

УДК 539.375

## НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТА С ХРУПКИМ СВЯЗУЮЩИМ. 2. АРМИРОВАНИЕ ВЫСОКОПРОЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

В. М. Корнев, А. Г. Демешкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Представлены экспериментальные результаты исследования разрушения композитных образцов с хрупким связующим. Предложена модификация сдвиговой модели деформирования композита при разрушении матрицы. Построен трехпараметрический достаточный критерий квазихрупкой прочности композита, когда композит описывается уравнениями ортотропной среды. Получены простые аналитические выражения, связывающие длину макротрещины с параметром нагружения и структурными, жесткостными, прочностными параметрами композитной среды. Обсуждается подход к построению многопараметрических критериев, учитывающих особенности деформирования материалов компонентов композита.

**Ключевые слова:** критерии разрушения, композит, армирование, зона предразрушения, многопараметрические критерии.

**Введение.** В первой части работы (см. [1]) с использованием подхода Нейбера — Новожилова [2, 3] изучена зона предразрушения длиной  $\Delta$  в композитах со слабым армированием. Суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН)  $K_I^0$  в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [4, 5] может быть нулевым или положительным:  $K_I^0 = 0$ ,  $K_I^0 > 0$ . Области применимости этих ограничений описаны в работе [6]. Механизмом разрушения композита с хрупким связующим является рост макротрещины за счет образования зоны предразрушения перед вершиной исходной трещины с последующим обрывом волокна [7], ближайшего к середине трещины. Только после обрыва волокон происходит разделение композита на части. При описании разрушения композитов, армированных высокопрочными волокнами, композитный материал целесообразно моделировать однородной ортотропной средой, учитывая его структуру при формулировке критериев разрушения [7, 8].

Для исследования наибольший интерес представляет зона предразрушения, примыкающая к вершине трещины. Далее все величины для композита или матрицы (до момента разрушения матрицы) отмечены индексом 1, а для армирующих волокон (после разрушения матрицы) — индексом 2. Пусть в рассматриваемой модели композитных материалов  $\sigma_{m2} = \text{const}$  — осредненные напряжения в зоне предразрушения [1], отличные от “теоретической” прочности пучка волокон с хрупким связующим  $\sigma_{m1}$ . Возможны следующие случаи: 1)  $\sigma_{m1} \gg \sigma_{m2}$ ; 2)  $\sigma_{m1} \simeq \sigma_{m2}$ ; 3)  $\sigma_{m1} \ll \sigma_{m2}$ . Первый случай соответствует слабому армированию [1], третий — армированию высокопрочными волокнами; во всех случаях могут выполняться ограничения  $K_I^0 = 0$  или  $K_I^0 > 0$ .

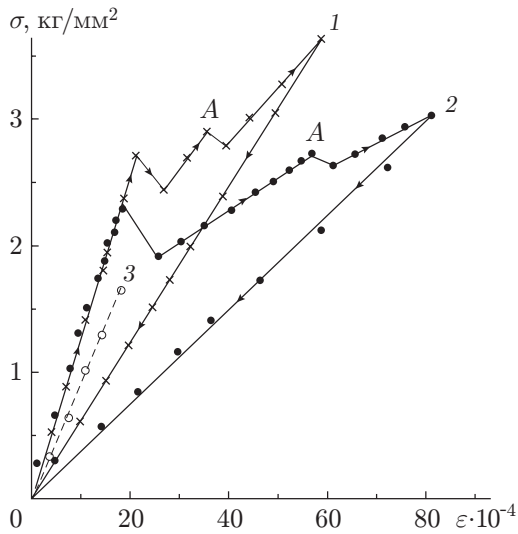


Рис. 1. Диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  образцов:  
 1 — образец, армированный стеклопластиком ЭФ-32-301 ( $\chi_2 = 0,125$ ); 2 — образец, армированный стеклопластиком ЭФ-32-301 ( $\chi_2 = 0,05$ ); 3 — образец из материала связующего

Использование необходимого критерия хрупкой прочности для матрицы и достаточного критерия квазихрупкой прочности для арматуры (см. [3]) при анализе процессов предразрушения и окончательного разрушения композита представляется естественным. Предложенный в [1] трехпараметрический критерий является деформационно-силовым критерием.

**1. Физико-механическая модель пучка волокон для зоны предразрушения при армировании высокопрочными волокнами.** Допустим, что исходный композит имеет регулярную однонаправленную структуру [7–9] и  $r_1$  — расстояние между волокнами. Считаем, что композитный материал можно описать уравнениями однородной ортотропной среды [8] вне зоны предразрушения. В зоне предразрушения поведение частично разрушенного композита зависит от его структуры и диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  армирующих волокон. Наиболее простая модель композита — модель пучка волокон. Каждый представительный объем композита содержит волокно и хрупкую матрицу [7–9], высокопрочные армирующие волокна могут быть хрупкими или пластичными, причем предельное относительное удлинение волокон  $\varepsilon_{m2}$  существенно больше предельного относительного удлинения связующего  $\varepsilon_{m1}$  ( $\varepsilon_{m2} \gg \varepsilon_{m1}$ ). Упрощенные диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  пучка волокон и их аппроксимации, соответствующие испытанию пучка волокон композита в предельно жесткой машине, приведены в [1] на рис. 1. Опишем результаты испытания модельных образцов композита, которые показывают, что упрощенное описание [9] силовых мостов сдвиговой моделью не всегда отражает особенности деформирования композита в зоне предразрушения.

На рис. 1, 2 приведены кривые растяжения и разгрузки армированных образцов из эпоксидной матрицы с наполнителем. Путь нагружения и разгрузки на этих кривых показан стрелками, перескок при появлении трещины в образце — штриховыми линиями. В качестве наполнителя использовался песок для охрупчивания эпоксидной матрицы. Образцы имели форму лопатки с площадью сечения в мерной базе  $S = 60 \div 65 \text{ мм}^2$ . По центру образец армировался: 1) стержнем из однонаправленного стеклопластика ЭФ-32-301; 2) стальной проволокой; 3) медной проволокой. Растяжение образцов проводилось на машине рычажного типа. Деформация измерялась индикаторами часового типа. Прочностные и жесткостные характеристики матрицы определялись на образце-спутнике, режим полимеризации которого был таким же, как и для армированного образца. На рис. 1 приведены кривые деформирования 1 и 2 для образцов, армированных стеклопластиком ЭФ-32-301 с объемной долей волокон  $\chi_2 = 0,125$ ;  $0,050$  соответственно, кривая 3 соответствует деформированию

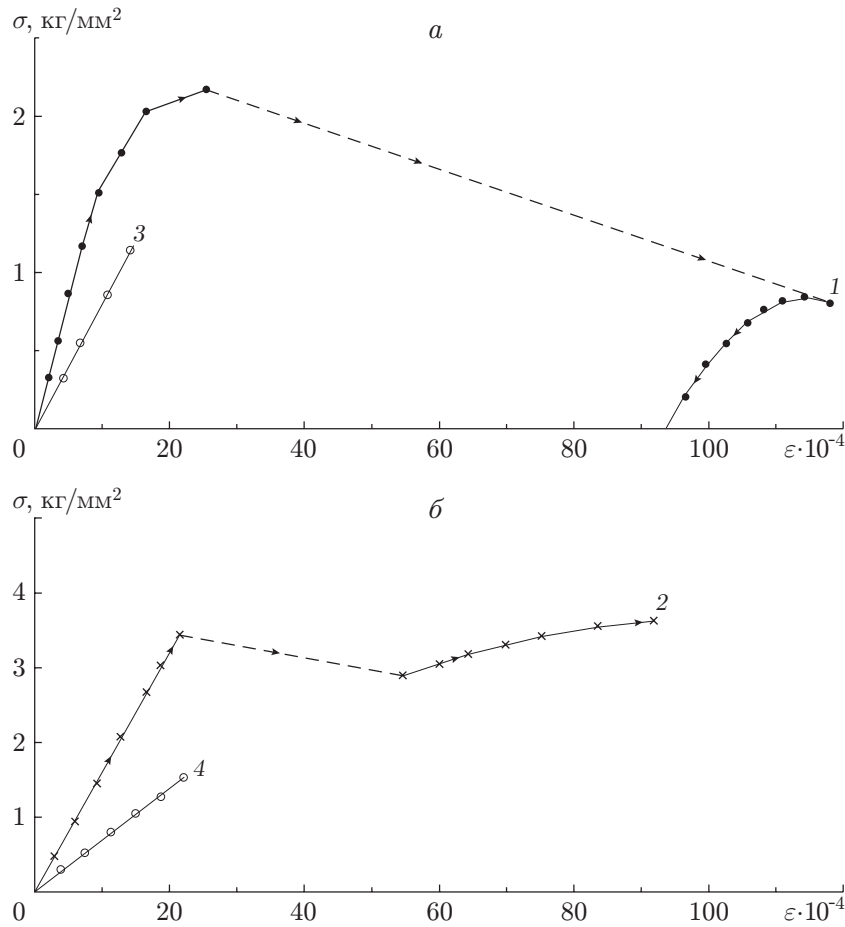


Рис. 2. Диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  образцов:

*a* — 1 — образец, армированный медной проволокой ( $\chi_2 = 0,05$ ); 3 — образец из материала связующего; *б* — 2 — образец, армированный стальной проволокой ( $\chi_2 = 0,05$ ); 4 — образец из материала связующего

хрупкой матрицы ( $\chi_2$  — объемная доля волокон арматуры в композите,  $\chi_1 = 1 - \chi_2$  — объемная доля матрицы). Точки соответствуют экспериментальным данным. На рис. 2 приведены кривые деформирования 1, 2 для образцов, армированных медной проволокой с объемной долей волокон  $\chi_2 = 0,05$  и стальной проволокой с  $\chi_2 = 0,05$  соответственно. Кривые 3, 4 соответствуют деформированию хрупкой матрицы образцов, армированных медной и стальной проволокой. Кривые 1, 2 на рис. 1, 2 существенно различаются, так как при деформировании образцов, армированных стеклопластиком ЭФ-32-301, имело место не только разрушение хрупкой матрицы, но и повторное разрушение прядей волокон в точке А кривой деформирования. Кроме того, при разгрузке образцов, армированных стеклопластиком, происходило полное закрытие трещин, а при разгрузке образцов, армированных медной или стальной проволокой, между берегами трещин оставался существенный зазор из-за пластичности материалов арматуры.

Модуль упругости и прочность испытанных образцов достаточно точно определяются по правилу смесей. Среднее напряжение  $\sigma$  в однонаправленном композите определяется соотношением [10]

$$\sigma = \sigma_1\chi_1 + \sigma_2\chi_2, \quad (1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  — напряжения в матрице и волокне соответственно. При одинаковой деформации

Номер образца	Связующее		Арматура		Композит			
	$E$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_m$ , кг/мм <sup>2</sup>	$E$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_m$ , кг/мм <sup>2</sup>	Эксперимент		Теория	
					$E$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_m$ , кг/мм <sup>2</sup>	$E$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_m$ , кг/мм <sup>2</sup>
1	800	1,73	4900	55	1060	2,67	1240	2,80
2	800	1,73	4900	55	1000	2,20	990	2,17
3	800	1,83	20 000	70	1670	3,53	1700	4,00
4	800	1,35	10 000	25	1300	2,25	1210	2,16

(до разрушения) волокна и матрицы напряжения относятся как модули упругости:

$$\sigma_2/\sigma_1 = E_2/E_1 \quad (2)$$

( $E_1, E_2$  — модули упругости матрицы и волокна соответственно). Подставим в соотношения (1) и (2) жесткостные характеристики конкретного армируемого элемента и матрицы. С учетом их объемной доли можно определить разрушающее напряжение композита  $\sigma_{m1}$ , если соотнести полученные величины с прочностными характеристиками матрицы. Под разрушением композита понимается появление одной или нескольких трещин в матрице образца. После появления трещины при армировании высокопрочными волокнами армирующий элемент выполняет роль силового моста между двумя частями композитного образца. Ниже приводятся результаты экспериментов для образцов, в которых появлялась только одна трещина.

В таблице приведены результаты расчета разрушающих напряжений по правилу смесей и экспериментальные данные. Первый и второй образцы армировались стеклопластиком, третий и четвертый — стальной и медной проволокой соответственно, причем объемная доля волокон арматуры составляла  $\chi_2 = 0,125$  для первого образца,  $\chi_2 = 0,05$  для второго, третьего и четвертого образцов. В экспериментах фиксировалось напряжение, при котором появились трещины в матрице, при этом относительные удлинения композита составляли  $\varepsilon_{m1} = 22 \cdot 10^{-4}$  для первого, второго и третьего образцов,  $\varepsilon_{m1} = 25 \cdot 10^{-4}$  для четвертого образца. Правило смесей с удовлетворительной точностью предсказывает появление трещин в матрице (см. таблицу). После появления трещины в матрице происходил перескок с одной ветви кривой деформирования на другую (ниспадающие участки кривых на рис. 1, 2), так как в экспериментах использовалась сравнительно “мягкая” испытательная машина рычажного типа. Для получения оценок критического раскрытия трещин (КРТ) разных образцов, когда силовые мосты арматуры обрываются, наибольший интерес представляют  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы на рис. 1, 2. Полученные экспериментальные значения КРТ в композите характерны для композитов с хрупкой матрицей. Эти значения не противоречат модели Будянски — Эванса — Хатчинсона [9] (см. [7, 8]), однако экспериментальные значения КРТ больше полученных с использованием сдвиговой модели [9]. Случай, когда диаграммы  $\sigma-\varepsilon$  материалов матрицы и высокопрочных волокон имеют значительную площадку текучести, существенно сложнее случая, когда волокна композита имеют такие же свойства, а матрица хрупкая. Некоторые теоретические обобщения для случая, когда диаграммы  $\sigma-\varepsilon$  материалов матрицы и волокон имеют значительные площадки текучести, приведены ниже при формулировке многопараметрических критериев прочности.

Выясним область применимости сдвиговой модели [9]. При предварительных испытаниях образцов, когда в качестве материала матрицы использовалась эпоксидная смола (в затвердевшем виде это оптически активная среда), а материал армирующих стержней имел ярко выраженную текучесть, в окрестности берегов трещины отмечено наличие

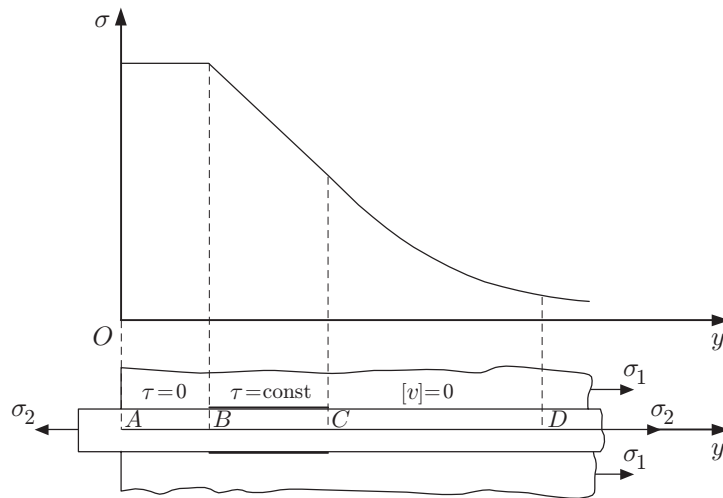


Рис. 3. Сдвиговая модель композита с участком отслоения арматуры

трех участков: участка отслоения армирующих стержней от матрицы на расстояниях от поверхности трещины, существенно превышающих диаметр армирующих стержней [9]; участка с частичным проскальзыванием, на котором реализуется сухое трение между матрицей и арматурой; участка совместного деформирования матрицы и арматуры.

Целесообразно рассмотреть модификацию сдвиговой модели [9], которая приведена на рис. 3 (ср. с рис. 3 в [9]). На рис. 3, *внизу* показаны участки отслоения  $AB$  (сдвиговые напряжения  $\tau$  на поверхности раздела матрица — арматура отсутствуют:  $\tau = 0$ ), сухого трения  $BC$  ( $\tau = \text{const}$ ) и совместного деформирования  $CD$  (скачок смещений  $[v]$  на поверхности раздела матрица — арматура отсутствует:  $[v] = 0$ ). На рис. 3, *вверху* показано распределение напряжений в арматуре. Участкам  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  соответствуют постоянные, линейно меняющиеся и экспоненциально затухающие напряжения в арматуре, точка  $A$  расположена на поверхности трещины. По мнению авторов данной работы, отслоение может быть вызвано текучестью материала стержней: в том месте, где материал стержня течет, уменьшается диаметр стержня и происходит отслоение. Значения КРТ, полученные с использованием модифицированной и немодифицированной моделей, существенно различаются вследствие того, что в модифицированной модели появляются отслоившийся участок и участок частичного проскальзывания.

Введем в рассмотрение поперечник зоны предразрушения для однонаправленной арматуры. Обозначим через  $a$  приведенную длину “свободной” арматуры, воспринимающей силовые связи между берегами трещины (рис. 3). Таким образом, зона предразрушения представляет собой прямоугольник со сторонами  $\Delta$ ,  $a$ . Допустим, что теоретически или экспериментально определено значение КРТ в точке  $x = -\Delta$  (система координат связана с правой вершиной трещины):  $a_{m2} = (\varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1})a$ . В зоне предразрушения на отрезке  $[-\Delta, 0)$  действуют постоянные напряжения  $\sigma_{m2}$  [4, 5].

Итак, имеем геометрические  $r_1, \Delta, a_{m2}$  и силовые  $\sigma_{m1}, \sigma_{m2}$  параметры, которые используются при формулировке достаточного критерия квазихрупкой прочности, что позволяет получить трехпараметрические кривые разрушения, соответствующие деформационно-силовому критерию. Геометрический параметр  $r_1$  характеризует структуру и используется при формулировке дискретно-интегрального критерия, длина зоны предразрушения  $\Delta$  определяется из ограничения, наложенного на величину КРТ. Окончательно имеем один деформационный  $a_{m2}$  и два силовых  $\sigma_{m1}, \sigma_{m2}$  ( $\sigma_{m1} \ll \sigma_{m2}$ ) параметра, описывающих поведение пучка волокон композита с высокопрочными волокнами при раз-

рушении. При  $\sigma_{m1} = \sigma_{m2}$  имеем два параметра в деформационно-силовом критерии. Преимущества двухкритериального анализа квазихрупкого разрушения обсуждаются в [11].

**2. Достаточный критерий квазихрупкой прочности композита с высокопрочными волокнами** ( $\sigma_{m1} \ll \sigma_{m2}$ ). Внутренняя трещина отрыва в композите моделируется двусторонним разрезом со связями в окрестности ее вершин, если  $\Delta > 0$ . Допустим, что для суммарного КИНа выполняется ограничение  $K_I^0 > 0$  (случай  $K_I^0 = 0$  рассмотрен в [6]).

Необходимый дискретно-интегральный критерий хрупкой прочности имеет вид ( $\Delta = 0$ )

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_{m1}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Достаточный дискретно-интегральный критерий квазихрупкой прочности имеет вид ( $\Delta > 0$ ,  $a_{m2} > 0$ ,  $l = l_0 + \Delta$ )

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_{m1}, \quad x \geq 0, \quad 2v^* \leq a_{m2}, \quad x \leq 0. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_y$  — нормальные напряжения на продолжении трещины, имеющие сингулярную составляющую;  $Oxy$  — прямоугольная система координат, начало которой совпадает с правой вершиной фиктивной трещины;  $2l_0$  — длина исходной трещины;  $2l$  — длина фиктивной трещины;  $n, k$  — числа ( $n \geq k$ ,  $k$  — число целых волокон);  $nr_1$  — интервал осреднения;  $(n - k)/n$  — коэффициент поврежденности арматуры на интервале осреднения;  $2v = 2v(x, 0)$  — раскрытие трещины;  $2v^*(-\Delta, 0) = a_{m2}$  — значение КРТ, при котором обрывается ближайшее к центру трещины волокно.

Композитный материал с высокопрочными волокнами вне зоны предразрушения моделируется ортотропной средой. Используем результаты работы [8], в которой для такого материала получены аналитические выражения для нормальных напряжений на продолжении фиктивной трещины  $\sigma_y(x_1, 0)$  и раскрытия фиктивной трещины  $2v(x_1, 0)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y(x_1, 0) = & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - l^2}} \left( \sigma_\infty - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) + \\ & + \sigma_{m2} - \frac{\sigma_{m2}}{\pi} \left( \arcsin \frac{l^2 - l_0 x_1}{l(l_0 - x_1)} + \arcsin \frac{l^2 + l_0 x_1}{l(l_0 + x_1)} \right), \quad |x_1| > l; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2v(x_1, 0) = & \frac{4}{E^*} \left( \sigma_\infty - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) \sqrt{l^2 - x_1^2} + \\ & + \frac{2\sigma_{m2}}{\pi E^*} [(x_1 - l_0)F(x_1, l_0) + (x_1 + l_0)F(x_1, -l_0)], \quad |x_1| < l; \end{aligned} \quad (6)$$

$$F(x_1, l_0) = \ln \frac{l^2 - l_0 x_1 - \sqrt{(l^2 - l_0^2)(l^2 - x_1^2)}}{l^2 - l_0 x_1 + \sqrt{(l^2 - l_0^2)(l^2 - x_1^2)}}, \quad E^* \approx \chi_1 E_1 + \chi_2 E_2.$$

Здесь  $x_1 = x + l$ , т. е. начало координат совпадает с серединами исходной и фиктивной трещин.

Анализ решения для напряжений (5) показывает, что сингулярная составляющая решения для напряжения  $\sigma_y(x_1, 0)$  содержится в первом члене этого выражения. Напряжения  $\sigma_y(x_1, 0)$  имеют сингулярную составляющую при  $\sigma_\infty - (2\sigma_{m2}/\pi) \arccos(l_0/l) > 0$

(далее рассматривается именно этот случай). При отсутствии сингулярной составляющей ( $\sigma_\infty - (2\sigma_{m2}/\pi) \arccos(l_0/l) = 0$ ), т. е. когда выполняется гипотеза Христиановича [12], напряжения  $\sigma_y(x_1, 0)$  в вершине фиктивной трещины (в точке  $(l, 0)$ ) конечны:  $\sigma_y(0, 0) = \sigma_{m2}[1 + 2\pi^{-1} \arcsin(l/l_0)]$ . Оценим вклад различных членов в решении для раскрытия трещины (6): при  $\sigma_\infty - (2\sigma_{m2}/\pi) \arccos(l_0/l) > 0$  основной вклад вносит первый член из (6). Ограничимся простейшими асимптотическими представлениями для напряжений и раскрытия трещины (рассматривается правая вершина трещины, все второстепенные члены опущены)

$$\sigma_y(x, 0) \simeq \sqrt{\frac{l}{2x}} \left( \sigma_\infty - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right), \quad x > 0; \quad (7)$$

$$2v(x, 0) \simeq \frac{4}{E^*} \left( \sigma_\infty - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) \sqrt{2|x|l}, \quad x < 0. \quad (8)$$

Асимптотические представления для напряжений (7) и раскрытия трещины (8) подставляются в первое и второе условия достаточного критерия квазихрупкой прочности (4). После очевидных преобразований для критических параметров  $\sigma_\infty^*$ ,  $\Delta^*$ ,  $l^* = l_0 + \Delta^*$  имеем систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{\frac{2l^*}{r_1}} \left[ \frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_{m2}} - \frac{2}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{\Delta^*}{l^*} \right) \right] &\simeq \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m2}}, \\ 4\sqrt{2} \frac{\sigma_{m2}}{E^*} \left[ \frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_{m2}} - \frac{2}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{\Delta^*}{l^*} \right) \right] \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} &\simeq \frac{a_{m2}}{l^*}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) описывает поведение только длинных трещин ( $l/r_1 \gg 1$ ), так как второстепенные члены в соотношениях (7), (8) не учитываются. Ограничимся квазихрупким приближением, когда  $\Delta^*/l^0 \ll 1$  или  $\Delta^*/l \ll 1$  (классификацию типов разрушения по длине зоны предразрушения см. в [6]). Для квазихрупкого разрушения система (9) существенно упрощается:

$$\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_{m2}} \simeq \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{r_1}{2l^*}} \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{E^*}{\sigma_\infty^*} \frac{a_{m2}}{l^*}, \quad \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \simeq \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{E^*}{\sigma_\infty^*} \frac{a_{m2}}{l^*}. \quad (10)$$

Критическая длина зоны предразрушения  $\Delta^*$  непосредственно связана с предельной деформативностью высокопрочных волокон  $a_{m2}$ . Увеличение этой деформативности позволяет системе выдержать повышенные напряжения  $\sigma_\infty$  за счет частичного разрушения матрицы. Выполняя предельный переход при  $a_{m2} \rightarrow 0$ , получим соотношение, соответствующее необходимому критерию (3).

**3. Обсуждение.** С учетом соотношений (9) или (10) можно утверждать, что достаточный дискретно-интегральный критерий (4) для рассматриваемой задачи сформулирован как трехпараметрический деформационно-силовой критерий относительно параметров  $a_{m2}, \sigma_{m1}, \sigma_{m2}$ , описывающих прочностные свойства материала ( $\sigma_{m1} \neq \sigma_{m2}$ ). Два других геометрических параметра  $r_1, \Delta$ , описывающих структуру материала и длину зоны предразрушения, присутствуют только в промежуточных выкладках (при измерении длины трещин  $l_0, l$  в качестве масштаба выбрана величина  $r_1$ ). В п. 2 (см. также [1, 6]) получены кривые разрушения для многопараметрических критериев, в уравнения которых входят стандартные прочностные характеристики материалов. Методика получения уравнений соответствующих кривых прочности с использованием различных критериев одна и та же независимо от того, имеется ли пластичность изотропного материала [6] или происходит частичное растрескивание [1] материала матрицы.

В работе [13] на основе анализа экспериментальных данных сделан вывод о том, что многопараметрические критерии прочности предпочтительны при предсказании разрушения реальных керамических материалов: при разрушении трещиноватых тел критический КИН, вообще говоря, не является константой материала и может зависеть от длины трещины. Тип разрушения керамических материалов, как правило, хрупкий или квазихрупкий [6], однако на процесс формирования зоны предразрушения после разрушения матрицы существенное влияние оказывает остаточная прочность композита, т. е. отношение  $\sigma_{m2}/\sigma_{m1}$ , когда  $\sigma_{m2} \gg \sigma_{m1}$ . Даже при малой длине зоны предразрушения  $\Delta$  при  $\sigma_{m2}/\sigma_{m1} > 1$  критические нагрузки по необходимому (3) и достаточному (4) критериям существенно различаются, появляется зависимость параметра типа КИНа в достаточном критерии от длины трещины (см. (10)).

Большие трудности возникают при описании разрушения тел с остроугольными вырезами [14, 15]. Если следовать классической механике разрушения, то критический КИН зависит от угла раствора выреза [15]. Вероятно, имеет смысл отказаться от некоторых положений классической механики разрушения. Следует отметить, что классический КИН, безусловно, является удобной аппроксимацией, когда речь идет о сингулярных составляющих решений классических линейных уравнений механики деформируемого твердого тела.

**4. О принципах построения многопараметрических критериев.** Наметим путь построения многопараметрических критериев, основываясь на модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [4, 5]. Рассмотрим композитный материал, в котором материалы матрицы и армирующих (возможно, высокопрочных) волокон обладают пластичностью. Допустим, что  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмма композита после аппроксимации может быть представлена в виде

$$\sigma = E\varepsilon \text{ при } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \sigma = \sigma_{m1} \text{ при } \varepsilon_0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1, \quad \sigma = \sigma_{m2} \text{ при } \varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_2. \quad (11)$$

Здесь  $\sigma_{m1} \neq \sigma_{m2}$  ( $\sigma_{m1} = \text{const}$ ,  $\sigma_{m2} = \text{const}$ );  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ . Аппроксимация диаграммы  $\sigma-\varepsilon$  кроме модуля Юнга  $E$  зависит от четырех независимых параметров  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$ ,  $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0 - \varepsilon_2$ , характеризующих прочностные  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$  и деформационные  $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0 - \varepsilon_2$  свойства материала композита. Для изучаемого типа материала предположения модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [4, 5] сводятся к следующему ( $2l_0$  — исходная длина внутренней трещины): перед вершинами трещин образуются две зоны предразрушения ( $\Delta_1$  — длина зоны предразрушения материала матрицы,  $\Delta_2$  — длина зоны предразрушения материала армирующих волокон). Эти зоны следуют друг за другом, отсчет начинается от вершин фиктивной трещины:  $2l = 2l_0 + 2\Delta$ , общая длина зоны предразрушения в окрестности вершин фиктивной трещины  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ . Допустим, что для суммарного КИНа в вершине фиктивной трещины выполняется ограничение  $K_I > 0$ .

Достаточный дискретно-интегральный критерий можно сформулировать в виде ( $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$ ,  $a_{m1} > 0$ ,  $a_{m2} > 0$ ,  $l = l_0 + \Delta$ )

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_{m1}, \quad x \geq 0, \quad (12)$$

$$2v^* \leq a_{m1}, \quad -\Delta_1 \leq x \leq 0, \quad 2v^* \leq a_{m2}, \quad -\Delta_1 - \Delta_2 \leq x \leq -\Delta_1.$$

Здесь  $2v^*(-\Delta_1, 0) = a_{m1}$  — КРТ, при котором исчерпывается запас пластичности матрицы;  $2v^*(-\Delta_1 - \Delta_2, 0) = a_{m2}$  — КРТ, при котором обрывается ближайшее к центру трещины волокно; остальные обозначения те же, что в п. 2. При определении КРТ  $a_{m1}$  и  $a_{m2}$  используются величины  $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0 - \varepsilon_2$  из (11) и модели, описывающие поперечник соответствующих зон предразрушения.



Очевиден предельный переход от критерия (12) к критерию (4) при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  ( $a_{m1} = 0$ ). Предлагаемый критерий (12) — естественное обобщение критерия (4). Поскольку двухпараметрический критерий для бетона уже построен [16], предлагаемый четырехпараметрический критерий, вероятно, можно использовать при описании разрушения железобетона, когда стальная арматура работает за пределом упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнев В. М.** Необходимые и достаточные критерии разрушения композита с хрупким связующим. 1. Слабое армирование // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 152–160.
2. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
4. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
5. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
6. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.
7. **Морозов Н. Ф., Поникаров Н. В.** Математические модели в механике разрушения // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: К 60-летию со дня рождения проф. Г. И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 97–104.
8. **Morozov N., Pauksho M., Ponikarov N.** On the problem of equilibrium length of a bridged crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1997. V. 64, N 2. P. 427–430.
9. **Budiansky V., Evans A. G., Hutchinson J. W.** Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // Intern. J. Solids Struct. 1995. V. 32, N 3/4. P. 315–328.
10. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
11. **Петров Ю. В., Тарабан В. В.** Двухкритериальный анализ хрупкого разрушения образцов с малыми поверхностными повреждениями // Вестн. С.-Петербур. гос. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 1. С. 101–106.
12. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтяного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
13. **Ando K., Kim B. A., Iwasa M., Ogura N.** Process zone size failure criterion and probabilistic fracture assessment curver for ceramics // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 1992. V. 15, N 2. P. 139–149.
14. **Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н.** Применение критерия хрупкого разрушения В. В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 122–126.
15. **Корнев В. М.** Модификация критерия разрушения Нейбера — Новожилова для угловых вырезов (антиплоская задача) // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 153–159.
16. **Корнев В. М., Адищев В. В.** Достаточные критерии роста макротрещин нормального отрыва в среде регулярной структуры // Изв. вузов. Стр-во. 1999. № 12. С. 9–14.

*Поступила в редакцию 11/VII 2002 г.*