УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ АНТИПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

В рамках нелинейной модели исследована антиплоская деформация несжимаемого цилиндрического тела. Система уравнений сведена к нелинейному уравнению второго порядка для перемещения. Показано, что тип уравнения определяется потенциалом деформаций и может быть смешанным. Рассмотрен пример деформирования полого эллиптического цилиндра, для которого найдено перемещение типа винтовой дислокации и исследованы соответствующие напряжения и нагрузка.

Ключевые слова: антиплоская деформация, краевая задача, тип уравнения, нагрузка, преобразование Лежандра, нелинейность.

При решении ряда задач линейная теория, используемая для расчета напряженно-деформированного состояния тела, не обеспечивает требуемой точности и поэтому заменяется нелинейной теорией, позволяющей получить приемлемые результаты. Учет нелинейности существенно усложняет исследование. Однако оно несколько упрощается при рассмотрении частных видов деформирования, к числу которых относится антиплоская деформация.

Задача об антиплоской деформации имеет теоретическое и прикладное значение. Эта задача исследовалась в различных аспектах: в линейной и нелинейной постановках, в переменных исходного и актуального состояний, при использовании различных мер напряжений и деформаций [1–5].

В данной работе задача об антиплоской деформации рассматривается в нелинейной постановке в актуальных переменных с учетом действия потенциальных сил, геометрической и физической нелинейностей с использованием симметричного тензора напряжений Коши P_{kl} и симметричного тензора деформаций Альманси E_{kl}. В настоящей работе используется также потенциал деформаций U, моделирующий как упругое, так и пластическое поведение тела.

В качестве исходного примем допущение, что тело представляет собой несжимаемый изотропный цилиндр с заданными актуальной формой и потенциалом, а его деформация является антиплоской (перемещение u_k имеет только продольную составляющую, не меняющуюся вдоль тела), объемные силы f_k будем полагать потенциальными с энергией V, сохраняющейся вдоль тела; граничные условия будем считать заданными в перемещениях u_k^0 на боковой поверхности цилиндра S^0 и продольной составляющей результирующей нагрузки P_3 на его торцах $S^\pm$. В актуальных переменных x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные координаты, x_3 — продольная координата) эти допущения имеют вид

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = u(x, y); \tag{1}$$

$$f_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad f_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad f_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad V = V(x, y); \tag{2}$$

$$u(x, y) = u^0 \quad \text{на} \quad S^0; \tag{3}$$

$$P_3 = \int\limits_S p_3 \, dS \quad \text{на} \quad S^{\pm}, \tag{4}$$

где S — сечение цилиндра; p_3 — торцевая нагрузка; нижний индекс принимает значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исследуем антиплоскую деформацию тела в рамках нелинейной модели, включающей представления деформаций через перемещение, инвариантов деформаций E_k через компоненты деформаций, напряжений через потенциал деформаций и деформации, потенциала через инварианты деформаций и уравнения несжимаемости и равновесия [6]:

$$\begin{gathered} 2E_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}, \\ E_1 = E_{nn}, \qquad 2E_2 = E_{nn}E_{mm} - E_{nm}E_{mn}, \qquad E_3 = \det(E_{kl}), \\ P_{kl} = -q_0\delta_{kl} + (\delta_{km} - 2E_{km}) \frac{\partial U}{\partial E_{lm}}, \qquad U = U(E_1, E_2, E_3), \\ E_1 - 2E_2 + 4E_3 = 0, \qquad f_k + \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь δ_{kl} — символ Кронекера; q_0 — лагранжев множитель; f_k — плотность объемной силы. Среди входящих в (5) величин сила и потенциал задаются, а остальные подлежат определению. При исходных допущениях (1), (2) соотношения модели упрощаются и могут быть сведены к уравнениям для давления и перемещения.

Компоненты деформации выражаются через перемещение нелинейными соотношениями (геометрическая нелинейность) и являются функциями поперечных координат:

$$\begin{gathered} 2E_{11} = -\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2, \qquad 2E_{22} = -\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2, \qquad 2E_{33} = 0, \\ 2E_{12} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad 2E_{31} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 2E_{32} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad E_{kl} = E_{kl}(x, y). \end{gathered} \tag{6}$$

Линейными соотношениями с перемещением связаны только сдвиговые деформации E_{31}, E_{32}.

Базисные инварианты деформации: линейный E_1 (обозначаемый далее через E), квадратичный E_2 и кубичный E_3 — выражаются через перемещение формулами

$$E_1 = E = -\frac{1}{2}\,(u_x^2 + u_y^2), \qquad E_2 = -\frac{1}{4}\,(u_x^2 + u_y^2), \qquad E_3 = 0$$

(нижний индекс у перемещения обозначает производную по соответствующей декартовой координате). Таким образом, инварианты не положительны, не зависят от продольной координаты, представляются через линейный инвариант и удовлетворяют уравнению несжимаемости:

$$E_k \leqslant 0, \qquad E_k = E_k(x, y), \qquad E_k = E_k(E), \qquad E_1 - 2E_2 + 4E_3 = 0. \tag{7}$$

Для изотропного тела потенциал деформаций является функцией ее базисных инвариантов. В рассматриваемом случае в силу свойств инвариантов (7) потенциал зависит только от линейного инварианта, а его градиент по деформациям является шаровым тензором:

$$U(E_1, E_2, E_3) = U(E), \qquad E = E_1 = E_{lm}\delta_{ml}; \tag{8}$$
$$\frac{\partial E}{\partial E_{lm}} = \delta_{ml}, \qquad \frac{\partial U}{\partial E_{lm}} = U'(E)\delta_{ml}, \qquad U'(E) = \frac{dU}{dE} \neq 0.$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу.

В несжимаемом теле напряжения Коши и деформации Альманси связаны модифицированным законом Мурнагана, в котором напряжения представляются в виде квазилинейных функций деформаций (физическая нелинейность):

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'(E)E_{kl}, \qquad q = q_0 - U'(E) \tag{9}$$

(q — гидростатическое давление). В предположении о постоянстве лагранжева множителя $q_0(x, y)$ вдоль тела с учетом свойств деформаций из (9) следует, что при антиплоском деформировании давление и напряжения подобно перемещению являются функциями поперечных координат: $q = q(x, y)$, $P_{kl} = P_{kl}(x, y)$.

Следствием формул (6), (9) является представление напряжений через давление и перемещение:

$$P_{11} = -q + U'(E)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2, \qquad P_{22} = -q + U'(E)\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2, \qquad P_{33} = -q,$$
$$P_{12} = U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad P_{31} = -U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial x}, \quad P_{32} = -U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad E = -\frac{1}{2}\,(u_x^2 + u_y^2). \tag{10}$$

Если потенциальные силы (2) и напряжения (10) не зависят от продольной координаты, то уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial\,(P_{11} - V)}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\,(P_{22} - V)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для напряжений (10), получаем уравнения для определения давления и перемещения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[-q - V + U'(E)\,\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[-q - V + U'(E)\,\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial x}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big] = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big] = 0. \tag{12}$$

Эти уравнения вместе с условиями (3), (4) на поверхности тела составляют краевую задачу для определения давления и смещения, которую можно разбить на две более простые: задачу (11), (4) для определения давления и задачу (12), (3) для нахождения перемещения. Действительно, в силу уравнения (12) и выражения для инварианта (10) имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[U'\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big] = U'\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[U'\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial x}\Big[U'\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big] = U'\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

с помощью которых уравнения (11) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(q+V+U)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(q+V+U)=0.$$

Записывая эти уравнения в форме

$$d(q+V+U)=\frac{\partial}{\partial x}(q+V+U)\,dx+\frac{\partial}{\partial y}(q+V+U)\,dy=0$$

и интегрируя, получаем представление давления через силовой и деформационный потенциалы с точностью до аддитивной постоянной:

$$q=k-V-U, \qquad k=\mathrm{const}. \tag{13}$$

Постоянная k определяется условием (4). Заметим, что на торцах цилиндра компоненты нормалей и нагрузок имеют значения

$$n_k^{\pm}=(0,0,\pm1), \qquad p_k^{+}=-p_k^{-}=p_k, \qquad P_k^{+}=P_k^{-}=P_k$$

(знак "+" соответствует торцу S^+, знак "−" — торцу S^-), поэтому условия (4)

$$P_3^{+}=\int\limits_S p_3^{+}\,dS, \qquad P_3^{-}=\int\limits_S p_3^{-}\,dS$$

с учетом выражений для напряжений (10) и формул $p_3^{\pm}=P_{3k}n_k^{\pm}$ сводятся к условию для давления

$$P_3=\int\limits_S p_3\,dS=\int\limits_S P_{33}\,dS=-\int\limits_S q\,dS,$$

из которого в силу (13) следует, что постоянная интегрирования определяется через торцевую нагрузку по формуле

$$k=\frac{1}{S}\Big[\int\limits_S (V+U)\,dS-P_3\Big]. \tag{14}$$

В частности, в отсутствие продольной составляющей результирующей торцевой нагрузки эта постоянная равна среднему значению суммы силового и деформационного потенциалов в сечении тела:

$$k=\frac{1}{S}\int\limits_S (V+U)\,dS \quad \text{при} \quad P_3=0.$$

В этом случае давление (13) равно отклонению значения суммы потенциалов от среднего значения. Заметим, что для вычисления постоянной (14) потенциал деформаций, как и энергия сил, должен быть определен в зависимости от координат. Определив перемещение и инвариант, эту зависимость можно представить в виде $U(x,y)=U(E(x,y))$.

Вторая краевая задача — задача для перемещения — включает уравнение (12) и краевое условие (3):

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[U'(E)\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big]=0, \qquad E=-\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big], \qquad u\big|_L=u^0$$

(L — контур сечения S тела). Для исследования типа полученного уравнения представим его в развернутом виде:

$$U'\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+\frac{\partial U'}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U'}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Используя выражения для производных от величины U' по координатам

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = U''\,\frac{\partial E}{\partial x} = -U''\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\Big),$$

$$\frac{\partial U'}{\partial y} = U''\,\frac{\partial E}{\partial y} = -U''\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big),$$

получаем уравнение для перемещения в окончательном виде

$$\begin{gathered}\Big[1 - G\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2G\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \Big[1 - G\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\\ G(E) = \frac{U''(E)}{U'(E)}, \qquad E = -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big].\end{gathered} \tag{15}$$

В уравнении (15), выполняющемся в сечении тела, свойства тела характеризуются величиной G, определяемой потенциалом деформаций.

Согласно [7] уравнению (15) соответствует характеристический определитель B, который является квадратичным полиномом переменных k, l и может быть представлен в виде

$$B = \Big[1 - G\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]k^2 - 2G\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,kl + \Big[1 - G\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]l^2 = k^2 + l^2 - G\Big(k\,\frac{\partial u}{\partial x} + l\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2.$$

Таким образом, если вторая производная упругого потенциала имеет знак, противоположный знаку первой производной, или равна нулю, то величина G не положительна:

$$G(E) = U''(E)/U'(E) \leqslant 0, \tag{16}$$

а определитель B отличен от нуля. В этом случае характеристическое уравнение $B = 0$ не имеет вещественных характеристик и, следовательно, (15) является уравнением эллиптического типа, описывающим упругие деформации. Если условие (16) нарушено:

$$G(E) = U''(E)/U'(E) > 0 \tag{17}$$

и уравнение $B = 0$ имеет два семейства вещественных характеристик, то (15) является уравнением гиперболического типа, определяющим пластические деформации. Таким образом, тип уравнения для перемещения определяется видом потенциала деформаций. С этой точки зрения условия (16), (17) можно рассматривать в качестве условий соответственно упругого и пластического антиплоского деформирования.

Потенциал деформаций может моделировать в сечении тела не только какой-либо один вид деформирования (упругий или пластический), но и оба вида (в различных частях сечения) в зависимости от величины деформации. В частности, для линейного потенциала, соответствующего физической линейности, во всем сечении выполнено условие эллиптичности (16)

$$U = c - bE \qquad (b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$
$$U' = -b, \qquad U'' = 0, \qquad G = 0.$$

В этом случае (15) является линейным уравнением для упругих перемещений.

Условие эллиптичности (16) выполняется также во всем сечении для квадратичного потенциала, обобщающего линейный потенциал:

$$U = c - bE + aE^2 \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$
$$U' = 2aE - b, \qquad U'' = 2a, \qquad G = 2a/(2aE - b) < 0.$$

При этом (15) является нелинейным уравнением для упругих перемещений.

Для потенциала, изменяющегося по закону радикала, во всем сечении выполнено условие гиперболичности (17):

$$U = c + b(1 - aE)^{1/2} \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$

$$U' = -\frac{ab}{2}\,(1 - aE)^{-1/2}, \qquad U'' = -\frac{a^2b}{4}\,(1 - aE)^{-3/2}, \qquad G = \frac{a}{2}\,(1 - aE)^{-1} > 0.$$

Для этого потенциала (15) является нелинейным уравнением для пластических смещений.

Гиперболический тип уравнения (15) во всем сечении обеспечивает также потенциал, изменяющийся по экспоненциальному закону:

$$U = c + b\,\mathrm{e}^{aE} \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$

$$U' = ab\,\mathrm{e}^{aE}, \qquad U'' = a^2b\,\mathrm{e}^{aE}, \qquad G = a > 0,$$

для которого это уравнение определяет пластические смещения.

Наконец, для логарифмического потенциала при ограниченных деформациях в одной части сечения выполняется условие эллиптичности, а при больших деформациях в другой части сечения — условие гиперболичности:

$$U = c + b\ln(1 + aE^2) \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$

$$U' = \frac{2abE}{1 + aE^2}, \qquad U'' = 2ab\,\frac{1 - aE^2}{(1 + aE^2)^2}, \qquad G = \frac{1 - aE^2}{E(1 + aE^2)}, \tag{18}$$

$$G \leqslant 0 \quad \text{при} \quad |E| \leqslant 1/\sqrt{a}, \qquad G > 0 \quad \text{при} \quad |E| > 1/\sqrt{a}.$$

В этом случае при переходе от областей с ограниченным инвариантом к областям, где инвариант большой, величина G меняет знак с отрицательного на положительный, что приводит к смене типа уравнения с эллиптического на гиперболический. Смена типа уравнения происходит при значении инварианта $|E| = 1/\sqrt{a}$ и соответствует переходу тела из упругого состояния в пластическое. Заметим, что при этом критическом значении инварианта и сам потенциал, и его производные имеют определенные конечные значения, а величина G обращается в нуль:

$$U = c + b\ln 2, \qquad U' = b\sqrt{a}, \qquad U'' = 0, \qquad G = 0 \qquad \text{при} \quad |E| = 1/\sqrt{a}.$$

Экспоненциальный потенциал с отрицательным показателем ведет себя подобно логарифмическому потенциалу:

$$U = c + b\,\mathrm{e}^{-aE^2} \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0),$$

$$U' = -2abE\,\mathrm{e}^{-aE^2}, \qquad U'' = -2ab(1 - 2aE^2)\,\mathrm{e}^{-aE^2}, \qquad G = (1 - 2aE^2)/E,$$

$$G < 0 \quad \text{при} \quad |E| \leqslant 1/\sqrt{2a}, \qquad G > 0 \quad \text{при} \quad |E| > 1/\sqrt{2a}.$$

Иными словами, в областях с ограниченным инвариантом деформаций потенциал обеспечивает эллиптический тип уравнения для перемещений, а в областях с большим инвариантом — гиперболический тип.

Уравнение (15) для перемещения $u(x, y)$ является нелинейным. Путем преобразования независимых переменных и искомой функции его можно привести к линейному уравнению с потенциалом деформаций произвольного вида. Применим преобразование Лежандра [8], т. е. введем новые независимые переменные s, t и новую неизвестную функцию $w(s, t)$:

$$s = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad t = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad w = xs + yt - u, \tag{19}$$

полагая при этом, что якобиан преобразования (гессиан функции $u(x,y)$) отличен от нуля:

$$J = \frac{\partial\,(s,t)}{\partial\,(x,y)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 \neq 0. \tag{20}$$

Преобразование (19) соответствует переходу от физической плоскости (x,y) к плоскости годографа градиента смещения (u_x, u_y). Поскольку $2E_{31} = u_x$, $2E_{32} = u_y$ (см. (6)), эта плоскость совпадает с плоскостью удвоенных сдвиговых деформаций. Для того чтобы было применимо преобразование (19) для упрощения уравнения второго порядка (15), наряду с представлением первых производных перемещения требуются выражения для его вторых производных в новых переменных. С целью получения этих выражений, дифференцируя третью формулу (19) по s и t, найдем формулы обратного к (19) преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= x + s\,\frac{\partial x}{\partial s} + t\,\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} = x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} = x,\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= y + t\,\frac{\partial y}{\partial t} + s\,\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} = y + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} = y. \end{aligned} \tag{21}$$

Затем, дифференцируя формулы (21) по x и y, получим две системы уравнений для величин s_x, t_x и s_y, t_y:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\,\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \qquad &\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\frac{\partial t}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\,\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad &\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\frac{\partial t}{\partial y} = 1. \end{aligned}$$

С учетом (20), (21) из этих уравнений в силу отличия от нуля гессиана w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\Big)^2 = \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(s,t)} = J^{-1} \neq 0 \tag{22}$$

следуют формулы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial s}{\partial x} = J\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = -J\,\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial t}{\partial y} = J\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \tag{23}$$

Подставляя производные (19), (23) в уравнение (15), для функции $w(s,t)$ получаем искомое линейное уравнение второго порядка

$$(1 - Gs^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2Gst\,\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t} + (1 - Gt^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0, \tag{24}$$

где $G(E) = U''(E)/U'(E)$; $E = -(s^2 + t^2)/2$.

Для решения $w(s,t)$ уравнения (24), имеющего отличный от нуля гессиан (22), формулы обратного преобразования

$$x = \frac{\partial w(s,t)}{\partial s}, \qquad y = \frac{\partial w(s,t)}{\partial t}, \qquad u = sx(s,t) + ty(s,t) - w(s,t) \tag{25}$$

определяют в параметрической форме перемещение в физической плоскости.

Линейное уравнение (24) имеет более простой вид, если в плоскости сдвиговых деформаций перейти от декартовых координат s, t к полярным координатам h, f:

$$h = \sqrt{s^2 + t^2}, \qquad \operatorname{tg} f = t/s.$$

Тогда, используя выражения для производных

$$h_s = \frac{s}{h}, \qquad h_t = \frac{t}{h}, \qquad f_s = -\frac{t}{h^2}, \qquad f_t = \frac{s}{h^2},$$

$$h_{ss} = \frac{1}{h} - \frac{s^2}{h^3}, \qquad h_{st} = -\frac{st}{h^3}, \qquad h_{tt} = \frac{1}{h} - \frac{t^2}{h^3},$$

$$f_{ss} = \frac{2st}{h^4}, \qquad f_{st} = -\frac{1}{h^2} + \frac{2t^2}{h^4}, \qquad f_{tt} = -\frac{2st}{h^4}$$

и равенства

$$w_s = w_h h_s + w_f f_s, \qquad w_t = w_h h_t + w_f f_t,$$

$$w_{ss} = w_{hh} h_s^2 + 2w_{hf} h_s f_s + w_{ff} f_s^2 + w_h h_{ss} + w_f f_{ss},$$

$$w_{tt} = w_{hh} h_t^2 + 2w_{hf} h_t f_t + w_{ff} f_t^2 + w_h h_{tt} + w_f f_{tt},$$

$$w_{st} = w_{hh} h_s h_t + w_{hf}(h_s f_t + h_t f_s) + w_{ff} f_s f_t + w_h h_{st} + w_f f_{st},$$

уравнение (24) можно представить в более простом виде

$$h^2 g(h^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial h^2} + h\,\frac{\partial w}{\partial h} + \frac{\partial^2 w}{\partial f^2} = 0, \qquad (26)$$

где

$$g(h^2) = (1 - h^2 G(h^2))^{-1}, \qquad G(h^2) = U''(E)/U'(E), \qquad E = -h^2/2. \qquad (27)$$

При этом тип уравнения определяется величиной $h^2G(h^2)$. В (26) условие $h^2G(h^2) < 1$ обеспечивает эллиптический тип уравнения, а условие $h^2G(h^2) > 1$ — гиперболический тип. Границей между областями с различными типами уравнения является линия $h^2G(h^2) = 1$.

Решение $w(h,f)$ уравнения (26) определяет перемещение $u(x,y)$ в физической плоскости в параметрической форме формулами (25). Перейдем к полярным координатам h, f в плоскости сдвиговых деформаций:

$$x = \frac{\partial w}{\partial h}\cos f - \frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial f}\sin f, \qquad y = \frac{\partial w}{\partial h}\sin f + \frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial f}\cos f, \qquad u = h\,\frac{\partial w}{\partial h} - w, \qquad (28)$$

при этом якобиан отличен от нуля:

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(h,f)} \ne 0.$$

В случае потенциала деформаций общего вида линейное уравнение (26) допускает решения с разделяющимися переменными. Если перемещение представить в виде произведения двух функций одной переменной: $w(h,f) = H(h)F(f)$, то согласно (26) перемножаемые функции должны определяться уравнениями

$$h^2 g(h^2)\,\frac{d^2H}{dh^2} + h\,\frac{dH}{dh} - mH = 0, \qquad \frac{d^2F}{df^2} + mF = 0, \qquad m = \mathrm{const}, \qquad (29)$$

где m — константа разделения переменных; величина g определена в (27).

Для определения решений уравнений (29) требуется конкретизация потенциала деформаций. Используя логарифмический потенциал (18), согласно (27) получаем

$$E = -\frac{h^2}{2}, \qquad G = -\frac{2}{h^2}\,\frac{4 - ah^4}{4 + ah^4}, \qquad g = \frac{1}{1 - h^2G} = \frac{4 + ah^4}{12 - ah^4}.$$

Тогда первое уравнение в (29) принимает вид

$$h^2(4 + ah^4)\,\frac{d^2H}{dh^2} + (12 - ah^2)\Big(h\,\frac{dH}{dh} - mH\Big) = 0. \qquad (30)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенной функции. Подставляя в (30) величины

$$H = h^k, \qquad H_h = kh^{k-1}, \qquad H_{hh} = k(k-1)h^{k-2}, \qquad k = \text{const} \tag{31}$$

и упрощая полученное равенство, имеем уравнение

$$k(k-1)(4 + ah^4) + (12 - ah^4)(k - m) = 0,$$

которое будет удовлетворено при равенстве нулю свободного члена и коэффициента при переменной h^4:

$$k^2 + 2k - 3m = 0, \qquad k^2 - 2k + m = 0.$$

Разрешая данные уравнения относительно m, получаем решения

$$3m = k(k+2), \qquad 3m = k(6 - 3k). \tag{32}$$

Исключив из этих решений m, для k имеем квадратное уравнение с вещественными решениями

$$k(k-1) = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_2 = 1.$$

Согласно (32), (31) решению $k_1 = 0$ соответствуют величины $m_1 = 0$, $H_1 = 1$. При этом в соответствии с (29) функция F_1 должна удовлетворять уравнению $F_{ff} = 0$, имеющему линейное решение $F_1 = A + Bf$. В данном случае решением исходного уравнения (26) является перемещение

$$w_1 = H_1 F_1 = A + Bf, \qquad A = \text{const}, \qquad B = \text{const}\,. \tag{33}$$

Согласно (32), (31) решению $k_2 = 1$ соответствуют величины $m_2 = 1$, $H_2 = h$. В этом случае в соответствии с (29) функция F_2 должна удовлетворять уравнению $F_{ff} + F = 0$, имеющему периодическое решение $F_2 = A\sin(f + B)$. Таким образом, решением уравнения (26) является перемещение

$$w_2 = H_2 F_2 = hA\sin(f + B), \qquad A = \text{const}, \qquad B = \text{const}\,.$$

Исследуем решение (33), полагая $c = 0$, $V = 0$, $P_3 = 0$. В силу соотношений

$$w(h, f) = A + Bf, \qquad w_h = 0, \qquad w_f = B$$

в физической плоскости этому решению соответствует перемещение, определяемое в параметрической форме согласно (28):

$$x = -(B/h)\sin f, \qquad y = (B/h)\cos f, \qquad u(h, f) = -(A + Bf).$$

Разрешая систему первых двух равенств относительно h, f и подставляя полученный результат в третье равенство, находим явную зависимость перемещения от декартовых координат (или от полярных координат r, v: $x = r\cos v$, $y = r\sin v$)

$$\begin{gathered} h = B(x^2 + y^2)^{-1/2}, \qquad f = -\operatorname{arctg}(x/y), \qquad u(x, y) = -A + B\operatorname{arctg}(x/y), \\ h = B/r, \qquad f = v - \pi/2, \qquad u(r, v) = -A + B(\pi/2 - v). \end{gathered} \tag{34}$$

Таким образом, перемещение является линейной функцией полярного угла и имеет определенное конечное значение во всех точках плоскости, за исключением начала координат и бесконечно удаленной точки, в которых полярный угол становится неопределенным.

При обходе по плоскому круговому контуру $r = \text{const}$ вокруг оси z перемещение получает приращение, не зависящее от радиуса: $u(v + 2\pi) - u(v) = -2\pi B$, т. е. имеет разрыв. Данное поле перемещений определяет винтовую дислокацию [1].

С учетом выражений для градиентов перемещения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{By}{x^2+y^2} = \frac{B}{r}\sin v, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Bx}{x^2+y^2} = -\frac{B}{r}\cos v$$

инвариант и потенциал деформации, производные потенциала по инварианту, а также величина, определяющая тип уравнения, в полярных координатах принимают значения

$$E = -\frac{B^2}{2r^2}, \qquad U = b\ln\Big(1+\frac{aB^4}{4r^4}\Big), \qquad U' = -\frac{4abB^2r^2}{aB^4+4r^4},$$
$$U'' = 8abr^4\,\frac{4r^4-aB^4}{(4r^4+aB^4)^2}, \qquad h^2G = 2\,\frac{aB^4-4r^4}{aB^4+4r^4}.$$

Согласно условию $h^2G = 1$ из последней формулы следует, что рассматриваемому логарифмическому потенциалу в физической плоскости соответствует круг с центром в начале координат и радиусом $r_0 = B(a/12)^{1/4}$, внешность которого ($r > r_0$) является областью эллиптичности, а внутренность ($r < r_0$) — областью гиперболичности уравнения для перемещения. В выражении для r_0 параметр a учитывает влияние свойств материала, а постоянная B — влияние краевых условий.

Перемещению (34) соответствуют давление (13) и напряжения (10):

$$q = k - b\ln(1 + aB^4/(4r^4)),$$
$$P_{11} = -q - R_0\sin^2 v, \qquad P_{22} = -q - R_0\cos^2 v, \qquad P_{33} = -q, \tag{35}$$
$$P_{12} = R_0\sin v\cos v, \qquad P_{31} = R_0\,\frac{r}{B}\sin v, \qquad P_{32} = -R_0\,\frac{r}{B}\cos v, \qquad R_0 = \frac{4abB^4}{aB^4+4r^4}.$$

Следовательно, при неограниченном удалении от начала координат давление и напряжения остаются ограниченными, а по мере приближения к нему величины q, P_{11}, P_{22}, P_{33} неограниченно возрастают, P_{12} остается ограниченной, а P_{31}, P_{32} стремятся к нулю.

Рассмотрим задачу о деформировании полого эллиптического цилиндра, в котором перемещение и напряжения имеют определенные конечные значения. В этом случае сечением цилиндра является эллиптическое кольцо с внешним и внутренним эллипсами L, L', имеющими соответственно полуоси l_1, l_2 ($l_2 < l_1$) и l_1', l_2' ($l_2' < l_1'$), причем $l_1' < l_2$, и оси симметрии, совпадающие с осями декартовой системы координат. Уравнения соответствующих эллипсов в декартовых и полярных координатах имеют вид

$$l_2^2x^2 + l_1^2y^2 = l_1^2l_2^2, \qquad l_2'^2x^2 + l_1'^2y^2 = l_1'^2l_2'^2,$$
$$r^2 = \frac{l_1^2l_2^2}{l_2^2\cos^2 v + l_1^2\sin^2 v}, \qquad r^2 = \frac{l_1'^2l_2'^2}{l_2'^2\cos^2 v + l_1'^2\sin^2 v}. \tag{36}$$

В точках граничных эллипсов, соответствующих одному и тому же полярному углу, согласно (34) перемещения имеют одинаковые значения. Определим соответствующую этим значениям боковую нагрузку.

В декартовых координатах компоненты внешних по отношению к цилиндру нормалей n_k, n_k' с учетом выражений для производных $y_x = -l_2^2x/(l_1^2y)$, $y_x' = -l_2'^2x/(l_1'^2y)$ имеют значения

$$n_1 = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-l_2^2x}{s}, \quad n_2 = \frac{-dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-l_1^2y}{s}, \quad n_3 = 0, \quad s = \sqrt{l_2^4x^2 + l_1^4y^2},$$
$$n_1' = \frac{l_2'^2x}{s'}, \qquad n_2' = \frac{l_1'^2y}{s'}, \qquad n_3' = 0, \qquad s' = \sqrt{l_2'^4x^2 + l_1'^4y^2}.$$

В полярных координатах эти компоненты соответственно равны

$$n_1 = -\frac{l_2^2 \cos v}{d}, \qquad n_2 = -\frac{l_1^2 \sin v}{d}, \qquad n_3 = 0, \qquad d = \sqrt{l_1^4 \sin^2 v + l_2^4 \cos^2 v}\,,$$

$$n_1' = \frac{l_2'^2 \cos v}{d'}, \qquad n_2' = \frac{l_1'^2 \sin v}{d'}, \qquad n_3' = 0, \qquad d' = \sqrt{l_1'^4 \sin^2 v + l_2'^4 \cos^2 v}\,.$$

С учетом этих формул можно сделать вывод, что на внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндра боковая нагрузка имеет компоненты $p_k^n = P_{km} n_m$, $p_k^{n'} = P'_{km} n'_m$, т. е.

$$p_1^n = \frac{\cos v}{d}\,(q l_2^2 - R \sin^2 v), \qquad p_2^n = \frac{\sin v}{d}\,(q l_1^2 + R \cos^2 v), \qquad p_3^n = R\,\frac{r \sin v \cos v}{Bd},$$

$$p_1^{n'} = -\frac{\cos v}{d'}\,(q' l_2'^2 - R' \sin^2 v), \quad p_2^{n'} = -\frac{\sin v}{d'}\,(q' l_1'^2 + R' \cos^2 v), \quad p_3^{n'} = -R'\,\frac{r \sin v \cos v}{Bd'},$$

$$q = k - b \ln(1 + aB^4/(4r^4)), \qquad q' = k - b \ln(1 + aB^4/(4r'^4)),$$

$$R = \frac{4abB^4}{aB^4 + 4r^4}\,(l_1^2 - l_2^2), \qquad R' = \frac{4abB^4}{aB^4 + 4r'^4}\,(l_1'^2 - l_2'^2).$$

Боковую нагрузку целесообразно представить в базисе естественных осей контуров сечения L и L': касательной, главной нормали и бинормали, компоненты ортов которых представляются через компоненты внешней нормали боковой поверхности:

$$t_k = (-n_2, n_1, 0), \qquad -n_k = (-n_1, -n_2, 0), \qquad b_k = (0, 0, 1),$$

$$t_k' = (-n_2', n_1', 0), \qquad -n_k' = (-n_1', -n_2', 0), \qquad b_k' = (0, 0, 1).$$

Естественные касательная, нормальная и бинормальная компоненты нагрузки определяют усилия кручения, сжатия и сдвига на внешнем и внутреннем контурах соответственно в виде

$$\begin{gathered}
p_t = p_k t_k = -\frac{R}{d^2}\,\sin v \cos v\,(l_1^2 \sin^2 v + l_2^2 \cos^2 v),\\
p_{-n} = p_k(-n_k) = q + R\,\frac{l_1^2 - l_2^2}{d^2}\,\sin^2 v \cos^2 v, \qquad p_b = p_k b_k = R\,\frac{r}{Bd}\,\sin v \cos v,\\
p_{t'} = p_k t_k' = -\frac{R'}{d'^2}\,\sin v \cos v\,(l_1'^2 \sin^2 v + l_2'^2 \cos^2 v),\\
p_{-n'} = p_k'(-n_k') = q' + R'\,\frac{l_1'^2 - l_2'^2}{d'^2}\,\sin^2 v \cos^2 v, \qquad p_{b'} = p_k' b_k' = -R'\,\frac{r'}{Bd'}\,\sin v \cos v.
\end{gathered} \tag{37}$$

Таким образом, полю перемещений (33) соответствует боковая нагрузка общего вида, подвергающая тело кручению, сжатию и сдвигу.

В частности, в случае, когда эллиптическое кольцо вырождается в круговое: $l_1 = l_2 = l$, $l_1' = l_2' = l'$, получаем $d = l^2$, $d' = l'^2$, $R = 0$, $R' = 0$, при этом естественные компоненты нагрузки (37) принимают значения

$$p_t = 0, \qquad p_{-n} = q = k - b \ln(1 + aB^4/(4l^4)), \qquad p_b = 0,$$

$$P_{t'} = 0, \qquad p_{-n'} = q' = k - b \ln(1 + aB^4/(4l'^4)), \qquad p_{b'} = 0,$$

т. е. для кругового кольца боковая нагрузка является нагрузкой сжатия.

В другом частном случае, когда внутренний эллиптический контур L' вырождается в прямолинейный разрез, для точек разреза имеем

$$l_1' = l', \qquad l_2' = 0, \qquad r'^2 = x^2, \qquad R' = 4abB^4 l'^2/(aB^4 + 4x^4), \qquad v = 0, \pi,$$

при этом естественные компоненты боковой нагрузки (37) принимают вид

$$p_{t'} = 0, \qquad p_{-n'} = q' + \frac{4abB^4}{aB^4 + 4x^4}, \qquad p_{b'} = -\frac{4abB^3x}{aB^4 + 4x^4}, \qquad q' = k - b\ln\Big(1 + \frac{aB^4}{4x^4}\Big),$$

т. е. контур разреза подвержен сжатию и сдвигу. В этом случае в середине разреза ($x = 0$) сдвиг, как и кручение, отсутствует, а сжатие неограниченно велико. На концах разреза ($x = \pm l'$) нагрузка конечна и определяется формулами

$$p_{t'} = 0, \qquad p_{-n'} = k - b\ln\Big(1 + \frac{aB^4}{4l'^4}\Big) + \frac{4abB^4}{aB^4 + 4l'^4}, \qquad p_{b'} = \mp\frac{4abB^3l'}{aB^4 + 4l'^4}.$$

Соотношения радиуса окружности, при переходе через которую изменяется тип уравнения в смещениях, и полуосей граничных эллипсов могут быть различными. При $r_0 < l'_2$ эллиптическое кольцо находится в зоне эллиптичности, при $r_0 > l_1$ — в зоне гиперболичности, при $l_2 < r_0 < l_1$ части кольца, примыкающие к оси абсцисс, где $r > r_0$, расположены в зоне эллиптичности, а другие части, примыкающие к оси ординат, где $r < r_0$, — в зоне гиперболичности.

Полярные углы точек, в которых изменяется тип уравнения, на внешнем контуре L определяются с учетом уравнения контура (36) из условия $r_0^2 = r^2$, представленного в форме $r_0^2(l_2^2 + l_1^2 \operatorname{tg}^2 v) = l_1^2 l_2^2(1 + \operatorname{tg}^2 v)$:

$$\operatorname{tg}^2 v = \frac{l_2^2}{l_1^2}\,\frac{l_1^2 - r_0^2}{r_0^2 - l_2^2}. \tag{38}$$

Из (38) следует, что области эллиптичности и гиперболичности на контуре чередуются. Внутренний контур кольца полностью находится в области гиперболичности. На окружности $r = r_0$, разделяющей упругую и пластическую области эллиптического кольца, согласно (35) давление постоянно, а компоненты напряжений в зависимости от полярного угла изменяются по периодическим законам

$$q = k - 2b\ln 2,$$

$$P_{11} = -q - 3b\sin^2 v, \qquad P_{22} = -q - 3b\cos^2 v, \qquad P_{33} = -q,$$

$$P_{12} = 3b\sin v\cos v, \qquad P_{31} = 3b(a/12)^{1/4}\sin v, \qquad P_{32} = -3b(a/12)^{1/4}\cos v.$$

Аналогично могут быть определены точки, в которых изменяется тип уравнения, на внутреннем контуре.

В зависимости от нагрузки контуры эллиптического кольца могут находиться в различных напряженных состояниях. Для определения этих состояний выберем, например, на внутреннем контуре L' в какой-либо точке ортогональную контуру площадку с нормалью t'_k. Нормальное напряжение $P_{t't'}$ на этой площадке равно

$$P_{t't'} = P'_{kl}t'_kt'_l = -q' - \frac{4abB^4}{aB^4 + 4r'^4}\,\frac{(l_1'^2\sin^2 v + l_2'^2\cos^2 v)^2}{l_1'^4\sin^2 v + l_2'^4\cos^2 v}, \qquad q' = k - b\ln\Big(1 + \frac{aB^4}{4r'^4}\Big).$$

В точках, где $P_{t't'} > 0$, контур растянут, в точках, где $P_{t't'} < 0$, сжат, а в точках, где $P_{t't'} = 0$, нейтрален. В случае если внутренний контур вырождается в разрез, имеем

$$P_{t't'} = -q' = b\ln(1 + aB^4/(4x^4)) - k.$$

При этом нормальное напряжение в точках контура, включая концы разреза, имеет конечные значения. Исключением является середина разреза, где это напряжение, как и приложенная нагрузка, неограниченно велико. На концах разреза ($x = \pm l'$) нормальное напряжение имеет значение $b\ln\left(1 + aB^4/(4l'^4)\right) - k$, определяемое константами материала и параметром разреза.

Наконец, в частном случае, когда полуоси внешнего контура неограниченно увеличиваются, а малая полуось внутреннего контура неограниченно уменьшается, эллиптическое кольцо вырождается в плоскость с прямолинейным разрезом, в которой напряжения на бесконечности ограничены, а нагрузка на разрезе та же, что и в предыдущем случае.

Напряженное состояние контура разреза при антиплоском деформировании плоскости с разрезом существенно отличается от состояния при плоской деформации. В случае плоской деформации в линейном упругом решении аналогичной задачи [9] нормальное напряжение неограниченно велико на концах разреза и конечно в его середине.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. **Литвинова З. Н.** О механизме разрушения нелинейно-упругого тела с трещиной при антиплоской деформации // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 6. С. 1344–1347.
4. **Knowles J. K.** On finite anti-plane shear for incompressible elastic materials // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1976. V. 19, pt 4. P. 400–415.
5. **Аннин Б. Д., Бондарь В. Д.** Антиплоская деформация нелинейно-упругого несжимаемого тела // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 93–101.
6. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
7. **Петровский Н. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
8. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1968.
9. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2.

Поступила в редакцию 29/VII 2013 г.