

ПОСТРОЕНИЕ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА, СОСТЫКОВАННЫХ ЧЕРЕЗ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ, ВБЛИЗИ ОСИ ИЛИ ЦЕНТРА СИММЕТРИИ

А. Л. Казаков

Уральская государственная академия путей сообщения, 620034 Екатеринбург

Строятся аналитические решения квазилинейной системы уравнений с частными производными в случае, когда начальные данные для разных функций заданы на разных поверхностях и получившаяся задача имеет особенности вида u/x и w/x . Указаны условия существования и единственности решения поставленной задачи в виде формальных степенных рядов, а также достаточные условия их сходимости. Приведено одно обобщение рассмотренной задачи. Результаты исследования использованы при решении задачи о фокусировке волны сжатия, вызванной плавным движением поршня в покоящийся газ: по распределению газодинамических величин при $t = 0$ однозначно строится решение при $t < 0$, включающее восстановление траектории поршня, и решение при $t > 0$, включающее однозначное построение фронта отраженной ударной волны. Решение этой задачи представляет собой обобщение на случай двух независимых переменных авторемодельных решений Седова.

Введение. В классе авторемодельных течений, зависящих от одной независимой переменной $\lambda = r/t$, известны решения, описывающие фокусировку волны сжатия, вызванную плавным движением по специальному закону поршня в однородный покоящийся газ [1–3]. После фокусировки слабого разрыва от центра или оси симметрии расходится с конечной постоянной скоростью отраженная ударная волна (УВ), за которой сжатый газ покоится. С помощью характеристической задачи Коши [4] в некоторой окрестности точки ($t = t_0$, $r = r_0$) для $r_0 > 0$ локально решена неавтомодельная задача о поршне, плавно вдвигающемся в газ из точки $r = r_0$ [5]. В классе авторемодельных течений, зависящих от одной переменной $\xi = t/r^k$ ($1 < k < 2$), были построены [6, 7] течения с отраженными от точки $r = 0$ ударными волнами, скорость которых переменна и в момент $t = 0$ равна бесконечности. Доказаны [8, 9] существование и единственность кусочно-аналитических решений в задаче об отражении пространственной УВ от криволинейной стенки и в задаче о взаимодействии криволинейных фронтов УВ. В отличие от результатов работы [8], в [10] для цилиндрически и сферически симметричных течений построено решение задачи об отражении УВ от оси или центра симметрии, при этом УВ движется с конечной скоростью, но остается нерешенным вопрос о состыковке течений за и перед УВ.

При исследовании течений газа с отраженными ударными волнами необходимо решать обобщенные задачи Коши [11–13], в том числе и для систем с особенностью [14].

1. Обобщенная задача Коши. Рассмотрим обобщенную задачу Коши вида

$$w_x = \left[r(x, y, u, v, w) \frac{u}{x} + s(x, y, u, v, w) \frac{w}{x} + t(x, y, u, v, w) \right] \Big|_{y=0}, \quad (1.1)$$

$$u_x = a(x, y, u, v, w)u_y + b(x, y, u, v, w)v_x + \frac{u}{x} f(x, y, u, v, w) + e(x, y, u, v, w)w_x + p(x, y, u, v, w),$$

$$v_y = c(x, y, u, v, w)u_y + d(x, y, u, v, w)v_x + \frac{u}{x} g(x, y, u, v, w) + h(x, y, u, v, w)w_x + q(x, y, u, v, w),$$

$$w(x)|_{x=0} = 0, \quad u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad v(x, y)|_{y=0} = 0.$$

Здесь u, v, w — неизвестные функции; x, y — независимые переменные. Далее обобщенную задачу Коши будем для краткости называть задачей А.

Теорема 1.1. Пусть в задаче (1.1) функции $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s, t$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0, w = 0)$. Введем константы

$$\begin{aligned} A_0 &= a(O), \quad B_0 = b(O), \quad C_0 = c(O), \quad D_0 = d(O), \\ f_0 &= f(O), \quad g_0 = g(O), \quad E_0 = e(O), \quad H_0 = h(O), \quad r_0 = r(O), \quad s_0 = s(O), \\ A_n &= \frac{nA_0}{n - f_0}, \quad B_n = \frac{nB_0}{n - f_0}, \quad C_n = C_0 + \frac{A_0g_0}{n - f_0}, \quad D_n = D_0 + \frac{B_0g_0}{n - f_0}, \\ C_n^* &= C_0 + \left(g_0 + \frac{H_0r_0n}{n - s_0}\right) \frac{A_0}{(n - f_0 - r_0E_0n/(n - s_0))}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введем числовые последовательности $\delta_n, \Delta_n, \Delta_n^*$ по формулам:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_0^* = 1, \quad \delta_{n+1} = 1 + A_{n+1}D_{n+1}B_n\delta_n/(B_{n+1}\Delta_n), \\ \Delta_{n+1} &= 1 - C_{n+2}B_{n+1}\delta_{n+1}, \quad \Delta_{n+1}^* = 1 - C_{n+2}^*B_{n+1}\delta_{n+1} \quad \text{при } B_0 \neq 0, \quad n \in N, \\ \Delta_n &= 1, \quad \Delta_n^* = 1, \quad \delta_n = 1 \quad \text{при } B_0 = 0, \quad n \in N. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если выполняются условия

$$f_0 \neq n, \quad s_0 \neq n, \quad f_0 + \frac{r_0E_0k}{k - s_0} \neq 0, \quad \Delta_n^* \neq 0, \quad \Delta_n \neq 0, \quad n, k \in N; \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta_\infty, \quad |\delta_\infty| < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \Delta_\infty \neq 0, \quad |\Delta_\infty| < +\infty; \quad (1.5)$$

$$|A_0D_0|/\Delta_\infty^2 < 1, \quad (1.6)$$

то у задачи (1.1) существует единственное локально аналитическое решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий (1.4), (1.5) справедливы равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^* = C_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \Delta_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем строить решение задачи (1.1) в виде формальных степенных рядов, а затем доказывать их сходимость, в задаче (1.1) делается замена переменных $x' = \varepsilon_1 x, y' = \varepsilon_2 y, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \text{const} > 0$. У полученной в результате такой замены новой задачи А значения констант $\Delta_n', (\Delta_n^*)', \delta_n', \Delta_\infty', \delta_\infty'$ совпадают со значениями соответствующих констант (1.2) задачи (1.1). Однако за счет специального выбора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ будут выполняться неравенства

$$|a'(O)| = |\varepsilon_2 a(O)/\varepsilon_1| < |\Delta_\infty|, \quad |d'(O)| = |\varepsilon_1 d(O)/\varepsilon_2| < |\Delta_\infty|.$$

Далее предполагается, что соответствующая замена сделана, у новой задачи с целью облегчения написания штрихи опускаются, т. е. за преобразованной задачей сохраняется написание (1.1), и тогда справедливы неравенства

$$|A_0| < |\Delta_\infty|, \quad |D_0| < |\Delta_\infty|. \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.1) будем строить в виде рядов (символ z принимает значения u, v)

$$z(x, y) = \sum_{k, l \in N_0} z_{k, l} x^k y^l / (k! l!), \quad z_{k, l} = \frac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k \partial y^l} \Big|_{x=y=0}, \quad (1.8)$$

$$v(x) = \sum_{n \in N_0} w_n x^n / n!, \quad w_k = \left. \frac{d^k w}{dx^k} \right|_{x=0}.$$

Введем следующие обозначения:

$$t^* = [(r - r_0)u + (s - s_0)w + xt] \Big|_{y=0},$$

$$p^* = [(a - A_0)u_y + (b - B_0)v_x]x + (f - f_0)u + e(ru + sw + xt) \Big|_{y=0} - E_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + xp,$$

$$q^* = [(c - C_0)u_y + (d - D_0)v_x]x + (g - g_0)u + h(ru + sw + xt) \Big|_{y=0} - H_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + xq.$$

Умножим обе части уравнений системы из задачи (1.1) на x . Во введенных выше обозначениях система примет вид

$$xw_x = (r_0u + s_0w + t^*) \Big|_{y=0},$$

$$xu_x = x(A_0u_y + B_0v_x) + uf_0 + E_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + p^*, \tag{1.9}$$

$$xv_y = x(C_0u_y + D_0v_x) + ug_0 + H_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + q^*.$$

Звездочку у t^* , p^* , q^* в задаче (1.9) для удобства написания опустим. Исследуем задачу

$$\begin{aligned} xw_x &= (r_0u + s_0w + t) \Big|_{y=0}, \quad xu_x = x(A_0u_y + B_0v_x) + uf_0 + E_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + p, \\ xv_y &= x(C_0u_y + D_0v_x) + ug_0 + H_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + q, \quad w(0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Положим

$$r_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} r}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{x=y=0, u=v=w=0}, \quad i_n = \left. \frac{\partial^n i}{\partial x^n} \right|_{x=u=v=w=0},$$

$$z_n = (z_{n,0}, z_{n-1,1}, \dots, z_{0,n}), \quad r_n = (r_{n,0}, r_{n-1,1}, \dots, r_{0,n}).$$

Символ r принимает значения p, q . В $r_{k+1,l}, t_{n+1}$ войдут компоненты векторов (z_m, w_m) при $0 \leq m \leq l+k = n$ и не войдут компоненты векторов (z_m, w_m) при $m > l+k = n$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (1.8) доказывается индукцией по $n = k + l$. В силу начальных условий

$$u_{0,l} = v_{k,0} = w_0 = 0 \quad \text{при всех } k, l \in N_0 \tag{1.11}$$

и, в частности, $w_0 = u_{0,0} = v_{0,0} = 0$. Следовательно, z_0, w_0 однозначно определяются начальными условиями. Пусть все $z_0, w_0, \dots, z_n, w_n$ ($n \geq 0$) найдены. Чтобы вычислить z_{n+1}, w_{n+1} , уравнения (1.10) дифференцируются $k+1$ раз по x и $n-k$ раз по y (полагаются $x = y = u = v = w = 0$) и учитываются начальные условия в виде (1.11), а также тот факт, что w от y не зависит. В результате получим соотношения

$$(n+1)w_{n+1} = r_0u_{n+1,0} + s_0w_{n+1} + t_n, \quad u_{0,n+1} = 0,$$

$$u_{1,n} = A_0u_{0,n+1} + B_0v_{1,n} + f_0u_{1,n} + p_{1,n}, \quad v_{0,n+1} = C_0u_{0,n+1} + D_0v_{1,n} + g_0u_{1,n} + q_{1,n},$$

...

$$(k+1)u_{k+1,n-k} = (k+1)A_0u_{k,n-k+1} + (k+1)B_0v_{k+1,n-k} + f_0u_{k+1,n-k} + p_{k+1,n-k},$$

$$(k+1)v_{k,n+1-k} = (k+1)C_0u_{k,n+1-k} + (k+1)D_0v_{k+1,n-k} + g_0u_{k+1,n-k} + q_{k+1,n-k},$$

$$\dots \tag{1.12}$$

$$nu_{n,1} = nA_0u_{n-1,2} + nB_0v_{n,1} + f_0u_{n,1} + p_{n,1},$$

$$nv_{n-1,2} = nC_0u_{n-1,2} + nD_0v_{n,1} + g_0u_{n,1} + q_{n,1},$$

$$(n+1)u_{n+1,0} = (n+1)A_0u_{n,1} + (n+1)B_0v_{n+1,0} + f_0u_{n+1,0} + E_0r_0u_{n+1,0} + E_0s_0w_{n+1} + p_{n+1,0},$$

$$(n+1)v_{n,1} = (n+1)C_0u_{n,1} + (n+1)D_0v_{n+1,0} + g_0u_{n+1,0} + H_0r_0u_{n+1,0} + H_0s_0w_{n+1} + q_{n+1,0},$$

$$v_{n+1,0} = 0,$$

которые являются системой линейных алгебраических уравнений для u_{n+1} , v_{n+1} , w_{n+1} .

Система (1.12) решается методом последовательного исключения неизвестных.

«Прямой ход» состоит в построении величин

$$\Delta_0 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad \Delta_1 = 1 - C_2B_1\delta_1, \quad \Delta_1^* = 1 - C_2^*B_1\delta_1,$$

$$\delta_{k+1} = 1 + \frac{B_k}{B_{k+1}} A_{k+1}D_{k+1} \frac{\delta_k}{\Delta_k} \text{ при } B_0 \neq 0 \text{ либо } \delta_{k+1} = 1 \text{ при } B_0 = 0,$$

$$\Delta_{k+1} = 1 - C_{k+2}B_{k+1}\delta_{k+1}, \quad \Delta_{k+1}^* = 1 - C_{k+2}^*B_{k+1}\delta_{k+1}, \quad k = 2, \dots, n,$$

$$\psi_{1,n} = Q_{0,n}/\Delta_0, \quad \chi_{1,n} = P_{0,n}, \quad \psi_{2,n-1} = (C_2\chi_{1,n} + Q_{1,n-1})/\Delta_1,$$

$$\chi_{k+1,n-k} = A_{k+1}(B_k\delta_k\psi_{k+1,n-k} + \chi_{k,n-k+1}) + P_{k,n-k},$$

$$\psi_{k+1,n-k} = (C_{k+1}\chi_{k,n+1-k} + Q_{k,n-k})/\Delta_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\psi_{n+1}^* = (C_{n+1}^*\chi_{n,1} + Q_n^*)/\Delta_n^*, \quad \chi_{n+1}^* = A_{n+1}^*(B_n\delta_n\psi_{n+1}^* + \chi_{n,1}) + P_n^*.$$

Здесь

$$P_{k,n-k} = \frac{p_{k+1,n-k}}{k+1-f_0}; \quad Q_{k,n-k} = \frac{q_{k+1,n-k}}{k+1} + \frac{g_0p_{k+1,n-k}}{(k+1)(k+1-f_0)};$$

$$P_n^* = \frac{p_{n+1,0} + E_0s_0t_{n+1}/(n+1-s_0)}{n+1-f_0-r_0E_0(n+1)/(n+1-s_0)};$$

$$Q_n^* = \frac{1}{n+1} \left[q_{n+1,0} + \frac{H_0s_0t_{n+1}}{n+1-s_0} \right] + \frac{1}{n+1} \left[g_0 + \frac{H_0r_0(n+1)}{n+1-s_0} \right] \frac{p_{n+1,0} + E_0s_0t_{n+1}/(n+1-s_0)}{n+1-f_0-r_0E_0(n+1)/(n+1-s_0)}.$$

«Обратный ход»: $v_{n+1,0} = 0$, $v_{n,1} = \psi_{n+1}^*$, $u_{n+1,0} = \chi_{n+1}^*$,

$$v_{n-1,2} = \frac{D_n}{\Delta_{n-1}} v_{n,1} + \psi_{n,1}, \quad u_{n,1} = B_n\delta_n v_{n,1} + \chi_{n,1},$$

...

$$v_{0,n+1} = \frac{D_1}{\Delta_0} v_{1,n} + \psi_{1,n}, \quad u_{1,n} = B_1\delta_1 v_{1,n} + \chi_{1,n}.$$

Прежде чем доказывать сходимость рядов (1.8), перейдем от рекуррентных формул для $\chi_{k+1,n-k}$ к явным через A_i , B_i , Δ_i , Δ_i^* , δ_i , $P_{k,l}$, $Q_{k,l}$:

$$\chi_{1,n} = P_{0,n}, \quad \psi_{2,n-1} = (C_2P_{0,n} + Q_{1,n-1})/\Delta_1,$$

$$\chi_{k+1,n-k} = \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i}^k \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) P_{i-1,n+1-i} \right] + P_{k,n-k} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i}^k \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) B_i\delta_i Q_{i,n-i} \right] \right\}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}^* = & \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{A_{n+1}^*}{\Delta_n^*} \left(\prod_{j=i}^{n-1} \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) P_{i-1, n+1-i} \right] + P_n^* \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{A_{n+1}^*}{\Delta_n^*} \left(\prod_{j=i}^{n-1} \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) B_i \delta_i Q_{i, n-i} \right] \right\} + \frac{A_{n+1}^*}{\Delta_n^*} B_n \delta_n Q_n^*. \end{aligned}$$

Теперь $v_{k, n-k+1}$ выразим через $\psi_{i, r-i}$:

$$v_{n,1} = \psi_{n+1}^*, \quad v_{n-1,2} = \frac{D_n}{\Delta_{n-1}} \psi_{n+1}^* + \psi_{n,1},$$

...

$$v_{k, n-k+1} = \sum_{i=k+1}^{n-1} \left[\left(\prod_{j=k+1}^i \frac{D_j}{\Delta_{j-1}} \right) \psi_{i+1, n-i} \right] + \psi_{k+1, n-k} + \left(\prod_{j=k+1}^n \frac{D_j}{\Delta_{j-1}} \right) \psi_{n+1}^*, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Сходимость рядов (1.8) доказывается методом мажорант.

Из условий (1.5), (1.7) следует, что существуют константы M_1, q_* такие, что при всех $k, l \in N_0$

$$M_1 \geq 1, \quad 0 < q_* < 1, \quad \prod_{i=n}^{k+n} \frac{|A_{i+1}|}{|\Delta_i|} \leq M_1 q_*^k, \quad \frac{|A_{n+1}^*|}{|\Delta_n^*|} \leq M_1,$$

$$\prod_{i=n}^{n+k} \frac{|D_{i+1}|}{|\Delta_i|} \leq M_1 q_*^k, \quad |r_n| < M_1, \quad \frac{1}{|\Delta_k|} \leq M_1, \quad \frac{1}{|\Delta_k^*|} \leq M_1, \quad |B_n \delta_n| \leq M_1,$$

$$\frac{|C_{n+1}|}{|\Delta_n|} \leq M_1, \quad |A_k| \leq M_1, \quad \frac{|C_{n+1}^*|}{|\Delta_n^*|} \leq M_1, \quad |A_k^*| \leq M_1.$$

Вследствие этого при надлежащем выборе M_2, M_3 и $\rho > 0$ задача Коши

$$\begin{aligned} Z_\tau^* &= \frac{M_2}{[1 - (\tau + 2Z^* + W^*)/\rho]} [(\tau + 2Z^* + W^*)(2Z_\tau^* + W_\tau^*) + 1], \quad Z^*(0) = 0, \\ W_\tau^* &= \frac{M_3}{[1 - (\tau + 2Z^* + W^*)/\rho]} [(\tau + 2Z^* + W^*)(2Z_\tau^* + W_\tau^*) + 1], \quad W^*(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

мажорирует решение задачи (1.1). Здесь U^* мажорирует u, v ($U^* \gg u, v$), $W^* \gg w$, $W^* \gg z$, $\tau = x + y$.

Записав дифференциальную систему из задачи (1.13) в нормальном виде, получим, что правые части этой системы будут аналитическими функциями, мажорирующими нуль, и, следовательно, для задачи (1.13) справедлива теорема Коши — Ковалевской. Поэтому у задачи (1.13) существует аналитическое решение, мажорирующее ряды (1.8). Этим завершается доказательство теоремы 1.1.

Сформулируем и докажем достаточность некоторых условий, при выполнении которых справедлива теорема 1.1, а также обобщения этой теоремы, которые в дальнейшем будут использованы при решении конкретной газодинамической задачи.

Теорема 1.2. Пусть для задачи (1.1) выполнены условия:

1) функции $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s, t$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки O ;

2) $f_0 \neq n, s_0 \neq n, f_0 + r_0 E_0 k / (k - s_0) \neq n, n, k \in N$,

$$\begin{aligned} (1 - C_n)(1 - B_n) &> A_n D_n > -B_n(1 - C_n), \quad 1 - B_n > 0, \quad 1 - C_n^* \geq 0, \\ C_0 &\neq 1, \quad \gamma_0^2 > 4a_0, \quad (B_0 + a_0 - b_0)^2 > |a_0|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда задача (1.1) имеет единственное аналитическое решение.

Здесь $a_0 = A_0 D_0$; $b_0 = B_0 C_0$; $\gamma_0 = 1 + a_0 - b_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $C_{n+1}^* \leq 1$ обеспечивает выполнение неравенства $\Delta_n \neq 0$. Справедливо следующее обобщение этого условия: $\Delta_n \neq 0$, $n = 1, \dots, n_0$; $C_n^* \leq 1$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ (справедливость обобщения следует из сформулированной ниже леммы 1.4).

Перед доказательством теоремы 1.2 сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим пару последовательностей $\alpha_n, \beta_n, n \in N$, вычисляемых по правилу

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = B_1, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n - C_{n+1}\beta_n,$$

$$\beta_{n+1} = A_{n+1}D_{n+1}\beta_n + B_{n+1}\alpha_{n+1} = B_{n+1}\alpha_n + (A_{n+1}D_{n+1} - B_{n+1}C_{n+1})\beta_n.$$

Лемма 1.1. Если $\Delta_n \neq 0, n \in N$, то $\alpha_{n+1} = \prod_{k=1}^n \Delta_k, n = 1, 2, \dots$

Лемма 1.2. Пусть $(1 - C_n)(1 - B_n) > A_n D_n > -B_n(1 - C_n), 1 > B_n > 0, n \in N$. Тогда $\alpha_n > \beta_n > 0, n \in N$.

Лемма 1.3. Если $\Delta_n \neq 0, \Delta_n^* \neq 0, n \in N$, то $\alpha_{n+1}^* = \Delta_n^* \prod_{k=1}^{n-1} \Delta_k, n = 1, 2, \dots$, где $\alpha_{n+1}^* = \alpha_n - C_{n+1}^*\beta_n$.

Лемма 1.4. Если $\alpha_n > \beta_n > 0, C_n^* \leq 1, n \in N$, то $\alpha_{n+1}^* > 0$.

Лемма 1.5. Если последовательность Δ_n сходится, то $4a_0 \leq \gamma_0^2$. И обратно, если $4a_0 < \gamma_0^2, a_0 \neq 0, \Delta_n \neq 0, n \in N$, то последовательность Δ_n сходится.

Доказательства лемм здесь не приводятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.2. Из условий теоремы и лемм 1.1–1.4 следует, что выполнены условия (1.3), (1.4). Кроме того, согласно лемме 1.5, выполнено условие (1.5). Докажем теперь, что $\Delta_\infty^2 > |a_0|$. Воспользуемся леммой 1.2:

$$|\alpha_{n+1}| = |a_n - C_{n+1}\beta_n| > (1 - |C_{n+1}|)|\beta_n| = (1 - |C_{n+1}|)|B_n\alpha_{n-1} + (A_n D_n - B_n C_n)\beta_{n-1}| > \dots > |B_1|(1 - |C_{n+1}|) \prod_{k=2}^n (|B_k + A_k D_k - B_k C_k|).$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^n \Delta_k > B_1(1 - C_{n+1}) \prod_{k=2}^n (B_k + A_k D_k - B_k C_k) > 0.$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом $n \in N$, то $\Delta_\infty \geq |B_0| + |A_0 D_0 - C_0 B_0|$. Отсюда $\Delta_\infty^2 > |a_0|$. Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены, а значит, справедливо и утверждение теоремы 1.2.

В теореме 1.2 мы сформулировали достаточные условия аналитической разрешимости, которые в дальнейшем будут проверяться при решении задач газовой динамики. Теперь сформулируем обобщение этой теоремы, которое будет непосредственно использовано при решении газодинамической задачи.

Теорема 1.3. Задача

$$xw_x = (r_0 u + s_0 w + xt) \Big|_{y=0},$$

$$xu_x = x(A_0 u_y + B_0 v_x) + u f_0 + E_0(r_0 u + s_0 w) \Big|_{y=0} + xp,$$

$$xv_y = x(C_0u_y + D_0v_x) + ug_0 + H_0(r_0u + s_0w) \Big|_{y=0} + xq, \tag{1.15}$$

$$z_y = r,$$

$$w(0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad z(x, 0) = 0$$

имеет единственное локально аналитическое решение, если выполнены условия:

1) функции t, p, q, r зависят от независимых переменных x, y , неизвестных функций u, v, w, z и их первых производных;

2) функции t, p, q, r линейны относительно производных $w_x, u_x, v_x, z_x, u_y, v_y, z_y$, причем коэффициенты перед этими производными обращаются в точке $O (x = 0, y = 0, u = 0, v = 0, w = 0, z = 0)$ в нуль;

3) функции t, p, q, r аналитичны в некоторой окрестности точки O по соответствующим переменным;

4) для констант $A_0, B_0, C_0, D_0, g_0, f_0, E_0, H_0, r_0, s_0$ выполнены условия (1.14).

Задача (1.15) отличается от задачи (1.10) только наличием уравнения для z , в котором особенность отсутствует. Поэтому доказательство теоремы 1.3 в главных чертах повторяет доказательство теоремы 1.2 и здесь не приводится.

2. Газодинамическая задача. Рассмотрим систему уравнений газовой динамики [15, 16] для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$, где p — давление; S — энтропия (далее через s обозначена функция $A(S)$); ρ — плотность; $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа. Исследуем цилиндрически ($\nu = 1$) или сферически ($\nu = 2$) симметричные течения, зависящие от времени t и расстояния $r = (x_1^2 + \dots + x_{\nu+1}^2)^{1/2}$ (x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты). В качестве искомых функций $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, r)$ возьмем $\mathbf{U} = (\sigma, u, s)$, где $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$, u — скорость газа. Тогда скорость звука в газе задается соотношением $c = \sigma s$, а система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{\gamma-1}{2} \sigma \left(u_r + \nu \frac{u}{r} \right) &= 0, \\ u_t + \frac{2}{\gamma-1} \sigma s^2 \sigma_r + uu_r + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 ss_r &= 0, \quad s_t + us_r = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем искать кусочно-аналитические решения системы (2.1) для задачи о плавном движении поршня в газ, который порождает фокусирующуюся волну сжатия. Конфигурация течения у этой задачи в плоскости переменных t, r приведена на рис. 1.

В момент $t = t_0$ при $0 \leq r \leq r_0$ однородный газ покоится и в него из точки $A (t = t_0, r = r_0)$ начинает плавно вдвигаться непроницаемый поршень (линия AB — траектория движения поршня). По однородному покоящемуся в области Ω_0 газу с постоянной скоростью минус скорость звука в газе c_0 в области Ω_0 начинает распространяться звуковая характеристика (прямая AO), отделяющая область волны сжатия Ω_1 от области покоя Ω_0 . Момент фокусировки звуковой характеристики берется за $t = 0$. При аналитическом законе движения поршня в некоторой окрестности точки A в области Ω_1 существует единственное аналитическое решение задачи о поршне [4, 5], которое описывает изэнтропическое течение. Вне этой окрестности в области Ω_1 могут возникать особенности типа градиентной катастрофы.

Если закон движения поршня выбрать специальным образом, то течение в области Ω_1 будет автомодельным [1–3]: для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей автомодельные течения $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda)$, строится интегральная кривая, проходящая через соответствующие особые точки. Тем самым в области Ω_1 выбирается волна сжатия. По ней однозначно восстанавливаются линии AO, AB и OC — траектория движения отраженной ударной волны. Для этих автомодельных течений линия OC будет

прямой, а в области Ω_2 между отраженной ударной волной и осью $r = 0$ сжатый газ снова покоится и является однородным. В области Ω_1 параметры газа постоянны на прямых $\lambda = \text{const}$, в том числе $\sigma(0, r) = \text{const} > 0$, $u(0, r) = \text{const} < 0$. Ясно, что автомодельными течениями $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda)$ не передать в момент $t = 0$ профили газодинамических параметров в более общем случае:

$$\sigma(0, r) = \sigma_0(r), \quad u(0, r) = u_0(r), \quad s(0, r) = s_0 = \text{const}.$$

Если предположить, что при произвольных $\sigma_0(r)$, $u_0(r)$ в области Ω_1 при $t \geq 0$ у системы (2.1) существует решение, то тогда линия OC уже не будет прямой, а для течения газа в области Ω_2 уже не будут постоянными σ , u , s .

Цель данной работы состоит в следующем. Сначала исходя из начальных условий

$$\sigma(0, r) = \sigma_0(r), \quad \sigma_0(0) > 0, \quad u(0, r) = u_0(r), \quad u_0(0) < 0, \quad s(0, r) = s_0 = \text{const} > 0 \quad (2.2)$$

необходимо построить решение системы (2.1) в области Ω_1 и увязать его с задачей о фокусировке волны сжатия. Решение задачи (2.1), (2.2) в зависимости от начальных данных может быть увязано с задачей о фокусировке волны разрежения, однако содержательной газодинамической задачи, являющейся «предысторией» такой волны разрежения, не найдено. Затем в области Ω_2 необходимо построить другое решение системы (2.1), у которого $u(t, 0) = 0$. Одновременно с построением решения в Ω_2 необходимо определить неизвестную ударную волну OC , на которой построенное в Ω_1 и искомое в Ω_2 течения связаны соотношениями Гюгонио [15, 16]. Так как течение в области Ω_1 изэнтропическое, то, не теряя общности, можем считать, что $s_0 = 1$, а значит, $\sigma = c$.

Процедура построения решения задачи (2.1), (2.2) в области Ω_1 подробно изложена в [10], поэтому будем кратки в рассуждениях.

В системе (2.1) введем новые переменные

$$\zeta = t/r, \quad \chi = r. \quad (2.3)$$

Якобиан замены $J = 1/r$. Замена (2.3) является вырожденной при $r = 0$.

Теорема 2.1. Если $U_0(r)$ — функции аналитические в некоторой окрестности точки $r = 0$, то задача Коши (2.1), (2.2), записанная в переменных ζ, χ , имеет в некоторой окрестности точки $(\zeta = 0, \chi = 0)$ единственное аналитическое решение

$$U(\zeta, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k1}(\chi) \frac{\zeta^k}{k!}, \quad U_{01}(\chi) = U_0(\chi). \quad (2.4)$$

Теорема 2.1 является следствием теоремы Коши — Ковалевской.

Ряды (2.4) определяются вне зависимости от знаков компонент вектора $U_0(\chi)$ в некоторой полной окрестности точки $(\zeta = 0, \chi = 0)$. Исходя из физического смысла задачи (2.1), (2.2), надо рассматривать решения при $\chi \geq 0$, у которых $\sigma \geq 0$.

Вдоль оси $O\chi$ область существования решения «дотягивается» до точки $\chi = \chi_*$, где имеется особенность у функций $U_0(\chi)$ (может быть, что $\chi_* = +\infty$). При $\chi \rightarrow \chi_*$ радиус сходимости ряда (2.4) стремится к нулю как некоторая положительная степень разности $\chi - \chi_*$ (или дроби $1/\chi$, если $\chi_* = \infty$).

Вдоль оси $O\zeta$ граничными точками области существования аналитического решения являются $\zeta_* < 0$ и $\zeta^* > 0$. При этом в случае фокусировки волны сжатия значение $\zeta = \zeta_*$ (прямая AO_0 на рис. 2) соответствует звуковой характеристике AO на рис. 1: $c(\zeta_*, \chi) = \text{const} > 0$, $u(\zeta_*, \chi) = 0$, $c(\zeta_*, \chi) = -1/\zeta_*$. Отметим, что в случае фокусировки волны разрежения значение $\zeta = \zeta_*$ соответствует свободной границе (AO на рис. 1): $c(\zeta_*, \chi) = 0$, $u(\zeta_*, \chi) = \text{const} = 1/\zeta_*$.

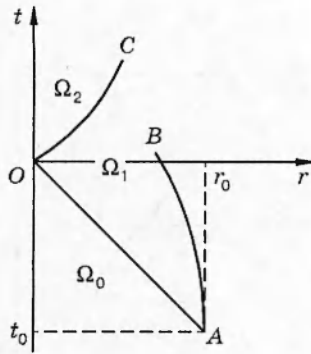


Рис. 1

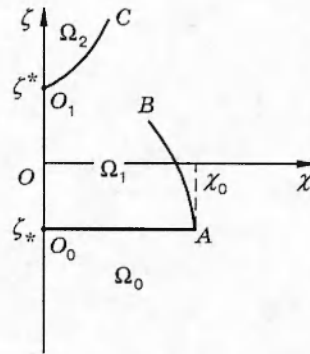


Рис. 2

Значение $\zeta = \zeta^*$ в обоих случаях оказывается больше, чем значение $\zeta = \zeta_1$: $\zeta^* > \zeta_1 > 0$, где $1/\zeta_1$ — скорость отраженной ударной волны (линия OC) в случае автомодельных течений. Значение $\zeta_1 = 1/D_0$ однозначно определяется из уравнения

$$\frac{1}{\zeta_1} = \frac{3 - \gamma}{4} u(\zeta_1, 0) + \left[\frac{(\gamma + 1)^2}{16} u^2(\zeta_1, 0) + \sigma^2(\zeta_1, 0) \right]^{1/2}.$$

Путем перехода к безразмерным переменным легко показать, что, не теряя общности, можно принять равным единице одно из значений $\sigma_0(0)$ или $|u_0(0)|$. Поэтому при заданных γ и ν значение $\mu = \sigma_0(0)/|u_0(0)|$ определяет, какая из величин (σ или u) обратится в точке $(\zeta = \zeta_*, \chi = 0)$ в нуль, т. е. какая волна (сжатия или разрежения) фокусируется. Из результатов Седова [1, с. 215] вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. Для любого $\mu > 0$ найдутся такие значения γ_1^*, γ_2^* , что

— в случае цилиндрической симметрии, если $1 < \gamma < \gamma_1^*$, то $u(\zeta_*, 0) = 0, \sigma(\zeta_*, 0) > 0$, т. е. фокусируется волна сжатия, а если $\gamma_1^* < \gamma$, то $u(\zeta_*, 0) < 0, \sigma(\zeta_*, 0) = 0$, т. е. фокусируется волна разрежения;

— в случае сферической симметрии, если $1 < \gamma < \gamma_2^*$, то $u(\zeta_*, 0) = 0, \sigma(\zeta_*, 0) > 0$, т. е. фокусируется волна сжатия, а если $\gamma_2^* < \gamma$, то $u(\zeta_*, 0) < 0, \sigma(\zeta_*, 0) = 0$, т. е. фокусируется волна разрежения.

Численные расчеты значений γ_1^*, γ_2^* приведены ниже.

μ	0,1	0,25	0,5	1	2	4	10
$\gamma_1^* (\nu = 1)$	1,13	1,30	1,59	2,120	3,19	5,30	11,62
$\gamma_2^* (\nu = 2)$	1,10	1,24	1,45	1,835	2,65	4,25	9,04

Зная течение газа в области Ω_1 в виде рядов (2.4), можно, решая соответствующие задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, однозначно определить траектории движения частиц газа в области Ω_1 . Одна из построенных траекторий движения частицы может быть принята за траекторию движения непроницаемого поршня, порождающего волну сжатия в области Ω_1 .

Если $u_0(r) = \text{const} < 0, \sigma_0(r) = \text{const} > 0$, то ряды (2.4) обрываются на первом члене, и течение газа в области Ω_1 описывается автомодельным решением Седова. Дифференциальное уравнение для траектории движения частицы в этом случае интегрируется в квадратурах. На рис. 3 в плоскости переменных ζ, χ приведена траектория частицы,

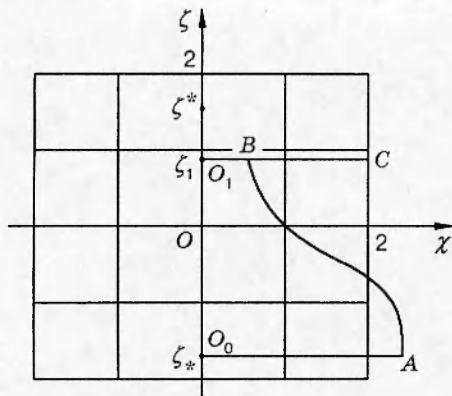


Рис. 3

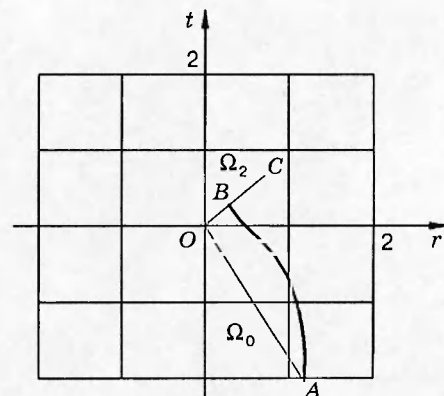


Рис. 4

проходящая через точку ($\zeta = 0, \chi = \chi_0 = 1$). На рис. 4 та же траектория изображена в плоскости переменных t, r . В этом случае отраженная ударная волна (прямые O_1C и OC) движется с постоянной скоростью, газ в областях Ω_0 и Ω_2 однородный и покоится, причем $\sigma|_{\Omega_0} < \sigma|_{\Omega_2}$.

Если $u_0(r), \sigma_0(r)$ не являются постоянными, то коэффициенты рядов (2.4) при $n > 0$ отличны от нуля, следовательно, течение в области Ω_1 неавтомодельное и отраженная УВ имеет переменную скорость движения.

На рис. 5, 6 приведены траектории движения частиц газа в области Ω_1 , проходящие через точку $\zeta = 0, \chi = \chi_0$, т. е. точку $t = 0, r = r_0 = \chi_0$ в случае конкретного распределения газодинамических параметров (линии 2), траектории движения частиц в автомодельном течении Седова (линии 1) и траектории движения отраженной ударной волны в автомодельном и неавтомодельном случаях (линии O_1C_1 и O_1C_2). Штриховые линии на рис. 5 иллюстрируют качественное поведение области сходимости рядов (2.4).

Перейдем к построению решения задачи (2.1), (2.2) в области Ω_2 и закона движения отраженной УВ.

Сделаем в системе (2.1) замену как независимых, так и зависимых переменных. Вна-

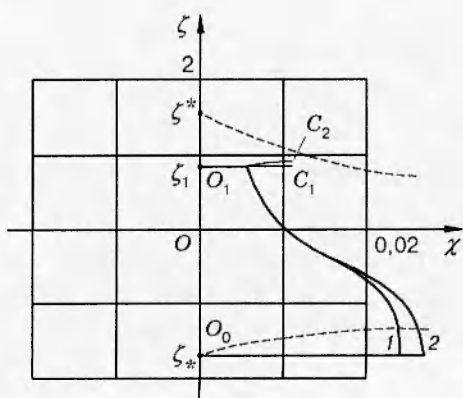


Рис. 5

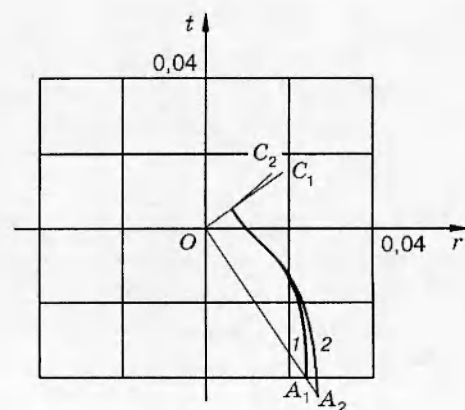


Рис. 6

чале по формулам

$$r = \varphi(x), \quad t = y + x \tag{2.5}$$

заменяем r, t на независимые переменные x, y . Якобиан преобразования $J = \varphi'(x)$. Здесь функция $r = \varphi(x)$ пока неизвестна и задает траекторию движения отраженной УВ. Однако из предыдущих рассуждений известны значения $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = D(0) = 1/\zeta_1$. Следовательно, замена (2.5) в точке $(t = 0, r = 0)$ является невырожденной, а при условии аналитичности функции $\varphi(x)$ замена будет невырожденной и в некоторой окрестности начала координат. При замене (2.5) ось $r = 0$ переходит в ось $x = 0$, линия УВ переходит в другую координатную ось $y = 0$.

Решение в области Ω_2 обозначим \mathbf{U} , решение в области $\Omega_1 - \mathbf{U}^1 = (u^1, c^1)$. Перепишем условия Гюгоньо [16] на ударной волне (т. е. на оси $y = 0$) в эквивалентном виде для D, σ, s через \mathbf{U}^1 и u (что возможно в силу «теоремы определенности» [16]):

$$\begin{aligned} D|_{y=0} &= \left[\frac{3-\gamma}{4} u^1 + \frac{\gamma+1}{4} u + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} (u-u^1)^2 + (c^1)^2} \right] \Big|_{y=0}, \\ \sigma|_{y=0} &= \left\{ c^1 \left[\frac{(1/4)(\gamma+1)(u-u^1) + \sqrt{((\gamma+1)^2/16)(u-u^1)^2 + (c^1)^2}}{(1/4)(\gamma-3)(u-u^1) + \sqrt{((\gamma+1)^2/16)(u-u^1)^2 + (c^1)^2}} \right]^{(\gamma-1)/2} \right\} \Big|_{y=0}, \\ s|_{y=0} &= \left\{ \left[\frac{1}{4}(\gamma-3)(u-u^1) + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} (u-u^1)^2 + (c^1)^2} \right]^{\gamma/2} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{4}(\gamma+1)(u-u^1) + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} (u-u^1)^2 + (c^1)^2} \right]^{(1-\gamma)/2} \times \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{4}(3\gamma-1)(u-u^1) + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} (u-u^1)^2 + (c^1)^2} \right]^{1/2} \right\} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Напомним, что $c = \sigma s$.

На оси или в центре симметрии имеем условие $u|_{x=0} = 0$, поэтому величины $\sigma_{00} = \sigma|_{x=y=0}, s_{00} = s|_{x=y=0}$ однозначно определяются из условий (2.6), поскольку $\mathbf{U}^1|_{\zeta=\zeta_1, \chi=0}$ известны из предыдущего. При этом $c_{00} = s_{00}\sigma_{00} > 0$.

Введем следующие обозначения:

$$l = \frac{2}{\gamma-1} s_{00}\sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00}s, \quad M_0 = \frac{D_0}{\sigma_{00} s_{00}}.$$

Заметим, что по теореме Цемплена [15] $0 < M_0 < 1$.

Функции u^1, c^1 определяем вдоль неизвестного фронта ударной волны. Поэтому

$$\mathbf{U}^1|_{y=0} = \mathbf{U}^1(\zeta, \chi)|_{y=0} = \mathbf{U}^1\left(\frac{x+y}{x\psi(x)}, x\psi\right)\Big|_{y=0} = \mathbf{U}^1\left(\frac{1}{\psi(x)}, x\psi(x)\right),$$

где $\psi(x)$ находится из соотношения $\varphi(x) = x\psi(x)$. Обозначим правые части условий Гюгоньо (2.6) соответственно через $D^*|_{y=0}, \sigma^*|_{y=0}, s^*|_{y=0}$. Приведенные выше рассуждения позволяют записать эти функции в виде

$$D^*|_{y=0} = \alpha u + \varepsilon \psi + q_0, \quad \sigma^*|_{y=0} = \alpha_1 u + \varepsilon_1 \psi + q_1, \quad s^*|_{y=0} = \alpha_2 u + \varepsilon_2 \psi + q_2.$$

Здесь $(\partial q_i / \partial u)|_{x=y=0} = (\partial q_i / \partial \psi)|_{x=y=0} = 0, i = 0, 1, 2$.

Выражения для α , α_1 , α_2 , ε , ε_1 , ε_2 весьма громоздки. Некоторые из них, необходимые в дальнейшем, будут приведены ниже.

Введем новые неизвестные функции по формулам

$$u' = u, \quad v = -\frac{1}{\beta + 1}(l - \beta u - e_0 \psi - q_3), \quad w = \psi - D_0, \quad z = s - s^* \Big|_{y=0}, \quad (2.7)$$

т. е. вместо u , σ , s , ψ будем искать u' , v , w , z . Здесь

$$\tilde{\beta} = \frac{2}{\gamma - 1} s_{00} \alpha_1 + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00} \alpha_2; \quad e_0 = \frac{2}{\gamma - 1} s_{00} \varepsilon_1 + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00} \varepsilon_2; \quad q_3 = \frac{2}{\gamma - 1} s_{00} q_1 + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00} q_2.$$

Замена (2.7) позволяет перейти к задаче Коши с нулевыми начальными условиями, заданными на разных поверхностях, для квазилинейной системы с особенностями.

Разрешив полученную в результате замен (2.5), (2.7) систему относительно u'_x , v'_y , w_x (штрих далее для удобства написания опускаем), получим

$$\begin{aligned} w_x &= \left[\alpha \frac{u}{x} + (\varepsilon - 1) \frac{w}{x} + Y_1 \right] \Big|_{y=0}, \\ u_x &= \frac{1 - M_0}{1 + \beta M_0} u_y + \frac{M_0(1 + \beta)}{1 + \beta M_0} v_x - \frac{\nu}{1 + \beta M_0} \frac{u}{x} - \frac{M_0 e_0}{1 + \beta M_0} w_x + Y_2, \\ v_y &= \frac{M_0(\beta - 1)}{1 + \beta M_0} u_y + \frac{1}{1 + \beta M_0} v_x + \frac{\nu \beta}{(1 + \beta M_0)(1 + \beta)} \frac{u}{x} - \frac{e_0}{(1 + \beta M_0)(1 + \beta)} w_x + Y_3, \\ z_y &= Y_4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь Y_i ($i = 1, \dots, 4$) — заданные функции, для которых выполнены условия 1–3 теоремы 1.3. Выражения для этих функций не приводятся из-за громоздкости.

Условие на оси симметрии для скорости газа $u = 0$ и условия Гюгоню на УВ в новых переменных запишутся в виде

$$w(0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad z(x, 0) = 0. \quad (2.9)$$

Тем самым для системы (2.8) получаем задачу Коши с начальными данными (2.9) на разных поверхностях: начальные значения для неизвестных $w(x)$, $u(x, y)$ задаются на одной координатной оси $x = 0$, а для двух других функций $v(x, y)$, $z(x, y)$ — на другой координатной оси $y = 0$. Напомним, что линии $x = 0$ в пространстве физических переменных t, r отвечает прямая $r = 0$ и начальные условия на ней соответствуют равенствам $D(t)|_{t=0} = 1/\zeta_1$, $u|_{r=0} = 0$, а линии $y = 0$ отвечает траектория неизвестной УВ. При этом два из трех условий Гюгоню на УВ переходят в начальные данные для $v(x, y)$, $z(x, y)$, поставленные на прямой $y = 0$, а третье условие Гюгоню перешло в первое уравнение системы (2.8). Задача (2.8), (2.9) описывает течения в области Ω_2 , точно удовлетворяющие условиям Гюгоню.

Теорема 2.2. *Задача (2.8), (2.9) имеет единственное аналитическое решение при $\gamma \geq \gamma_0$, где*

$$\gamma_0 = 1,117749 \dots \text{ в случае } \nu = 2, \quad \gamma_0 = 1,051854 \dots \text{ в случае } \nu = 1. \quad (2.10)$$

При $\gamma \geq \gamma_0$ существует единственное аналитическое решение задачи (2.1), (2.2) в области Ω_2 , определяющее также траекторию движения отраженной УВ, на которой выполнены условия Гюгоню. Для решения в Ω_2 выполнено также условие симметрии.

Теорема 2.2 доказывается с помощью теоремы 1.3. Проверим выполнение условий этой теоремы для задачи (2.8), (2.9).

Условия 1-3 теоремы 1.3 выполнены в силу аналитичности функций D^*, σ^*, s^* в окрестности точки $(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0, w = 0, z = 0)$. Проверим выполнение условий (1.14).

Выпишем необходимые константы:

$$A_0 = \frac{1 - M_0^2}{1 + \beta M_0}, \quad B_0 = \frac{M_0(1 + \beta)}{1 + \beta M_0}, \quad C_0 = \frac{M_0(\beta - 1)}{1 + \beta M_0}, \quad D_0 = \frac{1}{1 + \beta M_0}, \quad (2.11)$$

$$g_0 = \frac{\nu\beta}{(1 + \beta M_0)(1 + \beta)}, \quad j_0 = -\frac{\nu}{1 + \beta M_0}, \quad \bar{E}_0 = -\frac{M_0 e_0}{1 + \beta M_0}, \quad \bar{H}_0 = -\frac{e_0}{(1 + \beta)(1 + \beta M_0)},$$

$$r_0 = \alpha, \quad s_0 = \varepsilon - 1.$$

Проверка всех условий (1.14), кроме неравенства $1 \geq C_{n+1}^*$, произведена в [10].

Проверка справедливости неравенства $1 \geq C_{n+1}^*$, т. е. оценка членов последовательности C_{n+1}^* ($n \in N$) с учетом (2.11)

$$C_n^* = \frac{M_0(\beta - 1)}{1 + \beta M_0} + \frac{1 - M_0^2}{(1 + \beta M_0)(\beta + 1)} \left(\nu\beta - \frac{e_\alpha n}{n + 1 - \varepsilon} \right) \frac{1}{n(1 + \beta M_0) + \nu + M_0 e_\alpha n / (n + 1 - \varepsilon)}$$

($e_\alpha = \alpha e_0$), довольно трудоемка и здесь излагается кратко.

Выпишем явные формулы для констант $e_0, \beta, \alpha, \varepsilon, M_0$, пользуясь решением в области Ω_1 и условиями Гюгонио (2.6):

$$e_0 = \frac{\nu}{2} \frac{\delta - (\gamma - 1)/2}{(\delta - (\gamma + 1)/4)[(\delta - 1)(\delta + (\gamma - 1)/2)]^{1/2}} < 0,$$

$$\beta = \left(\frac{\delta - 1}{\delta + (\gamma - 1)/2} \right)^{1/2} \frac{\delta}{\delta - (\gamma + 1)/4},$$

$$\alpha = \frac{(\gamma + 1)}{4} \frac{\delta}{(\delta - (\gamma + 1)/4)} > 0, \quad \varepsilon = -\frac{\nu}{2} \frac{(\delta - (\gamma + 1)/2)}{(\delta - (\gamma + 1)/4)} < 0, \quad (2.12)$$

$$M_0 = \left(\frac{\delta - 1}{\delta + (\gamma - 1)/2} \right)^{1/2}, \quad \delta = \frac{\gamma + 1}{4} + \frac{1}{u - u^1} \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} (u - u^1)^2 + (c^1)^2}.$$

Используя соотношения (2.12), удается доказать справедливость неравенства $C_{n+1}^* \leq 1$, если γ удовлетворяет (2.10).

Таким образом, теорема 2.2 доказана. Задача (2.8), (2.9) имеет единственное аналитическое решение, если $\gamma \geq \gamma_0$, где γ_0 определяется из (2.10).

Можно высказать предположение о том, что задача (2.8), (2.9) имеет единственное аналитическое решение, если $1 < \gamma < \gamma_0$ при любых аналитических функциях $u_0(x), \sigma_0(x)$, но для его доказательства необходима новая теорема, отличная от теоремы 1.3.

Автор признателен С. П. Баутину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987.
2. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
3. Забабахин И. Е., Симоненко В. А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3. С. 573-576.
4. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052-2063.

5. Баутин С. П. Приближенный метод расчета одномерных течений газа, вызванных не-монотонным движением поршня // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1058–1064.
6. Годунов С. К., Киреева И. Л. О некоторых автомодельных движениях идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 2. С. 374–392.
7. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
8. Тешуков В. М. О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2. С. 225–234.
9. Тешуков В. М. Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 605–615.
10. Баутин С. П., Казаков А. Л. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 465–474.
11. Леднев Н. А. Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Математ. сб. 1948. Т. 22, вып. 2. С. 205–266.
12. Тешуков В. М. Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт гидродинамики. 1978. Вып. 33. С. 114–133.
13. Баутин С. П. Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях, возникающая в газовой динамике // Актуальные вопросы современной математики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995. С. 32–43.
14. Казаков А. Л. Один контрпример для задачи Коши с начальными данными на разных поверхностях. М., 1995. Деп. в ВИНТИ 15.12.1995, № 3347-В95.
15. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
16. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 8/1 1997 г.
