

УДК 536.46

# УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЛОСКИХ И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КАНАЛАХ

А. Н. Кудрявцев<sup>1,2</sup>, С. П. Борисов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск  
alex@itam.nsc.ru, borisov@itam.nsc.ru

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассматривается устойчивость детонационных волн (ДВ), распространяющихся в плоском или прямоугольном канале, по отношению к двумерным и трехмерным возмущениям. Приняв простую гипотезу о том, что наиболее неустойчивая мода линейной теории продолжает доминировать даже в нелинейном режиме, из линейной теории устойчивости можно получить ряд вполне определенных предсказаний о структуре развитой ДВ. В частности, теория предсказывает размер и количество детонационных ячеек, формирующихся в канале заданного размера; минимальный размер канала, в котором еще может существовать многофронтная структура ДВ; параметры, при которых скачком изменяется число ячеек. Все эти предсказания находятся в качественном согласии с экспериментальными данными и результатами численных расчетов.

Ключевые слова: линейная теория устойчивости, многофронтная детонация, детонационные ячейки.

DOI 10.15372/FGV20200111

## ВВЕДЕНИЕ

Когда в конце 1950-х годов была открыта многофронтная (ячеистая) структура детонационных волн (ДВ), то практически сразу было выдвинуто предположение, что она возникает в результате неустойчивости плоской ДВ к поперечным возмущениям [1]. Существование такой неустойчивости, связанной с сильной (экспоненциальной) зависимостью скорости химической реакции от температуры, сначала было показано для кусочно-постоянного основного течения (случай бесконечно быстрой реакции) [2], а затем и для основного течения, даваемого одномерным решением Зельдовича — Неймана — Дёринга [3]. В течение 1960-х годов линейная устойчивость ДВ была достаточно подробно исследована в цикле работ Дж. Эрпенбека [4–7].

Интерес к данному вопросу снова возрос в 1990–2000-х годах. Это, по крайней мере частично, можно объяснить появившимися надеждами на создание двигателей, использующих для сжигания топлива детонацию [8]. Подобные двигатели, такие, например, как пуль-

сирующий детонационный двигатель [9] и двигатель с ДВ, непрерывно вращающейся в кольцевом канале [10–12], находятся в настоящее время в стадии активной разработки и испытания экспериментальных прототипов. Теоретически они обладают рядом существенных преимуществ перед обычными двигателями внутреннего сгорания. В частности, именно использование детонации может привести к созданию микродвигателей [13], поскольку обычные двигатели внутреннего сгорания, основанные на медленном горении, будучи уменьшены до миллиметровых (или еще меньших) масштабов, будут иметь неприемлемо высокие потери тепла через поверхность.

В 1990 г. появилась важная работа [14], в которой вместо применявшегося Дж. Эрпенбеком технически сложного и не позволявшего прямо строить кривые нейтральной устойчивости подхода, основанного на преобразовании Лапласа, для исследования устойчивости ДВ был использован гораздо более простой и физически прозрачный метод нормальных мод. В последующие годы было опубликовано множество работ, использующих этот подход, их обзор можно найти в [8].

Несмотря на столь длительную историю развития, статус теории устойчивости ДВ значительно отличается от того, каким обладает

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-33-00740).

© Кудрявцев А. Н., Борисов С. П., 2020.

теория гидродинамической устойчивости сдвиговых течений. В последнем случае совершенно ясна важная роль линейной неустойчивости в переходе к турбулентности и в формировании развитого турбулентного течения. Выводы теории гидродинамической устойчивости многократно подтверждены прямыми экспериментами и численными расчетами, на ней основаны инженерные методы предсказания перехода.

Совершенно другим является положение дел с теорией устойчивости ДВ. Несмотря на то, что постановка задачи и полученные результаты не вызывают сомнений, они не подтверждены ни экспериментами, ни прямым численным моделированием. По большому счету, роль линейной неустойчивости в формировании нестационарной многофронтной структуры ДВ остается неясной. Это обусловлено несколькими причинами. Во-первых, все исследования устойчивости ДВ выполнены с простейшей моделью химической кинетики с одной необратимой реакцией, не описывающей процессы химических превращений ни в одной реальной реагирующей смеси и являющейся чисто модельной. Естественно, что прямое сравнение полученных результатов с данными экспериментов провести невозможно. Во-вторых, обычно в работах по устойчивости исследуется плоская волна, распространяющаяся в безграничном пространстве, а эффекты, обусловленные наличием твердых границ, всегда присутствующих в эксперименте, игнорируются.

Важным инструментом для установления связи линейной теории устойчивости с нестационарной многомерной структурой ДВ могут стать вычислительные эксперименты: на существующих в настоящее время суперкомпьютерах вполне можно проводить даже трехмерные расчеты распространения ДВ как с одной необратимой реакцией, так и с детальной химической моделью. В связи с этим возникает задача, решение которой и составляет предмет настоящей работы: выполнить исследование устойчивости ДВ в достаточно простой, но реальной геометрии и попытаться получить из этого исследования всевозможные предсказания, которые могли бы стать предметом проверки в прямом численном моделировании.

С этой целью мы рассматриваем устойчивость ДВ, распространяющейся в прямоугольном канале (как частный случай — в плоском канале). Рассматриваются те особенности, которые вытекают из наличия твердых сте-

нок, ограничивающих волну в поперечных направлениях. Предсказания характеристик многомерной структуры ДВ сделаны на основе следующей простой гипотезы: предположим, что неустойчивая мода с наибольшим, согласно линейной теории, коэффициентом роста продолжает доминировать даже в развитом нелинейном режиме. Основой для такого предположения является то, что в линейном режиме возмущения растут экспоненциально, так что мода, чей коэффициент роста даже незначительно превышает остальные, вырастет заметно быстрее других возмущений и первой вступит в нелинейную стадию развития. По крайней мере, сформулированная гипотеза представляется весьма правдоподобной для условий, когда неустойчива только одна мода возмущений, причем интервал неустойчивых волновых чисел достаточно узок. В целом же, справедливость данного предположения, конечно, должна проверяться путем сравнения вытекающих из него предсказаний с экспериментальными результатами и численными расчетами. Такое сравнение может стать предметом будущих исследований.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим ДВ, описываемую уравнениями Эйлера, дополненными простейшей моделью химической кинетики, широко используемой в теоретических и численных исследованиях детонации:

$$\frac{\partial \rho \lambda}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \lambda \mathbf{u} = \rho \omega, \quad (1)$$

$$\omega = K(1 - \lambda) \exp\left(-\frac{E_a}{T}\right).$$

Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{u}$  — скорость газа;  $\rho$  и  $T$  — плотность и температура газа;  $\lambda$  — переменная, описывающая степень завершения реакции:  $\lambda = 0$  соответствует смеси, в которой химическая реакция еще не началась,  $\lambda = 1$  — смеси, в которой реакция полностью закончилась;  $E_a$  — энергия активации реакции;  $K$  — предэкспоненциальный множитель.

Полная энергия единицы объема смеси в данной модели имеет вид

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 - Q \rho \lambda, \quad (2)$$

где  $p = \rho T$  — давление,  $\gamma = 1.2$  — показатель адиабаты, предполагаемый постоянным,  $Q$  — удельное тепловыделение.

Все уравнения в статье записаны в безразмерном виде. Координаты обезразмерены на полуширину зоны реакции  $L_{1/2}^*$ , т. е. расстояние от переднего фронта ДВ до точки, где  $\lambda = 1/2$ ; плотность и скорости — на плотность газа  $\rho_0^*$  и скорость звука  $c_0^*$  в состоянии перед фронтом; время — на величину  $L_{1/2}^*/c_0^*$ ; давление и температура — на величины  $\rho_0^*c_0^{*2}$  и  $c_0^{*2}/R^*$  соответственно; энергия активации и тепловыделение — на  $c_0^{*2}$ . Здесь через  $R^*$  обозначена удельная газовая постоянная, индекс 0 относится к состоянию перед фронтом ДВ, верхний индекс \* обозначает размерные величины.

Одномерное решение уравнений Эйлера для химически реагирующей смеси, описывающее распределение параметров в плоской ДВ, известно как решение Зельдовича — Неймана — Дёринга (ЗНД). Для рассматриваемой модели оно выписывается в квадратурах (здесь и далее мы используем систему отсчета, в которой фронт невозмущенной ДВ покоится):

$$x = \int_0^\lambda \exp \left[ \frac{E_a/u}{p_0/m + (u_0 - u)} \right] \frac{ud\lambda}{K(1 - \lambda)}, \quad (3)$$

$$u(\lambda) = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ \left( \frac{c_0^2}{u_0} + \gamma u_0 \right) - \sqrt{\left( u_0 - \frac{c_0^2}{u_0} \right)^2 - 2(\gamma^2 - 1)Q\lambda} \right], \quad (4)$$

$$m = \rho_0 u_0, \quad \rho = m/u, \quad p = p_0 + m(u_0 - u). \quad (5)$$

Величина предэкспоненциального множителя  $K$  определяется условием  $\lambda = 1/2$  в точке  $x = 1$ . Выбор знака перед корнем в (4) соответствует тому, что мы отбрасываем решения, описывающие недосжатую детонацию, которая не может существовать по термодинамическим соображениям [15]. Предельный режим, когда подкоренное выражение обращается в нуль, соответствует самоподдерживающейся ДВ (детонации Чепмена — Жуге), число Маха ДВ при этом равно

$$M_{CJ} = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 1)Q}{2c_0^2}} + \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 1)Q}{2c_0^2} + 1}. \quad (6)$$

Пересжатая ДВ, подталкиваемая сзади поршнем, распространяется с числом Маха, большим  $M_{CJ}$ , степень пересжатия определяется как  $f = (M/M_{CJ})^2$ . Таким образом, решение ЗНД полностью характеризуется тремя параметрами:  $E_a$ ,  $Q$  и  $f$ .

При исследовании устойчивости плоской ДВ уравнения Эйлера линеаризуются над решением (3)–(5). Наряду с возмущением газодинамических величин, искажается также и форма фронта волны. Если она задается в виде  $x = \psi(y, z, t)$ , то удобно перейти к криволинейной системе координат, введя вместо  $x$  новую независимую переменную  $\xi = x - \psi(y, z, t)$ . Все газодинамические величины и форма фронта волны записываются в виде

$$q(\xi, y, z, t) = \bar{q}(\xi) + \hat{q}(\xi) \exp(\alpha t) \exp(i(k_y y + k_z z)), \quad (7)$$

$$\psi(y, z, t) = 0 + \hat{\psi} \exp(\alpha t) \exp(i(k_y y + k_z z)), \quad (8)$$

где  $\bar{q}(\xi)$  — невозмущенное течение, даваемое решением ЗНД,  $\hat{q}(\xi)$  и  $\hat{\psi}$  — комплексные амплитуды возмущений,  $k_y$  и  $k_z$  — волновые числа вдоль соответствующих осей,  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  — комплексный параметр, чья вещественная часть суть коэффициент роста возмущения. Подставляя (7), (8) в уравнения движения и сохраняя только линейные по амплитуде возмущений члены, приходим к системе уравнений:

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{U}}{d\xi} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \hat{\psi}\mathbf{G}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & -\bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma\bar{p} & 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{p} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\beta}\xi \\ \alpha\bar{u}\xi \\ ik_y\bar{\beta}\bar{p}\xi \\ ik_z\bar{\beta}\bar{p}\xi \\ \alpha\bar{p}\xi \\ \alpha\bar{\lambda}\xi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha - \bar{u}_\xi & \bar{\beta}_\xi & -ik_y\bar{\beta} & -ik_z\bar{\beta} & 0 & 0 \\ \bar{p}_\xi & \alpha + \bar{u}_\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & ik_y\bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & ik_z\bar{\beta} & 0 \\ -\bar{\sigma}_\beta & \bar{p}_\xi & ik_y\gamma\bar{p} & ik_z\gamma\bar{p} & \alpha + \gamma\bar{u}_\xi - \bar{\sigma}_p & -\bar{\sigma}_\lambda \\ -\bar{\omega}_\beta & \bar{\lambda}_\xi & 0 & 0 & -\bar{\omega}_p & \alpha - \bar{\omega}_\lambda \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\beta = 1/\rho$  — удельный объем,  $\sigma = (\gamma - 1)\rho Q\omega$ , нижние индексы  $\xi, \beta, p, \lambda$  при величинах, относящихся к основному течению, обозначают производные по соответствующим переменным.

К системе уравнений (9) необходимо добавить граничные условия. На фронте волны при  $\xi = 0$  граничные условия получаются путем линеаризации соотношений Ренкина — Гюгонио, что приводит к следующим выражениям (индекс  $s$  использован для параметров сразу за ударной волной):

$$\hat{\beta}_s = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2} \alpha \hat{\psi}, \quad \hat{u}_s = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M^2 + 1}{M^2} \alpha \hat{\psi},$$

$$\hat{v}_s = ik_y(\bar{u}_0 - \bar{u}_s)\hat{\psi}, \quad \hat{w}_s = ik_z(\bar{u}_0 - \bar{u}_s)\hat{\psi}, \quad (10)$$

$$\hat{p}_s = -\frac{4\bar{\rho}_0\bar{u}_0}{\gamma + 1} \alpha \hat{\psi}, \quad \hat{\lambda}_s = 0.$$

Граничным условием при  $\xi \rightarrow \infty$  является отсутствие возмущений (акустических волн), распространяющихся из бесконечности по направлению к ударной волне (поскольку решается задача об устойчивости самой ДВ, без любых внешних возмущений). Соответствующее условие может быть получено, если рассмотреть систему (9) при больших значениях  $\xi$ , когда все коэффициенты уравнений становятся постоянными. Асимптотические решения тогда имеют вид  $\exp(\kappa\xi)$ , где  $\kappa$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}$ . Одно из этих собственных значений дает решение, растущее на бесконечности, — фактически оно отвечает акустической волне, приходящей из бесконечности и затухающей по мере приближения к фронту волны. Чтобы исключить такие возмущения, нужно наложить на решение системы условие его ортогональности собственному

вектору, соответствующему данному собственному значению. Это приводит (при использовании упрощающего предположения, что химическая реакция полностью завершилась, так что  $\lambda = 1$ ) к уравнению

$$F(\alpha) = \alpha\hat{u} - ik_y\bar{u}_\infty\hat{v} - ik_z\bar{u}_\infty\hat{w} + \frac{\bar{\beta}_\infty}{c_\infty} \sqrt{\alpha^2 + (k_y^2 + k_z^2)(\bar{c}_\infty^2 - \bar{u}_\infty^2)}\hat{p} = 0 \quad (11)$$

(индекс  $\infty$  относится к решению ЗНД при  $\xi \rightarrow \infty$ ). Система (9) вместе с граничными условиями (10), (11) образует задачу на собственные значения относительно параметра  $\alpha$ . Ее решение и определяет характеристики устойчивости плоской ДВ: волна будет неустойчивой при  $\text{Re}(\alpha) > 0$ .

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для любых заданных  $k_y$  и  $k_z$  систему уравнений (9), описывающую устойчивость ДВ в безграничном пространстве к трехмерным возмущениям, можно свести к более простой системе для двумерных возмущений. Для этого достаточно повернуть систему координат в плоскости  $y, z$ , перейдя к новым координатам  $\tilde{y}, \tilde{z}$ , так, чтобы направление оси  $\tilde{y}$  совпало с направлением вектора  $(k_y, k_z)$ . Тогда поперечное волновое число двумерного возмущения будет равно длине данного вектора:  $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ .

При численном решении задачи устойчивости выбирается начальное приближение для  $\alpha$ , что позволяет из условий (10) определить начальные значения возмущений при  $\xi = 0$  (амплитуда возмущения фронта ДВ  $\hat{\psi}$  в линейной задаче произвольна и ниже всюду для простоты принимается равной единице). Затем система уравнений (9) интегрируется от  $\xi = 0$  до

какого-нибудь достаточно большого значения  $\xi = L_\xi$  (выбираемого так, чтобы все параметры основного течения заведомо вышли на постоянные значения). После этого требуется выполнение условия (11) при  $\xi = L_\xi$ . Поскольку при произвольном  $\alpha$  оно заведомо не выполняется, уравнение  $F(\alpha) = 0$  решается итерациями (используется итерационный метод Ньютона), все описанные выше действия повторяются на каждой итерации до достижения сходимости.

Начальное приближение для итераций по Ньютону может быть найдено следующим образом. Достаточно большая область комплексной плоскости  $(\alpha_r, \alpha_i)$  покрывается густой сеткой точек, в каждой из которых вычисляется значение функции  $F(\alpha) = 0$ . Те места комплексной плоскости, в которых приближенно обращаются в нуль одновременно вещественная и мнимая части функции  $F$ , дают начальные приближения для поиска  $\alpha$ .

Типичный результат такого исследования устойчивости представлен на рис. 1, где показана зависимость коэффициента роста возмущений от волнового числа  $k$  при  $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$ . При интегрировании системы (9) использовался метод Рунге — Кутты 4-го порядка, сетка на интервале  $[0, L_\xi]$ ,  $L_\xi = 6$ , насчитывала 1 600 точек.

Из рис. 1 видно, что при данных параметрах неустойчивы девять мод возмущений. Имеется верхняя граница существования

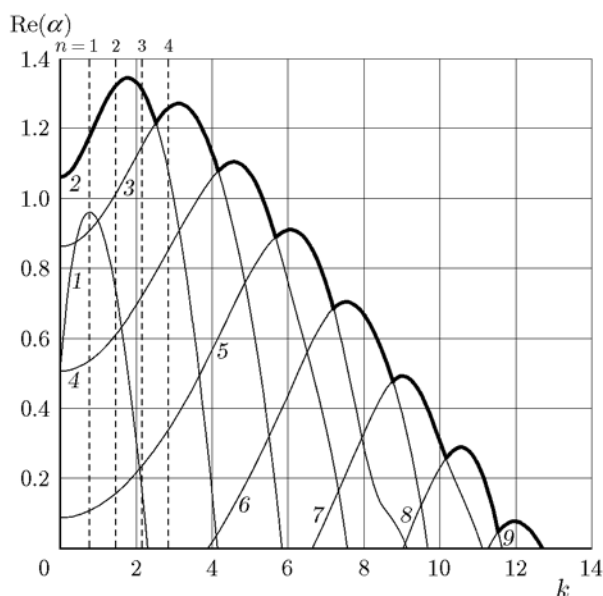


Рис. 1. Коэффициенты роста возмущений при  $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$

неустойчивых возмущений  $k_{stab}$  (в данном случае  $k_{stab} = 12.675$ ), так что все возмущения с  $k \geq k_{stab}$  устойчивы. Видно также, что наибольший коэффициент роста имеет мода 2, волновое число соответствующего возмущения  $k_{max} = 1.79$ . Первые пять мод остаются неустойчивыми при  $k = 0$ . Это означает, что течение неустойчиво к одномерным возмущениям, при которых фронт волны остается плоским, но колеблется взад и вперед относительно равновесного положения.

Число неустойчивых мод и их коэффициенты роста меняются в зависимости от энергии активации, тепловыделения и степени пересечения. Так, при  $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1$  (детонация Чепмена — Жуге) имеется 20 неустойчивых мод. Подробное исследование характеристик устойчивости ДВ в зависимости от параметров  $Q$ ,  $E_a$  и  $f$  выполнено в [16]; полученные нами результаты полностью согласуются с данными этой работы.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Рассмотрим устойчивость ДВ, распространяющейся в плоском канале шириной  $L$ . Наличие твердых стенок означает, что нормальная к ним компонента скорости должна обращаться в нуль на стенках канала. Таким образом, волновое число в соответствующем направлении может принимать только дискретный ряд значений:  $k = \pi n/L, n = 0, 1, 2, \dots$ . Нас интересуют только те возмущения, чьи волновые числа попали в область существования неустойчивых мод, от  $k = 0$  до  $k = k_{stab}$ . Очевидно, что при достаточно малом размере канала даже волновое число возмущения  $k_1 = \pi/L$  с  $n = 1$  превосходит  $k_{stab}$ , так что оно оказывается устойчивым. В этом случае все неустойчивые возмущения сводятся к одномерным колебаниям с  $k = 0$ , что означает невозможность существования ячеистой структуры в канале шириной  $L < \pi/k_{stab}$ . Этот вывод находится в полном соответствии с экспериментальным фактом отсутствия ячеистой структуры у ДВ в узких каналах.

Если теперь начать увеличивать размер канала, то в область неустойчивости будет попадать всё больше гармоник основного волнового числа  $k_1$ . Одна из них, с номером  $n = N$ , будет иметь наибольший коэффициент роста. С увеличением ширины канала значение  $N$  возрастает; в достаточно широком канале волновое число соответствующей гармоники будет

близко к  $k_{\max}$ , а сам номер  $N$  будет приближенно равен  $k_{\max}L/\pi$ .

Примем теперь в расчет сформулированное во введении предположение, что свойства многофронтной ДВ даже в нелинейном режиме будут определяться возмущением с максимальным коэффициентом роста. Тогда мы немедленно получаем возможность предсказать поперечный размер детонационной ячейки  $a$  и число ячеек, образующихся в канале заданного размера. Для этого достаточно, как показано на рис. 1, построить дискретный набор допустимых волновых чисел и определить, какое из них соответствует максимуму коэффициента роста (см. точки пересечения вертикальных линий на рис. 1 с толстой линией огибающей).

На рис. 2 показаны зависимости полученных таким образом величин  $N$  и размера детонационных ячеек  $a = 2L/N$  от ширины канала. Заметим, что количество полных детонационных ячеек равно половине величины  $N$  — в канале могут существовать ДВ с полуцелым числом ячеек (что опять же соответствует экспериментальным наблюдениям). Из рис. 2 следует, что при изменении размеров канала ячейчатая структура как бы подстраивается, изменяя поперечный размер ячеек и сохраняя их число. Это возможно, однако только в некоторых пределах — наступает момент, при котором коэффициенты роста двух гармоник оказываются одинаковыми, в этот момент размер ячейки меняется скачком и их количество изменяется (на «половину» ячейки). Такое поведение также находится в согласии с результатами экспериментальных наблюдений.

Что касается размера детонационных ячеек, то из рис. 2, б видно, что в узких каналах он может изменяться в достаточно широких пределах. Однако при увеличении ширины канала он всё больше приближается к некоторой постоянной величине. Эта величина  $a_{\infty} = 2\pi/k_{\max}$  полностью определяется  $k_{\max}$ , значением волнового числа, отвечающего максимальному коэффициенту роста возмущений.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

В прямоугольном канале шириной  $L_y$  и высотой  $L_z$  граничные условия приводят к появлению «правил отбора» для волновых чисел в обоих поперечных направлениях:

$$k_y = \pi n/L_y, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

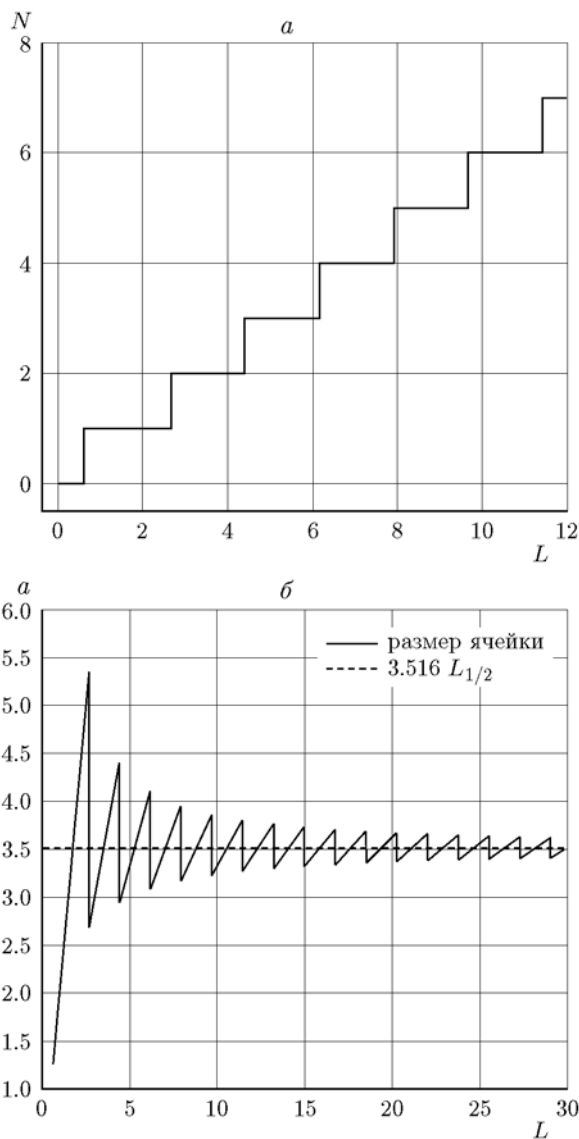


Рис. 2. Количество поперечных возмущений (удвоенное число детонационных ячеек) (а) и поперечный размер детонационных ячеек (б) в плоском канале в зависимости от его ширины ( $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$ )

$$k_z = \pi m/L_z, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

На рис. 3 соответствующие значения показаны в виде прямоугольной решетки со светлыми точками. В то же время, поскольку трехмерные уравнения устойчивости могут быть сведены к двумерным с волновым числом  $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ , коэффициент роста (показан на рис. 3 оттенками серого) зависит только от расстояния до начала координат. В частности, граница устойчивости  $k = k_{stab}$  будет окружностью (сплош-

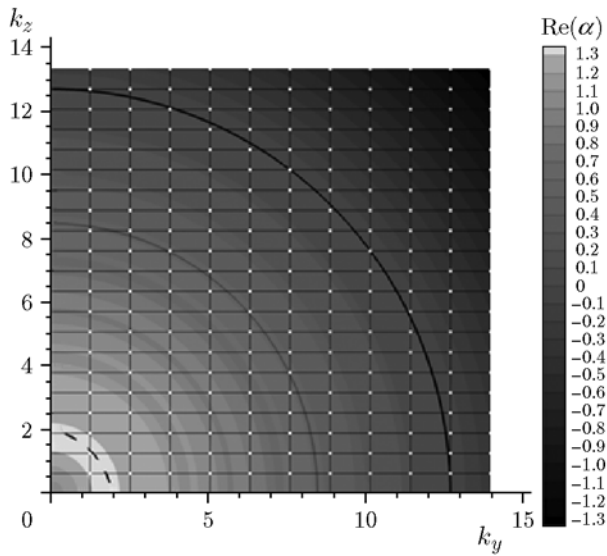


Рис. 3. Коэффициенты роста трехмерных возмущений при  $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$

ная черная линия на рис. 3), так же как и множество точек, соответствующее максимальному коэффициенту роста (штриховая линия).

Дальнейшие рассуждения аналогичны таковым для плоского канала. В данном случае график зависимости скорости роста от поперечных волновых чисел  $k_y$  и  $k_z$  представляет собой поверхность. На этой поверхности выбираем точки, образующие решетку допустимых значений волновых чисел. Точка, лежащая на этой поверхности выше других, дает возмущение с максимальным коэффициентом роста. На рис. 3 это возмущение будет располагаться где-то вблизи штриховой линии.

Выполнив такое построение, получим график зависимости максимального коэффициентов роста от размеров канала (рис. 4).

Видно, что при малых значениях  $L_y$  и  $L_z$  имеется область, в которой не существует неустойчивых возмущений (за исключением, возможно, одномерных). Это опять же свидетельствует о существовании минимальных размеров канала, необходимых для образования многофронтной структуры.

При увеличении ширины и высоты канала максимальный коэффициент роста меняется весьма сложным и даже причудливым образом. Для широких в обоих направлениях каналов он асимптотически приближается к максимальному значению для плоской ДВ, распространяющейся в безграничном пространстве  $\alpha_{\max} = \alpha_r(k_{\max})$ .

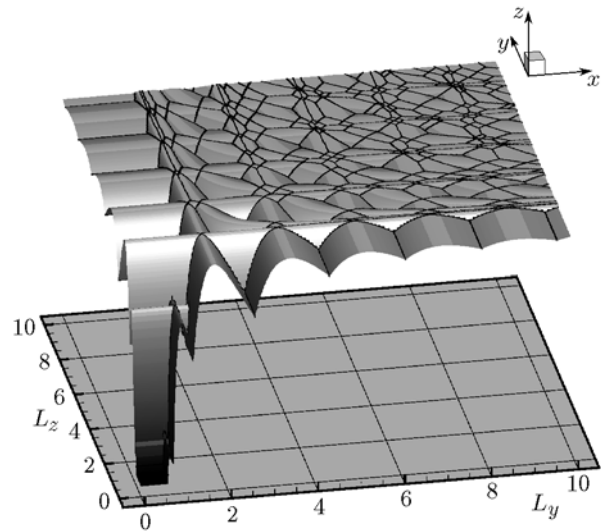


Рис. 4. Максимальный коэффициент роста трехмерных возмущений в зависимости от размеров канала ( $Q = 50$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$ )

При заданных значениях  $L_y$  и  $L_z$  можно найти числа  $N$  и  $M$ , определяющие номер наиболее неустойчивой гармоники. Вся плоскость  $(L_y, L_z)$  разделяется на области, отвечающие различным значениям  $N$  и  $M$  (рис. 5, для некоторых областей подписаны значения  $N$  и  $M$ ). Вспоминая опять гипотезу о доминирующем характере наиболее неустойчивой моды, этот рисунок можно трактовать как карту режимов

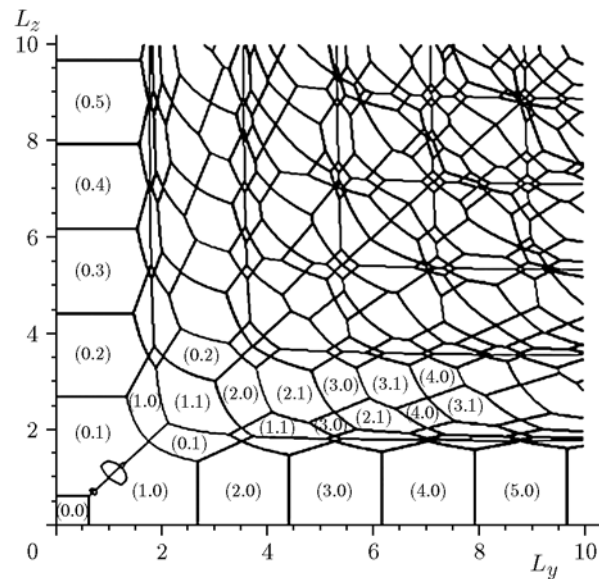


Рис. 5. Карта режимов детонации в прямоугольных каналах при  $Q = 50$ ,  $E_a = 50$ ,  $f = 1.2$

детонации, определяющую количество детонационных ячеек и их размер по обоим направлениям при распространении ДВ в прямоугольном канале.

## ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как мы показали, простая гипотеза, что наиболее неустойчивая мода линейной теории продолжает доминировать даже в развитом нелинейном режиме, позволяет связать данные линейной теории устойчивости ДВ с характеристиками многофронтной структуры детонации. В частности, удается предсказать количество и размеры детонационных ячеек, образующихся при распространении ДВ в плоском или прямоугольном канале заданных размеров, воспроизвести характерные особенности изменения многофронтной структуры при изменении размеров канала. Становится возможным построить карту режимов детонации в каналах прямоугольного сечения.

Отметим, что за долгую историю исследования детонации было предложено большое число теоретических моделей для предсказания размеров детонационных ячеек; их подробный анализ дан в обзоре [17]. Одной из хорошо известных моделей является теория [18], основанная на рассмотрении распространения исходящих от переднего фронта малых возмущений (акустических волн) в неоднородном течении за фронтом ДВ. Рассмотрение ведется в рамках геометрической акустики, справедливой для коротковолновых акустических возмущений. Сравнение с экспериментальными данными для водородно-кислородных смесей, разбавленных аргоном, выполненное в работе [18], показало, что модель предсказывает размеры ячеек примерно вдвое выше экспериментально наблюдаемых. Однако позже в работах [19, 20] было получено весьма хорошее согласие предсказаний данной модели с результатами численного моделирования гетерогенной детонации в смеси частиц алюминия с кислородом. Такое противоречие, вероятно, объясняется заметными отличиями газовой детонации от гетерогенной: процессы в последней имеют гораздо менее «бурный» характер и ближе к линейному режиму.

Нельзя не отметить, что развиваемая в настоящей статье модель и теория из работы [18] имеют ряд общих черт. В обоих случаях рассматривается распространение малых возмущений: в одном случае на основе геометриче-

ской акустики, в другом же в рамках точной линейной волновой теории. Существенно различным является, однако, условие, из которого определяется размер ячейки. При акустическом подходе [18] за поперечный размер принимается расстояние вдоль фронта от исходной точки до точки, в которую приходит сигнал, вернувшийся к фронту волны за наименьшее время, а в нашем случае за поперечный размер принимается длина волны возмущения с максимальным коэффициентом роста.

Количественная проверка правильности сформулированной модели может быть проведена путем сравнения вытекающих из нее результатов либо с экспериментальными данными, либо с результатами численного моделирования. Сравнение с экспериментами затруднено тем обстоятельством, что простая модель с одной необратимой химической реакцией, используемая при исследовании устойчивости ДВ, не описывает ни одну реальную химически реагирующую смесь. Положение можно было бы поправить, выполнив исследование устойчивости для более реальной модели. До настоящего времени таких исследований, однако, не проводилось. В [21] была сформулирована система уравнений устойчивости для детальной модели химической кинетики, но никаких расчетов для какого-либо из известных химических механизмов не проведено (видимо, в силу сложности полученных уравнений).

Другой путь проверки сформулированного предположения заключается в том, чтобы на основе полных нелинейных уравнений Эйлера выполнить прямое численное моделирование распространения ДВ в каналах различных размеров и, определив из расчета размеры образующихся детонационных ячеек, сравнить их с предсказываемыми. Такое исследование планируется.

В качестве косвенного подтверждения высказанной гипотезы могут рассматриваться результаты работы [22], в которой моделировалось распространение ДВ в канале при  $Q = 0.4$ ,  $E_a = 50$  и  $f = 1.2$ . В этих условиях неустойчивыми оказываются четыре моды, из них наибольший коэффициент роста имеет мода 2. Были воспроизведены рост возмущений в линейном режиме, нелинейная стадия развития и, наконец, формирование развитой ячейистой структуры. Даже в конце расчета амплитуда моды 2 заметно превышала амплитуды остальных мод возмущений.



Авторы выражают признательность А. В. Троцюку (ИГиЛ СО РАН) за проявленный им интерес к данной работе, а также хотели бы поблагодарить Д. В. Давиденко (Франция), обратившего наше внимание на работу [22].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Щелкин К. И.** Два случая неустойчивого горения // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36, № 2. — С. 600–606.
2. **Зайдель Р. М.** Об устойчивости детонационных волн в газовых смесях // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 136, № 5. — С. 1142–1145.
3. **Пухначев В. В.** Об устойчивости детонации Чепмена — Жуге // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 149, № 4. — С. 798–801.
4. **Erpenbeck J. J.** Stability of steady-state equilibrium detonations // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5, N 5. — P. 604–614.
5. **Erpenbeck J. J.** Stability of idealized one-reaction detonations // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7, N 5. — P. 684–696.
6. **Erpenbeck J. J.** Stability of idealized one-reaction detonations: zero activation energy // Phys. Fluids. — 1965. — V. 8, N 6. — P. 1192–1193.
7. **Erpenbeck J. J.** Detonation stability for disturbances of small transverse wavelength // Phys. Fluids. — 1966. — V. 9, N 7. — P. 1293–1306.
8. **Stewart D. S., Kasimov A. R.** State of detonation stability theory and its application to propulsion // J. Propul. Power. — 2006. — V. 22, N 6. — P. 1230–1244.
9. **Roy G. D., Frolov S. M., Borisov A. A., Netzer D. W.** Pulse detonation propulsion: challenges, current status, and future perspective // Prog. Energy Combust. Sci. — 2004. — V. 30, N 6. — P. 545–672.
10. **Bykovskii F. A., Zhdan S. A., Vedernikov E. F.** Continuous spin detonation // J. Propul. Power. — 2006. — V. 22, N 6. — P. 1204–1216.
11. **Быковский Ф. А., Ждан С. А.** Непрерывная спиновая детонация. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2013.
12. **Фролов С. М., Звегинцев В. И., Иванов В. С., Аксенов В. С., Шамшин И. О., Внучков Д. А., Наливайченко Д. Г., Берлин А. А., Фомин В. М.** Непрерывно-детонационное горение водорода: результаты испытаний в аэродинамической трубе // Физика горения и взрыва. — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 116–123.
13. **Brouillette M.** Shock waves at microscales // Shock Waves. — 2003. — V. 13, N 1. — P. 3–12.
14. **Lee H. I., Stewart D. S.** Calculation of linear detonation instability: one-dimensional instability of plane detonation // J. Fluid Mech. — 1990. — V. 216. — P. 103–132.
15. **Щелкин К. И., Трошин Я. К.** Газодинамика горения. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
16. **Short M., Stewart D. S.** Cellular detonation stability. Pt 1. A normal mode linear analysis // J. Fluid Mech. — 1998. — V. 368. — P. 229–262.
17. **Vasil'ev A. A.** Cell size as the main geometric parameter of a multifront detonation wave // J. Propul. Power. — 2006. — V. 22, N 6. — P. 1245–1260.
18. **Barthel H. O.** Predicted spacings in hydrogen-oxygen-argon detonation // Phys. Fluids. — 1974. — V. 17, N 8. — P. 1547–1553.
19. **Федоров А. В., Хмель Т. А.** Численное моделирование формирования ячеистой гетерогенной детонации частиц алюминия в кислороде // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 4. — С. 84–98.
20. **Федоров А. В., Хмель Т. А.** Формирование и вырождение ячеистой детонации в бидисперсных газовзвесах частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 109–120.
21. **Gorshkov V., Kiyanda C. B., Short M., Quirk J. J.** A detonation stability formulation for arbitrary equations of state and multistep reaction // Proc. Combust. Inst. — 2007. — V. 31. — P. 2397–2405.
22. **Taylor B. D., Kasimov A. R., Stewart D. S.** Mode selection in weakly unstable two-dimensional detonations // Combust. Theory Model. — 2009. — V. 13, N 6. — P. 973–992.

*Поступила в редакцию 14.11.2018.  
Принята к публикации 26.12.2018.*