УДК 539.3

# ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ДИСЛОКАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ НЕСЖИМАЕМОМ МАТЕРИАЛЕ

А. В. Марк

Академия государственной противопожарной службы МЧС России,
129366 Москва, Россия
E-mail: A-V-Mark@yandex.ru

С использованием нелинейных уравнений теории упругости и геометрической теории дефектов исследована цилиндрическая дислокация в несжимаемом теле Муни — Ривлина. Цилиндрическая дислокация представляет собой два полых концентрических цилиндра, один из которых вставлен в другой и приклеен после соответствующей симметричной деформации. Проведено сравнение подходов классической теории упругости и геометрической теории дефектов, что позволило дать физическую интерпретацию тензорной плотности энергии импульса в уравнениях Эйнштейна для цилиндрической дислокации.

Ключевые слова: цилиндрическая дислокация, геометрическая теория дефектов, метрика, уравнения Эйнштейна.

DOI: 10.15372/PMTF20220418

**Введение.** Большинство твердых тел имеют кристаллическую структуру. Однако вследствие наличия дефектов этой структуры реальные тела обладают такими свойствами, как пластичность, ползучесть и т. д. Поэтому изучение дефектов является важной задачей.

В упругих телах дислокации могут возникать вследствие ориентированного наращивания кристаллов — эпитаксии. Сопряжение двух кристаллических решеток приводит к возникновению упругих напряжений, что обусловлено наличием в них небольшого несоответствия напряженно-деформированного состояния на подложке и поверхности эпитаксиального слоя. При достижении критического значения толщины эпитаксиального слоя компенсация несоответствия решеток подложки и растущего кристалла становится энергетически более выгодной не только в результате упругой деформации всей поверхности сопряжения двух решеток, но и за счет дислокаций, возникающих на этой поверхности.

В подходе, используемом в данной работе, кристалл рассматривается как непрерывная упругая среда. Если поле смещений является гладкой функцией, то в кристалле имеются только напряжения, соответствующие диффеоморфизмам евклидова пространства. Если поле перемещений имеет разрывы, то полагается, что упругая среда содержит дефекты, называемые дислокациями [1]. Для описания этих дефектов требуется нетривиальная геометрия — геометрия Римана — Картана с нетривиальной метрикой и кручением.

Идея связать кручение с дислокациями, возникшая в середине XX в. [2–5], активно развивается в настоящее время. В частности, в работах [6, 7] исследованы цилиндрическая и сферическая дислокации. Задача решалась с использованием линейной теории упругости, также принималось условие, что на поверхности склейки радиальные упругие деформации равны, т. е.

$$\frac{du_{in}}{dr}\Big|_{r=r_*} = \frac{du_{ex}}{dr}\Big|_{r=r_*}$$

($u_{in}$, $u_{ex}$ — радиальные компоненты перемещений для внутреннего и внешнего тел; $r_*$ — радиус поверхности склейки).

В данной работе задача о цилиндрической дислокации рассматривается аналогично тому, как это сделано в [6], но в нелинейной постановке, при этом считается, что на поверхности склейки радиальные напряжения равны:

$$T^{rr}_{in}\big|_{r=r_*} = T^{rr}_{ex}\big|_{r=r_*},$$

что оправдано с физической точки зрения. Показано также, что в уравнениях Эйнштейна для цилиндрической дислокации все слагаемые, содержащие произведения обобщенных функций, сокращаются, следовательно, уравнения Эйнштейна корректно определены.

**1. Цилиндрическая дислокация в теории упругости.** Рассматриваемое гиперупругое тело будем считать гладким топологически тривиальным трехмерным многообразием $\mathbb{M}$, которое покрывается одной картой [8]. Диффеоморфизм $\varphi_0$, отображающий точки тела на область в евклидовом пространстве, которую оно занимает в отсутствие внешних сил, будем называть начальной конфигурацией. Обозначим через $y^1 = R$, $y^2 = \Theta$, $y^3 = Z$ начальные координаты точек тела в цилиндрической системе координат. В образе начальной конфигурации имеет место плоская евклидова метрика $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1,2,3$, $\beta = 1,2,3$) с нетривиальными компонентами

$$\overset{\circ}{g}_{11} = \overset{\circ}{g}_{33} = 1, \qquad \overset{\circ}{g}_{22} = R^2.$$

После приложения внешних сил тело будет находиться в другой области евклидова пространства с координатами $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$. Диффеоморфизм $\varphi$ на эту область называется актуальной конфигурацией. Тогда диффеоморфизм областей евклидова пространства $h = \varphi\varphi_0^{-1}$ представляет собой упругую деформацию $y^\alpha \to x^\alpha$. Следовательно, метрика евклидова пространства $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ преобразуется с помощью дифференциала обратного отображения $h$:

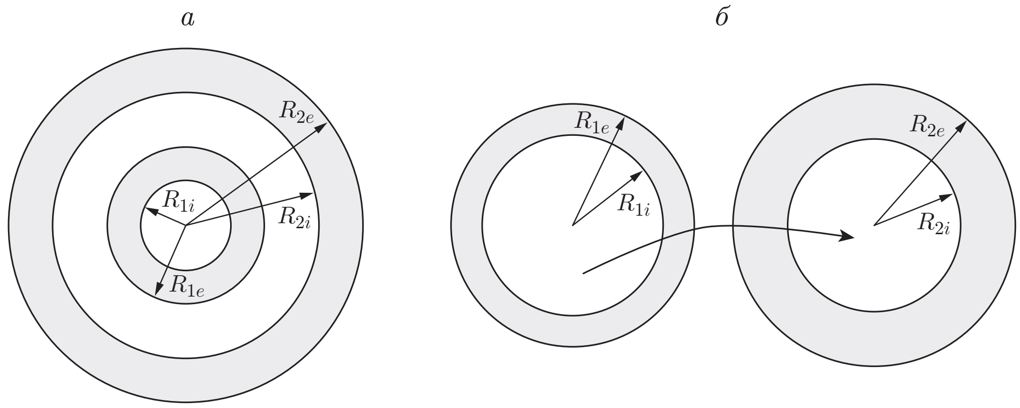
$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial y^\delta}{\partial x^\nu}\,\overset{\circ}{g}_{\rho\delta}. \tag{1}$$

Таким образом, на многообразии $\mathbb{M}$ имеется две метрики: евклидова метрика $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ и метрика $g_{\alpha\beta}(x)$, индуцированная преобразованием координат.

Поставим задачу для цилиндрической дислокации, показанной на рисунке. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ в образе начальной конфигурации несжимаемая гиперупругая среда из материала Муни — Ривлина [9] занимает область в виде полого цилиндра с радиусами $R_{1i}$ и $R_{2e}$. Вырезав материальный объем вещества в виде толстой трубки между двумя параллельными цилиндрами радиусом $R_{1e}$ и $R_{2i}$ ($R_{1e} < R_{2i}$), совместив границы цилиндров и склеив их, получаем составной цилиндр с внешним и внутренним радиусами $r_{1i}$ и $r_{2e}$. В состоянии равновесия поверхность склейки также представляет собой цилиндр с неизвестным радиусом $r_*$.

На рисунке показана отрицательная цилиндрическая дислокация, поскольку часть вещества удалена ($R_{1e} < R_{2i}$). Можно рассмотреть также положительную дислокацию, добавив часть вещества (см. рисунок). В этом случае $R_{1e} > R_{2i}$.

В данной работе приводится математическое описание упругого тела с имеющейся в нем дислокацией. Полагая, что размеры цилиндров существенно больше межатомных




Отрицательная (*а*) и положительная (*б*) цилиндрические дислокации

расстояний, будем использовать уравнения классической теории упругости. Как принято в дифференциальной геометрии, вычисления будем проводить в координатном (неортонормированном) базисе. Для математического описания среды используем следующие уравнения нелинейной теории упругости [9]:

— закон состояния для несжимаемой среды Муни — Ривлина, связывающий тензор напряжений Коши $\sigma^{\alpha\beta}$ с мерой деформации $g_{\gamma\delta}$ (индуцированной метрикой) и обратной к ней:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\mathring{g}^{\alpha\beta} + 2J_1 g^{\alpha\beta} + 2J_{-1} g_{\gamma\delta}\mathring{g}^{\gamma\alpha}\mathring{g}^{\delta\beta} \tag{2}$$

($p$ — функция гидростатического давления; $J_1$, $J_{-1}$ — материальные константы);

— условие несжимаемости

$$\det(g_{\alpha\delta}\mathring{g}^{\delta\beta}) = 1; \tag{3}$$

— уравнения равновесия

$$\mathring{\nabla}_\alpha\, \sigma^{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

в которых ковариантные производные берутся с помощью символов Кристоффеля, вычисленных по метрике $\mathring{g}_{\alpha\beta}$.

В классической нелинейной теории упругости $g^{\alpha\beta}$ есть мера деформации Фингера, или левый тензор Коши — Грина. Уравнения нелинейной теории упругости записаны в неортонормированном базисе цилиндрической системы координат, поэтому, например, компоненты тензора напряжений или метрики могут иметь разные размерности.

В рассматриваемом случае вследствие симметрии задачи $\theta = \Theta$, $z = Z$, а также $r = r(R)$.

Граничные условия для цилиндрической дислокации имеют вид

$$\sigma_1^{\alpha\beta} n_{\alpha 1i} = \sigma_2^{\alpha\beta} n_{\alpha 2e} = 0, \qquad r(R_{1e}) = r(R_{2i}) = r_*, \qquad \sigma_1^{\alpha\beta} n_{\alpha 1*} = -\sigma_2^{\alpha\beta} n_{\alpha 2*}, \tag{5}$$

где $n_{\alpha 1i}$, $n_{\alpha 2e}$ — компоненты внешних нормалей к поверхностям $r = r_{1i}$, $r = r_{2e}$; $n_{\alpha 1*} = -n_{\alpha 2*}$ — компоненты внешних нормалей к склеенным поверхностям; $\sigma_1^{\alpha\beta}$, $\sigma_2^{\alpha\beta}$ — компоненты напряжений для внутреннего и внешнего цилиндров; индексы 1, 2 соответствуют внутреннему и внешнему цилиндрам. Первое граничное условие (5) означает равенство нулю поверхностных сил на границе собранного цилиндра, остальные два — равенство перемещений и напряжений на границе склейки.

Решение для каждого цилиндра определяется формулой (см. [9, § 9, п. 3])

$$r = \sqrt{R^2 + a_{1,2}}, \qquad \Theta = \theta, \qquad Z = z, \tag{6}$$

где $a_{1,2}$ — неизвестные постоянные. Тогда тензоры $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, $\sigma^{\alpha\beta}$ в базисе, соответствующем положению точки в образе актуальной конфигурации, имеют отличные от нуля компоненты [10]:

$$\overset{\circ}{g}{}^{rr} = \overset{\circ}{g}{}^{zz} = 1, \qquad \overset{\circ}{g}{}^{\theta\theta} = 1/r^2;$$

$$g^{rr} = \frac{r^2 - a_{1,2}}{r^2}, \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 - a_{1,2}}, \qquad g^{zz} = 1; \tag{7}$$

$$\sigma^{rr} = -p + J_1\,\frac{r^2 - a_{1,2}}{r^2} + J_{-1}\,\frac{r^2}{r^2 - a_{1,2}}; \tag{8}$$

$$\sigma^{\theta\theta} = -\frac{p}{r^2} + J_1\,\frac{1}{r^2 - a_{1,2}} + J_{-1}\,\frac{r^2 - a_{1,2}}{r^4}; \tag{9}$$

$$\sigma^{zz} = -p + J_1 + J_{-1}. \tag{10}$$

Гидростатическую компоненту напряжений $p$ определим из уравнений равновесия (4), которые в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии сводятся к уравнению

$$\frac{\sigma^{rr}}{r} - r\sigma^{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} = 0, \tag{11}$$

принимающему стандартный вид для физических компонент тензора напряжений $\hat{\sigma}^{rr} = \sigma^{rr}$, $\hat{\sigma}^{\theta\theta} = r^2\sigma^{\theta\theta}$, $\hat{\sigma}^{rr} = \sigma^{rr}$:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^{rr}}{\partial r} + \frac{\hat{\sigma}^{rr} - \hat{\sigma}^{\theta\theta}}{r} = 0.$$

Остальные два уравнения равновесия тождественно удовлетворяются.

С учетом (8), (9) решение уравнения (11) можно записать в квадратурах:

$$\sigma^{rr}_{1,2} = \int \Big( r\sigma^{\theta\theta}_{1,2} - \frac{\sigma^{rr}_{1,2}}{r} \Big)\, dr = \int (J_1 - J_{-1}) \Big( \frac{r}{r^2 - a_{1,2}} - \frac{r^2 - a_{1,2}}{r^3} \Big)\, dr.$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$\sigma^{rr}_{1,2} = \frac{\mu}{2} \Big( \ln \frac{r^2 - a_{1,2}}{r^2} - \frac{a_{1,2}}{r^2} \Big) + p_{01,2}, \tag{12}$$

где $p_{01,2}$ — постоянные интегрирования. Для определения остальных компонент напряжения необходимо знать функцию $p$, которую находим с использованием (8), (12), а затем подставляем в (9), (10):

$$\sigma^{zz}_{1,2} = \sigma^{rr}_{1,2} + \mu a_{1,2}\,\frac{r^2 - (1+\beta)\,a_{1,2}/2}{r^2(r^2 - a_{1,2})}; \tag{13}$$

$$\sigma^{\theta\theta}_{1,2} = \frac{\sigma^{rr}_{1,2}}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \Big( \frac{r^2}{r^2 - a_{1,2}} - \frac{r^2 - a_{1,2}}{r^2} \Big); \tag{14}$$

$$\mu = J_1 - J_{-1}, \qquad \beta = \frac{J_1 + J_{-1}}{J_1 - J_{-1}}.$$

Запишем выражения для компонент напряжений в ортонормированном базисе:

$$\hat{\sigma}^{rr}_{1,2} = \sigma^{rr}_{1,2}, \qquad \hat{\sigma}^{\theta\theta}_{1,2} = \sigma^{rr}_{1,2} + \mu\Big(\frac{r^2}{r^2 - a_{1,2}} - \frac{r^2 - a_{1,2}}{r^2}\Big), \qquad \hat{\sigma}^{zz}_{1,2} = \sigma^{zz}_{1,2}.$$

Неизвестные постоянные $a_{1,2}$, $p_{01,2}$ находим из граничных условий (5):

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{R_{i1}^2}{R_{i1}^2 + a_1} - \frac{a_1}{R_{i1}^2 + a_1}\Big) + p_{01} = 0; \qquad (15)$$

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{R_{e1}^2}{R_{e1}^2 + a_1} - \frac{a_1}{R_{e1}^2 + a_1}\Big) + p_{01} = \frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{R_{i2}^2}{R_{i2}^2 + a_2} - \frac{a_2}{R_{i2}^2 + a_2}\Big) + p_{02}; \qquad (16)$$

$$R_{e1}^2 + a_1 = R_{i2}^2 + a_2; \qquad (17)$$

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{R_{e2}^2}{R_{e2}^2 + a_2} - \frac{a_2}{R_{e2}^2 + a_2}\Big) + p_{02} = 0. \qquad (18)$$

Исследуем разрешимость системы уравнений (15)–(18). Выражая $p_{01,2}$ из (15), (18) и подставляя в (16) с учетом (17), сведем эту систему к одному уравнению относительно $a_1$

$$f_1(a_1) = f_2(a_1),$$

где

$$f_1(a_1) = \ln\frac{R_{1e}^2(R_{1i}^2 + a_1)}{R_{1i}^2(R_{1e}^2 + a_1)} + \frac{a_1(R_{1e}^2 - R_{1i}^2)}{(R_{1e}^2 + a_1)(R_{1i}^2 + a_1)},$$

$$f_2(a_1) = -\ln\frac{R_{2e}^2(R_{2i}^2 + a_1 - \Delta)}{R_{2i}^2(R_{2e}^2 + a_1 - \Delta)} - \frac{(a_1 - \Delta)(R_{2e}^2 - R_{2i}^2)}{(R_{2e}^2 + a_1 - \Delta)(R_{2i}^2 + a_1 - \Delta)},$$

$$\Delta = R_{2i}^2 - R_{1e}^2.$$

Чтобы не допустить появления мнимых значений координаты $r$ в законе преобразования координат (6), достаточно потребовать $a_1 > -R_{1i}^2$, $a_2 = a_1 - \Delta > -R_{2i}^2$, что означает $a_1 > \max(-R_{1i}^2, -R_{2i}^2 + \Delta)$.

Заметим, что функция

$$f_1'(a_1) = \frac{R_{1e}^2 - R_{1i}^2}{(R_{1e}^2 + a_1)(R_{1i}^2 + a_1)}\,(a_1(R_{1e}^2 + R_{1i}^2) + 2R_{1i}^2 R_{1e}^2)$$

положительна при

$$a_1 > -2\,\frac{R_{1i}^2 R_{1e}^2}{R_{1e}^2 + R_{1i}^2},$$

причем

$$-2\,\frac{R_{1i}^2 R_{1e}^2}{R_{1e}^2 + R_{1i}^2} < -R_{1i}^2$$

при $R_{1e} > R_{1i}$, и, следовательно, $f_1'(a_1) > 0$, если $a_1 > -R_{1i}^2$. Кроме того,

$$\lim_{a_1 \to -R_{1i}^2 + 0} f_1(a_1) = -\infty, \qquad \lim_{a_1 \to +\infty} f_1(a_1) = 2\ln(R_{1e}/R_{1i}) > 0.$$

Поэтому функция $f_1(a_1)$ монотонно возрастает на интервале от $-\infty$ до $2\ln(R_{1e}/R_{1i})$ при $a_1 > -R_{1i}^2$.

Аналогично можно показать, что $f_2(a_1)$ монотонно убывает на интервале от $+\infty$ до $-2\ln(R_{2e}/R_{2i})$ при $a_1 > -R_{2i}^2 + \Delta$.

Следовательно, обе функции имеют единственную точку пересечения. Поэтому решение системы (15)–(18) существует и единственно при $a_1 > \max(-R_{1i}^2, -R_{2i}^2+\Delta)$, $R_{1e} > R_{1i}$, $R_{2e} > R_{2i}$.

Таким образом, в рамках теории упругости получено решение задачи о цилиндрической дислокации: координаты точек в образе актуальной конфигурации определяются формулами (6), компоненты индуцированной метрики — формулами (7), напряжения — формулами (12)–(14), постоянные $a_{1,2}$, $p_{01,2}$ определяются из уравнений (15)–(18).

**2. Геометрические характеристики индуцированной метрики.** В результате вычислений, выполненных с использованием теории упругости, получены следующие компоненты индуцированной метрики:

$$g_{rr} = u(r), \qquad g_{\theta\theta} = v(r), \qquad g_{zz} = 1. \tag{19}$$

Здесь

$$u(r) = \frac{r^2}{r^2 - a_1}\,\mathrm{H}(r_* - r) + \frac{r^2}{r^2 - a_2}\,\mathrm{H}(r - r_*),$$
$$v(r) = (r^2 - a_1)\,\mathrm{H}(r_* - r) + (r^2 - a_2)\,\mathrm{H}(r - r_*),$$

$\mathrm{H}(s)$ — функция Хевисайда. Выражения для этих компонент следуют из формул (7). Данная метрика получена путем склейки метрик внутреннего и внешнего цилиндров. Заметим, что для обоих цилиндров отсутствует единое непрерывное преобразование вида (6), приводящее оба цилиндра в ненапряженные состояния, поскольку точки на поверхности склейки имеют два прообраза. Для каждого в отдельности цилиндра это преобразование имеет место. Следовательно, данная метрика неевклидова. Вычислим ее характеристики. Тензор Римана [8]

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \tilde{\Gamma}^\varepsilon_{\alpha\gamma}\,\tilde{\Gamma}_{\beta\delta\varepsilon} - \tilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\tilde{\Gamma}_{\alpha\delta\varepsilon}$$

имеет отличную от нуля компоненту

$$\tilde{R}_{r\theta r\theta} = -\frac{a_1 - a_2}{2r_*}\,(\delta(r - r_*) + r_*\delta'(r - r_*))$$

($\delta(s)$, $\delta'(s)$ — $\delta$-функция и ее производная; $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$, $\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля первого и второго рода, построенные по метрике $g_{\alpha\beta}$; знак “$\sim$” означает, что величины вычислены только с использованием метрики $g_{\alpha\beta}$). Таким образом, метрика имеет $\delta$-образную особенность на поверхности склейки (вне поверхности склейки метрика евклидова).

Тензор Римана является локальной характеристикой многообразия, т. е. обращение его в нуль в некоторой области многообразия (не обязательно на всем многообразии) гарантирует, что метрика в этой области евклидова [11].

Тензор Риччи $\tilde{R}_{\alpha\gamma} = \tilde{R}^\beta_{\alpha\beta\gamma}$ имеет две отличные от нуля компоненты [8]:

$$\tilde{R}_{rr} = u(r)\,\frac{a_1 - a_2}{2r_*^3}\,(\delta(r - r_*) + r_*\delta'(r - r_*)),$$

$$\tilde{R}_{\theta\theta} = v(r)\,\frac{a_1 - a_2}{2r_*^3}\,(\delta(r - r_*) + r_*\delta'(r - r_*)).$$

Скалярная кривизна $\tilde{R} = \tilde{R}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ равна [8]

$$\tilde{R} = \frac{a_1 - a_2}{r_*^3}\,(\delta(r - r_*) + r_*\delta'(r - r_*)).$$

Таким образом, найдена метрика (19) в рамках теории упругости и вычислены ее геометрические характеристики: тензор кривизны, тензор Риччи и скалярная кривизна, которые имеют особенности на поверхности склейки. В геометрической теории дефектов, которая рассматривается ниже, подход иной: метрика ищется путем решения уравнений Эйнштейна, а диффеоморфизм (1) определяется по этой метрике в тех областях среды, где дефекты отсутствуют. Покажем, что использование обоих подходов в рассматриваемой задаче дает одинаковые результаты. Поэтому запишем уравнения Эйнштейна [12]

$$-\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}=\sqrt{g}\,\Big(\tilde R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,\tilde R g_{\mu\nu}\Big); \qquad (20)$$

$$\sqrt{g}=\sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}=r,$$

которые для метрики (19), полученной в рамках теории упругости, имеют вид

$$T_{zz}=(a_1-a_2)\,\frac{\delta'(r-r_*)}{r_*}$$

($T_{zz}$ — единственная отличная от нуля компонента тензорной плотности энергии импульса).

Компоненты тензора Риччи содержат произведения $\delta$-функции и функции Хевисайда и, следовательно, математически не определены. Как и в [6, 11], сокращение всех неопределенных слагаемых в компонентах тензорной плотности энергии импульса является исключением, поэтому она определена корректно.

**3. Цилиндрическая дислокация в геометрической теории дефектов.** В п. **2** с использованием нелинейной теории упругости описана цилиндрическая дислокация, найдены индуцированная метрика и ее геометрические характеристики. Однако необходимо выяснить, имеют ли уравнения геометрической теории дефектов (уравнения Эйнштейна с заданным источником — тензорной плотностью энергии импульса и калибровочные условия) какие-либо другие решения для цилиндрической дислокации при наличии того же источника. Под источником понимается правая часть уравнений Эйнштейна, которая определяется вырезанной или вставленной частью материала и способом склейки. Будем использовать подход [6, 13].

Основные положения теории дефектов заключаются в следующем. Наличие дефектов в упругом теле означает, что в случае гладкой деформации тело не переходит в ненапряженное состояние (для несжимаемого тела необходимо отсутствие поверхностных и потенциальных массовых сил). Согласно уравнению состояния индуцированная метрика является неевклидовой. При решении задачи с помощью подхода [14] наличие дефектов задается геометрически: метрика определяется из уравнений Эйнштейна [6, 13] при заданном источнике — тензорной плотности энергии импульса. В данной задаче источник имеет физический смысл: $\delta$-функция определяет положение дислокации, а коэффициент перед ней — ее "силу" (размер полости).

Выясним физический смысл источника в общем случае, вид которого определен в п. **2**. Будем считать, что упругое тело, занимающее область в виде полого цилиндра с радиусами $r_i$ и $r_e$, представляет собой гладкое многообразие с метрикой $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$, индуцированной вложением этого тела в $\mathbb{R}^3$, а также метрикой $g_{\alpha\beta}$, вызванной наличием дефектов. Поскольку непрерывным преобразованием координат невозможно обратить в нуль напряжения, эта метрика является неевклидовой. Вследствие отсутствия дисклинаций при отличном от нуля тензоре кручения полный тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (но не $\tilde R_{\alpha\beta\gamma\delta}$) равен нулю. Тензор неметричности также полагаем равным нулю.

Неевклидову метрику, описывающую дислокации, можно подставить в уравнения Эйнштейна (20), предварительно вычислив символы Кристоффеля, тензор Риччи и скалярную кривизну, и получить тензорную плотность энергии импульса, поэтому будем использовать эти уравнения для описания дислокаций. Решим обратную задачу: определим метрику по известному тензору энергии импульса.

Так как решения уравнений Эйнштейна найдены с точностью до диффеоморфизма, для определения системы координат используем упругую калибровку [14]

$$-\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nabla}_\alpha p + J_1 \overset{\circ}{\nabla}_\alpha g^{\alpha\beta} + J_{-1}\overset{\circ}{g}{}^{\gamma\alpha}\overset{\circ}{g}{}^{\delta\beta}\overset{\circ}{\nabla}_\alpha g_{\gamma\delta} = 0, \qquad \det(g_{\alpha\delta}\overset{\circ}{g}{}^{\delta\beta}) = 1, \tag{21}$$

которая получается путем подстановки закона состояния среды (2) в уравнения равновесия (4) и включает условие несжимаемости (3).

Калибровочные условия представляют собой закон состояния сплошной среды, записанный для компонент метрики с учетом уравнений равновесия элемента объема среды, а также условия несжимаемости. Как правило, уравнения теории упругости записываются для вектора смещения, а в геометрической теории дефектов — для компонент метрики. Это необходимо учитывать, так как компоненты метрики существуют также в случае непрерывного распределения дефектов, когда векторное поле смещений не определено. Если в некоторой области упругой среды дислокации отсутствуют, то упругая калибровка сводится к уравнениям теории упругости в данной области, что обеспечивает соответствие теорий.

Упругая калибровка существенно отличается от калибровок, обычно рассматриваемых в калибровочных моделях и теории гравитации, тем, что она имеет физический смысл. Упругая калибровка содержит постоянные, характеризующие упругие свойства твердых тел, и позволяет согласовать геометрическую теорию дефектов и теорию упругости, так как уравнения теории упругости содержатся в геометрической теории дефектов в виде калибровочных условий. Это естественно, поскольку теория упругости однозначно определяет диффеоморфизм, т. е. систему координат, и, следовательно, может рассматриваться в качестве калибровочного условия. Впервые упругая калибровка рассматривалась в работе [13].

В случае цилиндрической дислокации метрика имеет два вектора Киллинга $\partial_z$ и $\partial_\theta$ (в дифференциальной геометрии вектор есть производная по направлению [11]) в цилиндрической системе координат, которые соответствуют инвариантности относительно трансляций вдоль оси $z$ и вращениям в плоскости $(x, y)$. Для решения уравнений Эйнштейна выберем метрику в диагональном виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u(r) & 0 & 0 \\ 0 & v(r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $u(r)$, $v(r)$ — неизвестные положительные функции радиуса. Несмотря на то что (22) не общий вид метрики, совместимой с симметрией задачи, его будет достаточно для проведения дальнейших исследований.

Символы Кристоффеля для метрики (22) имеют четыре нетривиальные компоненты:

$$\tilde{\Gamma}^r_{rr} = \frac{u'(r)}{2u(r)}, \qquad \tilde{\Gamma}^r_{r\theta} = \tilde{\Gamma}^r_{\theta r} = \frac{v'(r)}{2v(r)}, \qquad \tilde{\Gamma}^r_{\theta\theta} = -\frac{v'(r)}{2u(r)}$$

(штрих обозначает производную по радиусу; знак “$\sim$” означает, что величина вычислена с использованием метрики).

Тензор кривизны имеет одну отличную от нуля компоненту

$$\tilde{R}_{r\theta r\theta} = u(r)v(r)h(r), \qquad h(r) = -\frac{1}{4}\,\frac{3v''(r)v(r)u(r) - (v'(r)v(r)u(r))'}{(u(r)v(r))^2}.$$

Выражения для нетривиальных компонент тензора Риччи и скалярной кривизны имеют вид

$$\tilde{R}_{rr} = -u(r)h(r), \qquad \tilde{R}_{\theta\theta} = -v(r)h(r), \qquad \tilde{R} = -2h(r).$$

В соответствии с [11] предположим, что источник имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$T_{zz} = L\delta'(r - r_*)$$

($L$, $r_*$ — постоянные, характеризующие силу и положение цилиндрической дислокации). Этот вид источника выбран на основе результатов, полученных в рамках теории упругости.

Нетрудно показать, что компоненты $rr$, $\theta\theta$, а также недиагональные компоненты уравнений Эйнштейна (20) для метрики (22) тождественно удовлетворяются. Определение компоненты $zz$ сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{r}{2}\,\frac{3v''(r)v(r)u(r) - (v'(r)v(r)u(r))'}{(u(r)v(r))^2} = L\delta'(r - r_*). \tag{23}$$

Далее используем упругую калибровку (21). Подставляя метрический тензор (22) в (21), получаем

$$-p'(r) + J_1\Big(\frac{u'(r)}{u^2(r)} + \frac{1}{ru(r)} + \frac{r}{v(r)}\Big) + J_{-1}\Big(u'(r) - \frac{v(r)}{r^3} - \frac{u(r)}{r}\Big) = 0; \tag{24}$$

$$u(r)v(r) = r^2. \tag{25}$$

С учетом (25) уравнение Эйнштейна (23) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $v(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\,(rv''(r) - v'(r)) = L\delta'(r - r_*).$$

Следует отметить, что полученное уравнение Эйлера является линейным и его решение можно рассматривать в слабом смысле [15]:

$$v(r) = cr^2 - a - Lr_*\mathrm{H}(r - r_*).$$

Это решение разделим на решения для внутреннего цилиндра $v_1(r)$ и внешнего $v_2(r)$:

$$v_1(r) = cr^2 - a_1, \qquad v_2(r) = cr^2 - a_2, \qquad a_1 = a, \qquad a_2 = a + Lr_*.$$

Тогда с учетом формулы (25)

$$u_1(r) = \frac{r^2}{cr^2 - a_1}, \qquad u_2(r) = \frac{r^2}{cr^2 - a_2}.$$

Будем считать, что для внешнего или внутреннего цилиндра (но не для обоих) существует диффеоморфизм, такой что метрика $g_{\mu\nu}$ принимает стандартный вид евклидовой метрики в цилиндрической системе координат. Тогда из закона преобразования метрики (1), где $x = \{r, \theta, z\}$, $y = \{R, \Theta, Z\}$, с учетом вращательной и трансляционной симметрии следует

$$g_{11} = \Big(\frac{dR(r)}{dr}\Big)^2, \qquad g_{22} = R^2(r), \qquad g_{33} = 1.$$

Последнее условие выполняется, если $c = 1$. Из уравнения (24) определим функции гидростатического давления $p_1(r)$ и $p_2(r)$ для внутренней и внешней областей:

$$p_{1,2}(r) = \frac{J_1 - J_{-1}}{2}\,\ln\frac{r^2}{r^2 - a_{1,2}} - (J_1 + J_{-1})\,\frac{a_{1,2}}{2r^2} + \frac{a_{1,2}J_1}{r^2 - a_{1,2}} + p_{01,2} - (J_1 + J_{-1}).$$

Компоненты тензора напряжений имеют вид (12)–(14). Постоянные интегрирования $p_{01,2}$ и $a_{1,2}$ определим из условий равенства нулю нормальных напряжений на внутренней $r = r_i$ и внешней $r = r_e$ поверхностях, а также из условия равенства напряжений на поверхности склейки:

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{r_i^2 - a_1}{r_i^2} - \frac{a_1}{r^2}\Big) + p_{01} = 0,$$

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{r_*^2 - a_1}{r_i^2} - \frac{a_1}{r_*^2}\Big) + p_{01} = \frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{r_*^2 - a_2}{r_*^2} - \frac{a_2}{r_*^2}\Big) + p_{02},$$

$$\frac{\mu}{2}\Big(\ln\frac{r_e^2 - a_2}{r_e^2} - \frac{a_2}{r^2}\Big) + p_{02} = 0.$$

В результате получаем совпадающую с (19) метрику

$$g_{rr} = u(r), \qquad g_{\theta\theta} = v(r), \qquad g_{zz} = 1,$$

где

$$u(r) = \frac{r^2}{r^2 - a_1}\,\mathrm{H}(r_* - r) + \frac{r^2}{r^2 - a_2}\,\mathrm{H}(r - r_*),$$

$$v(r) = (r^2 - a_1)\,\mathrm{H}(r_* - r) + (r^2 - a_2)\,\mathrm{H}(r - r_*).$$

Таким образом, результаты исследования цилиндрической дислокации, рассмотренной с помощью нелинейной теории упругости, совпадают с результатами, полученными с использованием геометрической теории дефектов.

Для описания одной или конечного числа дислокаций целесообразно использовать уравнения классической теории упругости. В случае континуального распределения дислокаций методы классической теории упругости неприменимы. Для описания континуального распределения дислокаций можно использовать уравнения Эйнштейна с соответствующей тензорной плотностью энергии импульса.

**Заключение.** В работе в рамках нелинейной теории упругости и геометрической теории дефектов [11, 14] рассмотрена цилиндрическая дислокация в нелинейно-упругом несжимаемом материале Муни — Ривлина.

Сначала задача решается в рамках нелинейной теории упругости. Определяются компоненты тензора напряжений, индуцированной метрики, а также диффеоморфизм из начального состояния в актуальное. Вследствие наличия дефекта компоненты индуцированной метрики собранного тела имеют скачок на поверхности склейки.

Затем вычисляются геометрические характеристики метрики: тензоры Римана и Риччи, а также скалярная кривизна. Вследствие скачка на поверхности склейки компоненты тензора Риччи содержат произведение $\delta$-функции и функции Хевисайда и, следовательно, математически не определены. Однако сокращение всех неопределенных слагаемых в компонентах тензорной плотности энергии импульса является исключением, поэтому она определена корректно и для описания дислокации можно использовать уравнения Эйнштейна.

Далее задача о цилиндрической дислокации решается в рамках геометрической теории дефектов. Для этого решаются уравнения Эйнштейна при заданной плотности энергии импульса с использованием в качестве калибровочных условий уравнений нелинейной теории упругости. Определен физический смысл тензорной плотности энергии импульса для данной задачи.

Автор выражает благодарность М. О. Катанаеву за обсуждение работы и помощь в процессе ее подготовки.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Хирт Дж.** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. М.: Атомиздат, 1972.
2. **Kondo K.** On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding // Proc. of the 2nd Japan nat. congress for applied mechanics, Tokio (Japan), 1952. S. l., 1952. P. 41–47.
3. **Bilby B. A., Bollough R., Smith E.** Continuous distributions of dislocations: A new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 231, N 1185. P. 263–273.
4. **Кадич А.** Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций / А. Кадич, Д. Эделен. М.: Мир, 1987.
5. **Киселев С. П.** Внутренние напряжения в твердом теле с дислокациями // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 131–136.
6. **Berredo-Peixoto G. de, Katanaev M. O.** Tube dislocations in gravity // J. Math. Phys. 2009. V. 50. 042501.
7. **Andrade A. F., Berredo-Peixoto G. de.** Geodesics in a space with a spherically symmetric dislocation // Gravitat. Cosmology. 2013. V. 19, N 1. P. 29–34.
8. **Дубровин Б. А.** Современная геометрия. Методы и приложения. 4-е изд. / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Едиториал УРСС, 1998.
9. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
10. **Лычев С. А., Марк А. В.** Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра // Изв. Сарат. ун-та. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 209–227.
11. **Катанаев М. О.** Геометрические методы в математической физике. М.: Науч.-образоват. центр при Мат. ин-те РАН, 2016.
12. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. 7-е изд. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
13. **Катанаев М. О.** Клиновая дислокация в геометрической теории дефектов // Теорет. и мат. физика. 2003. Т. 135, № 2. С. 338–352.
14. **Катанаев М. О.** Геометрическая теория дефектов // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175. С. 705–733.
15. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.


*Поступила в редакцию 18/VII 2019 г.,*
*после доработки — 29/VIII 2021 г.*
*Принята к публикации 27/IX 2021 г.*