уравнения (1) и начально-краевых условий (2) конечно-разностными соотношениями была использована пространственно-временная сетка с координатами

$$x_i = (i-1) \cdot h_x, y_j = (j-1) \cdot h_y, t_n = n \cdot \tau,$$

где  $h_x, h_y$  — шаги сетки по координатам  $x$  и  $y$  соответственно,  $\tau$  — шаг по времени;  $i = 1, 2, \dots, N_x, j = 1, 2, \dots, N_y, n = 0, 1, 2, \dots, K$ . Здесь  $N_x = 91, N_y = 401$ . Значение  $K$  варьировалось в зависимости от величины шага  $\tau$  (50 мкс, 100 мкс) и конечного момента времени.

Так как слева присутствуют граничные условия третьего рода, а сверху и снизу — второго рода, то для замыкания конечно-разностной схемы необходима аппроксимация начально-краевых условий:

$$\begin{cases} T_{i,j}^0 = T_0, \\ \frac{T_{1,j}^n - T_{0,j}^n}{h_x} = H_j[T_{0,j}^n - T_0], \\ T_{N_x,j}^n = T_0, \\ \frac{T_{i,2}^{n+1} - T_{i,1}^{n+1}}{h_y} - \frac{h_y}{2a^2\tau}(T_{i,1}^{n+1} - T_{i,1}^n) = 0, \\ \frac{T_{i,N_y}^{n+1} - T_{i,N_y-1}^{n+1}}{h_y} + \frac{h_y}{2a^2\tau}(T_{i,N_y}^{n+1} - T_{i,N_y-1}^{n+1}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что погрешность аппроксимации левого граничного условия имеет первый порядок точности:  $O(h_x)$ , а верхнего и нижнего — второй порядок точности:  $O(h_y^2)$ .

Для решения была применена локальная одномерная схема А.А. Самарского [12, 13], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Погрешность при решении уравнения теплопроводности имеет первый порядок точности по времени и второй — по пространственной переменной:  $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ .

На первом этапе была проведена дискретизация в направлении оси  $x$  на промежуточном временном шаге и решена система линейных алгебраических уравнений. Вторым этапом заключался в проведении тех же действий, но в направлении оси  $y$  и на целом шаге по времени. Каждая система линейных алгебраических уравнений сводилась к стандартному трехдиагональному виду и решалась методом прогонки [14]:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\tau} = a^2 \cdot \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_x^2} + f_{i,j}^{n+1/2}, \quad (4)$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n+1}}{\tau} = a^2 \cdot \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{i,j}^{n+1}. \quad (5)$$

Определяя в формуле (4) значение  $T_{N_x,j}^{n+1/2}$  из правого граничного условия, находим поле температур  $T_{i,j}^{n+1/2}$  на промежуточном временном слое. То же самое выполняем для равенства (5). Написанная программа выдавала результат в виде матрицы  $91 \times 401$  элементов с шагом по времени  $\tau = 50$  и  $100$  мкс.

Результаты расчетов, отражающие эволюцию распределения температуры, представлены на рис. 2. Характерной особенностью здесь является неоднородность в виде «холодной тени контактов», которая практически исчезает спустя 3 мс. На рис. 2а показано распределение температуры внутри продольного сечения пленки в момент времени  $t = 100$  мкс после начала импульса, на рис. 2б — в конце импульса ( $t = 250$  мкс).

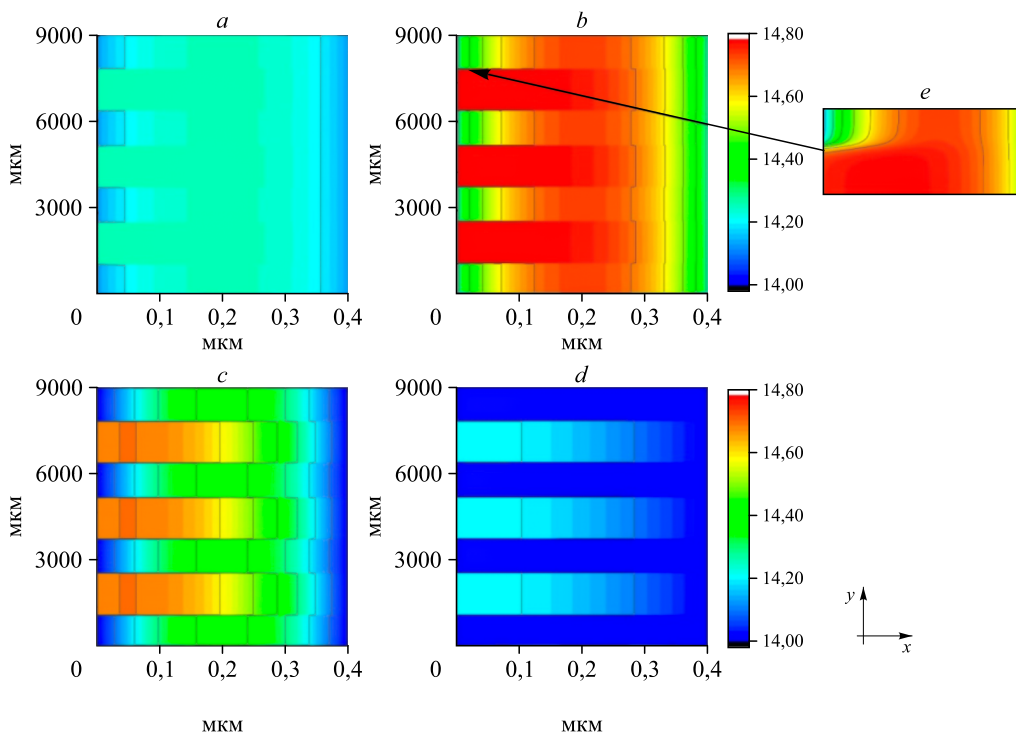


Рис. 2. Распределение температуры внутри пленки при  $t = 100$  (а), 250 (б), 400 (с) мкс, 3 (д) мс.

На вставке (е) показана отмеченная стрелкой область распределения температуры вблизи контакта, растянутая по оси  $y$  в 3000 раз.

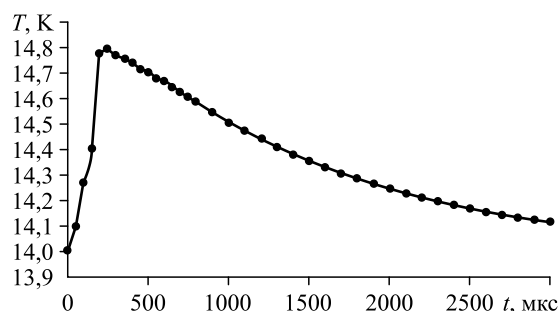


Рис. 3. Зависимость максимальной температуры пленки NbN от времени.

После прекращения подачи импульса наблюдалось резкое изменение температурного поля относительно конечного момента подачи для  $t = 400$  мкс (рис. 2с). После 3 мс можно увидеть почти полное охлаждение пленки (рис. 2д).

На рис. 3 представлена временная зависимость максимальной температуры внутри пленки нитрида ниобия. Максимальная температура нагрева пленки определялась по максимальному числовому значению элементов выводимой матрицы для каждого момента времени. Она была локализована в серединах трех межконтактных областей при  $x \approx 80$  нм (см. рис. 2). Своего максимума (14,8 К) температура достигала, как и следовало ожидать, в момент завершения подачи импульса на 250-й мкс (см. рис. 2б).

### 3. Обсуждение результатов

При моделировании процесса теплопереноса в исследуемой системе тепло, отводимое от пленки в теплоотводящие контакты, учитывалось значением параметра  $H$ , которое в данном случае определялось в том числе и толщиной пленки. В силу того, что масса и теплопроводность контактов много больше, чем пленки, то нагреванием контактов можно пренебречь и моделирование распределения тепла в контактах является излишним.

Граничное условие при  $x = d$  тоже можно не учитывать, т. к. коэффициенты температуропроводности пленки и подложки близки по значению ( $a^2 \sim 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с). Поэтому в уравнении теплопроводности остается только один параметр —  $a^2$ .

Правое граничное условие (подложка — медная основа), как и в случае с контактами, обусловлено тем, что медная основа, к которой крепилась подложка с пленкой, практически не нагревается в силу очень высокой теплопроводности меди при температуре эксперимента и массы, превышающей массу подложки на 3–4 порядка. При этом снижение контактного теплового сопротивления до минимума осуществлялось полированием и химической очисткой поверхностей кварца и меди, конструкционно обеспечивалось достаточно сильное прижатие подложки к медному термостату. Расчет контактного скачка температуры для теплового сопротивления Капицы  $R_K \sim 10^{-4}$  м<sup>2</sup>·К/Вт (общепринятого для контактов твердых тел [15, 16]) при плотности теплового потока  $q \approx 5 \cdot 10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup> (соответствующего данным усредненного перепада температур на противоположных сторонах подложки) приводит к значению в несколько сотых Кельвина. Это на порядок меньше полученного роста температуры, что подтверждает обоснованность правого граничного условия. Теоретическое и экспериментальное сопротивление Капицы для контактов твердых тел при низких температурах в моделях акустического и диффузионного

рассогласования имеет еще меньшее значение. По материалам обзорной статьи [17] контактное сопротивление между медью и кварцем  $R_K \sim 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$ .

Резкая граница раздела температур по вертикальной оси (ось  $y$ ) на рис. 2 обусловлена большим различием масштабов по осям  $x$  и  $y$  (на 4 порядка). На вставке к рис. 2 показана область распределения температур в продольном сечении пленки вблизи контакта, увеличенная в 3000 раз. Из рисунка видно, что в сопоставимых масштабах по осям  $x$  и  $y$  резкая граница исчезает и осуществляется плавный переход с небольшим значением градиента, как и должно быть.

При сравнении результатов предыдущих работ авторов, в которых решалась одномерная задача методами функций Грина [4] и сеток [9], с результатами настоящей работы видно, что неоднородность распределения температуры осуществляется не только в направлении оси  $x$ , но и в направлении оси  $y$ . Межконтактная область пленки нагревается до больших температур (0,8 К), чем подконтактная область (0,6 К). В одномерном случае максимальная температура нагрева составляла менее 0,3 К.

В работе использовался вариант максимального нагрева пленки, т.е. подразумевалось, что пленка находится в нормальном состоянии все время исследования. Для пленок, находящихся в сверхпроводящем состоянии на момент начала подачи импульса тока, нагревание будет обусловлено только сопротивлением контактов, которое обычно меньше сопротивления пленки в нормальном состоянии. Поэтому и нагрев сверхпроводящей пленки будет значительно меньше, чем полученный в рассмотренной модели.

### Заключение

Таким образом, численно решено неоднородное двумерное уравнение теплопроводности для системы «контакты–пленка–подложка–термостат» с граничными условиями, учитывающими теплоотвод от пленки в контакты, подложку и медную основу (термостат). Показано, что токи высокой плотности ( $10^4 - 10^5 \text{ А/см}^2$ ) ненамного нагревают исследуемые образцы пленок, находящихся в резистивном состоянии, если материалом контактов является бериллиевая бронза.

### Список литературы

1. Suzuki Y., Iguchi N., Adachi K., Ichiki A., Hioki T., Hsu C.-W., Sato R., Kumagai S., Sasaki M., Noh J.-H., Sakurahara Y., Okabe K., Takai O., H. Honma, H. Watanabe, H. Sakoda, H. Sasagawa, H. Doy, S. Zhou, H. Hori, S. Nishikawa, T. Nozaki, N. Sugimoto, T. Motohiro. Complete fabrication of a traversable  $3 \mu\text{m}$  thick NbN film superconducting coil with Cu plated layer of 42 m in length in a spiral three-storied trench engraved in a Si wafer of 76.2 mm in diameter formed by MEMS technology for a compact SMES with high energy storage volume density // J. Phys.: Conf. Series. 2017. Vol. 897. P. 012019-1–012019-7.
2. Sugimoto N., Iguchi N., Kusano Y., Fukano T., Hioki T., Ichiki A., Bessho T., Motohiro T. Compact SMES with a superconducting film in a spiral groove on a Si wafer formed by MEMS technology with possible high-energy storage volume density comparable to that of rechargeable batteries // Superconductor Sci. Technology. 2016. Vol. 30, No. 1. P. 015014-1–015014-11.
3. Sugimoto N., Motohiro T. Anisotropic I-V characteristics of spontaneously emerged periodic stripes of superconducting NbN thin films on Si trench sidewall by RF magnetron sputtering // Vacuum. 2013. Vol. 93. P. 13–21.
4. Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д., Шилкин Д.А. Моделирование процесса теплоотдачи сверхпроводящих пленок в резистивном состоянии // Журн. техн. физики. 2021. Т. 91, Вып. 3. С. 538–541.
5. Гурович Б.А., Приходько К.Е., Кутузов Л.В., Гончаров Б.В., Комаров Д.А., Малиева Е.М. Создание элементов из NbN для логических устройств классических криокomпьютеров // Физика твердого тела. 2021. Т. 63, Вып. 9. С. 1241–1244.
6. Ren Y., Zhang D., Zhou K., Miao W., Zhang W., Shi S., Seleznev V., Pentin I., Vakhtomin Y., Smirnov K.  $10.6 \mu\text{m}$  heterodyne receiver based on a superconducting hot-electron bolometer mixer and a quantum cascade laser // AIP Advances. 2019. Vol. 9, No. 7. P. 075307-1–075307-5.

7. Carter F.W., Khaire T., Chang C., Novosad V. Low-loss single-photon NbN microwave resonators on Si // *Applied Phys. Letters*. 2019. Vol. 115, No. 9. P. 092602-1–092602-5.
8. Чекушкин А.М., Филиппенко Л.В., Ломов А.А., Liu D., Shi S., Кошелец В.П. Оптимизация режимов изготовления пленок Nb, NbN, NbTiN и высококачественных туннельных переходов на их основе для приемных структур терагерцевого диапазона // *Журн. технич. физики*. 2021. Т. 91, Вып. 10. С. 1577–1582.
9. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Данилова Е.В., Лапшина Е.А. Математическое моделирование переноса тепла в системе пленка-подложка-термостат при нагреве электропроводящей пленки импульсным током высокой плотности // *Журнал СВМО*. 2021. Т. 23, № 1. С. 82–90.
10. **Таблицы физических величин**. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
11. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. М.: Мир, 1968. 464 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 736 с.
13. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учеб. пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172 с.
14. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2006. 406 с.
15. Викулов Д.Г., Викулов А.Г. Контактное термическое сопротивление твердых тел в условиях вакуума // VI Minsk Intern. Heat and Mass Transfer Forum, MIF 2008, Minsk, May 19-23, 2008. Режим доступа: <http://www.mif15.itmo.by/conferences/mif/Section%203/3-30pdg>.
16. Попов В.М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. М.: Изд-во Энергия, 1971. 216 с.
17. Swartz E.T., Pohl R.O. Thermal boundary resistance // *Reviews Modern Phys.* 1989. Vol. 61, No. 3. P. 605–668.

*Статья поступила в редакцию 3 января 2022 г.,  
после доработки — 19 февраля 2022 г.,  
принята к публикации 22 марта 2022 г.*