Теплофизика и аэромеханика, 2023, том 30, № 6

УДК 532.526

Ламинарный сверхзвуковой пограничный слой в условиях диффузионного водородно-воздушного пламени и его устойчивость*

С.А. Гапонов, С.О. Морозов, А.Н. Семенов

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

E-mail: gaponov@itam.nsc.ru, morozov@itam.nsc.ru, semenov@itam.nsc.ru

В приближении Дана – Линя – Алексеева и при постоянных числах Прандтля и Шмидта сформулирована задача гидродинамической устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением, которая сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений десятого порядка с однородными граничными условиями. При числах Льюиса, равных единице, она может быть понижена до восьмого порядка. В невязком приближении задача устойчивости сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка.

На основе полученных уравнений устойчивости и расчетов стационарных параметров течения прямым численным моделированием впервые исследована устойчивость сверхзвукового пограничного слоя с диффузионным горением на проницаемой пластине с подачей водорода через ее поры. При числе Маха M = 2 с помощью расчетов установлена возможность стабилизации течения пламенем. Показано, что в рамках невязкой теории устойчивости могут быть получены достаточно надежные данные о максимальных степенях роста возмущений.

Ключевые слова: сверхзвуковой пограничный слой, неустойчивость, возмущения, диффузионное пламя, степень усиления.

Введение

Наиболее часто задачу устойчивости связывают с проблемой стабилизации как ламинарного, так и турбулентного пламени, заключающейся в предотвращения его срыва [1, 2]. Другой тип неустойчивости, например, в камерах сгорания, приводит к вибрационному горению [3, 4]. Обширная библиография по организации горения, интенсификации перемешивания и срыву в основном турбулентного пламени приведена в обзоре [5]. В представленной работе предполагается исследовать гидродинамическую неустойчивость пограничного слоя с диффузионным пламенем, имеющую отношение к его ламинарно-турбулентному переходу. Ниже цитируются работы, в наибольшей степени относящиеся к теме настоящих исследований.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00017, https://rscf.ru/project/22-21-00017/.

© **Гапонов С.А., Морозов С.О., Семенов А.Н., 2023**

Неустойчивость, сопровождающаяся синусоидальной деформацией поверхности горения, в наибольшей степени изучена для пламен предварительно перемешанной смеси топлива и окислителя [6 – 8].

Следует заметить, что задача устойчивости течения с горением принадлежит к более общей проблеме устойчивости течения многокомпонентной смеси с химическими реакциями. Первая попытка сформулировать задачу устойчивости течения с химическими реакциями, по-видимому, была предпринята в работе [9], где анализ ограничивался невязким приближением, то есть в уравнениях для возмущений пренебрегалось членами, содержащими коэффициенты молекулярного переноса вещества, импульса и энергии. К исследованиям устойчивости течения смеси газов с химическими реакциями следует отнести течения, для которых учитываются диссоциации отдельных молекул. Впервые изучению этого направления было посвящено исследование [10], которое нашло свое продолжение в работах [11, 12]. Здесь, в отличие от [9], задача решалась с учетом коэффициентов молекулярного переноса вещества, импульса и энергии. После этих работ с интервалом около десяти лет появился ряд исследований [13 – 18], в которых изучалась устойчивость пограничного слоя высокоскоростных многокомпонентных газовых смесей с применением численных методов интегрирования уравнений устойчивости. Обзор этих и других аналогичных работ представлен автором [19]. К одной из последних работ этого направления относится публикация [20]. Методология исследований работы [16] использовалась при изучении устойчивости пограничного слоя в условиях сублимации горючего материала с обтекаемой поверхности в работе [21].

Что касается неустойчивости диффузионного пламени, то она исследовалась, по-видимому, впервые авторами [22] для слоя смешения в невязком приближении. Более подробные исследования устойчивости диффузионного горения в слоях смешения в невязком приближении как при дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростях можно найти в публикации [23]. Неустойчивость струйно-диффузионного пламени с учетом коэффициентов переноса импульса, тепла и концентраций изучалась в работе [24].

Отметим, что практически отсутствуют теоретические работы по устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением при подаче топлива через пористую поверхность. Близкой в отношении исследования этой проблемы является работа [21], в которой учитывается сгорание углерода, испаряющегося с обтекаемой воздухом поверхности. Однако в ней рассмотрен случай пограничного слоя при числе Маха $M \approx 16$, а сгорание углерода имеет место вблизи поверхности. Следует заметить, что параметры пограничного слоя с диффузионным горением зависят от подвода тепла и распределения концентраций различных газов смеси. Если пренебречь влиянием концентраций и принять постоянной молекулярную массу смеси, то задачу устойчивости можно свести к известной задаче устойчивости пограничного однокомпонентного газа с подводом тепла, что было продемонстрировано в работе [25] на примере дозвукового слоя. В указанном исследовании источник тепла не был связан с химическими реакциями и не учитывал тип подаваемого топлива через пористую стенку, а также изменение молекулярной массы газа по пограничному слою, хотя и обеспечивал при одном числе Рейнольдса распределение температуры по дозвуковому пограничному слою, наблюдаемое в одном эксперименте с диффузионным горением. Остается открытым вопрос о влиянии разных типов топлив, чисел Рейнольдса и Маха на гидродинамическую устойчивость пограничного слоя с диффузионным горением. Для правильного ответа на поставленный вопрос необходимы исследования устойчивости пограничного слоя с реальным диффузионным горением.

В связи с вышеизложенным цель настоящих исследований состоит в обосновании и выводе необходимых уравнений устойчивости, учитывающих не только подвод тепла, но и изменение молекулярной массы по пограничному слою, и в проведении конкретных расчетов устойчивости сверхзвукового пограничного слоя с реальным диффузионным горением. В качестве модели рассматривается пограничный слой с горением водорода, подаваемого через пористую стенку в воздушный поток, число Маха которого вне пограничного слоя равно двум.

1. Формулировка задачи устойчивости

Задача устойчивости пограничного слоя (ПС) решается в приближении параллельности течения, то есть, как правило, в уравнениях для возмущений пренебрегается членами, учитывающими нормальную к обтекаемой поверхности скорость и зависимость параметров от продольной координаты x, параллельной направлению внешнего течения, невозмущенного пограничного слоя. Следует заметить, что возможность такого пренебрежения определяется условием, что логарифмическая производная по продольной координате от невозмущенного параметра много меньше соответствующей производной от возмущения. Для пограничного слоя это соответствует условию, что характерный размер возмущения λ много меньше расстояния x до начала формирования ПС — $\lambda/x << 1$. Поэтому отличие возмущений в пограничном слое, полученных на основе приближения параллельного течения, от реальных составляет величину порядка λ/x. Для возмущений, когда $q \sim \exp(i\alpha x)$, длина волны $\lambda = 2\pi/\alpha$, а $\lambda/x \sim 1/\alpha x$. Для ПС на плоской пластине с характерной толщиной пограничного слоя $\delta = \sqrt{x\nu_\mathrm{e}/u_\mathrm{e}}$, где ν_e, u_e — кинематические вязкость и скорость на внешней границе пограничного слоя, имеем $\lambda/x \sim 1/\bar{\alpha}\mathrm{Re}$, где $\bar{\alpha} = \alpha\delta$, $\mathrm{Re} = \sqrt{xu_\mathrm{e}/\nu_\mathrm{e}}$.

В работе [26] было показано, что возмущения скорости порождения (поглощения) веществ и подвод тепла в результате химических реакций пропорциональны $1/\bar{\alpha}\mathrm{Re}$, то есть их вклад сравним с членами, неучтенными в приближении параллельного течения. Это является основанием для того, чтобы в приближении параллельного течения рассматривать только устойчивости ПС с химическими реакциями без учета их возмущений. Правомерность такого подхода подтверждена исследованиями невязкой неустойчивости [26, 27]. Таким образом, в приближении параллельного течения уравнения устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением оказываются аналогичны уравнениям устойчивости многокомпонентного пограничного слоя.

Следуя [26], запишем безразмерную систему уравнений малых возмущений в двумерном пограничном слое многокомпонентной смеси газов с постоянными числами Прандтля и Шмидта (Pr, Sc_i), где i — номер компонента смеси, в приближении параллельного течения Дана – Линя – Алексеева [28, 29], в виде:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{y}}v\right) = -\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}, \tag{1}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right) = -\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\frac{\partial p}{\partial \bar{y}}, \tag{2}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial w}{\partial \bar{x}}\right)=-\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}, \tag{3}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial T}{\partial \bar{x}}+\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}\bar{y}}v\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{1}{\mathrm{PrRe}}\bar{\mu}\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}+\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}\bar{y}}v+\bar{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial v}{\partial \bar{y}}+\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)=0, \tag{5}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial c_i}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial c_i}{\partial \bar{x}}+\frac{\mathrm{d}\bar{c}_i}{\mathrm{d}\bar{y}}v\right)=\frac{1}{\mathrm{ReSc}_i}\bar{\mu}\frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{y}^2},\quad i=1,\ldots,n, \tag{6}$$

здесь все параметры пограничного слоя отнесены к соответствующим величинам на границе пограничного слоя, а их стационарные значения помечены чертой сверху; координаты отнесены к характерной длине δ, а время — к величине δ/u_e. Индексом e помечены величины на границе пограничного слоя, индекс i соответствует номеру компонента смеси, n — общее количество газов в смеси, u, v, w, p, T, ρ, c_i — возмущения продольной, нормальной и боковой скорости, давления, температуры, плотности и концентраций, M_e и γ — число Маха на границе пограничного слоя и показатель адиабаты.

В размерном виде уравнение состояния смеси имеет вид $p^* = \rho^* R^* T^*$, где $R^* = R_0 / m$, R_0 — универсальная газовая постоянная, m — молекулярная масса смеси. В пограничном слое давление постоянно по нормальному направлению относительно основного потока, поэтому $\bar{R}\,\bar{T} = 1/\bar{\rho}$, а для возмущений выполняется равенство

$$p=\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\frac{T}{\bar{T}}+\frac{R}{\bar{R}}=\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\frac{\theta}{\bar{R}\bar{T}}=\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\bar{\rho}\theta \quad \text{или} \quad \rho=\bar{\rho}(p-\bar{\rho}\theta), \tag{7}$$

здесь $\theta = \bar{T}R + \bar{R}T$ — возмущение произведения температуры на индивидуальную газовую постоянную, $\bar{R}=1/\bar{m}=\sum_i \bar{c}_i/\bar{m}_i = 1/\bar{\rho}\bar{T}$, возмущение $R=\sum_i c_i/\bar{m}_i$, где $\bar{m}$ и $\bar{m}_i$ — безразмерные молекулярные массы смеси основного потока и i-го компонента, отнесенные к молекулярной массе смеси на границе пограничного слоя.

При одинаковых числах Шмидта (Sc_i = Sc) деление уравнения (6) на $\bar{m}_i$ и суммирование полученных равенств приводит к уравнению

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial R}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial R}{\partial \bar{x}}+\frac{\mathrm{d}\bar{R}}{\mathrm{d}\bar{y}}v\right)=\frac{1}{\mathrm{ReSc}}\bar{\mu}\frac{\partial^2 R}{\partial \bar{y}^2}. \tag{8}$$

Таким образом, задача устойчивости сводится к решению системы шести уравнений — (1) – (5) и (8) с учетом (7).

Для возмущений $q=\tilde{q}(\bar{y})\exp[i\bar{\alpha}(\bar{x}-c\bar{t})+\bar{\beta}\bar{z})]$ система (1) – (5), (8) может быть записана в виде:

$$\bar{\rho}\left(i\bar{\alpha}(\bar{u}-c)\tilde{u}+\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{y}}\tilde{v}\right)=-\frac{i\bar{\alpha}}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\tilde{p}+\frac{\bar{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\,\bar{y}^2}, \tag{9}$$

$$\overline{\rho} i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{v} = -\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}\overline{y}}, \tag{10}$$

$$\overline{\rho}(i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{w}) = -\frac{i\overline{\beta}}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2}\tilde{p} + \frac{\overline{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{w}}{\mathrm{d}\overline{y}^2}, \tag{11}$$

$$\overline{\rho}\left(i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{T} + \frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}\overline{y}}\tilde{v}\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{p} + \frac{\overline{\mu}}{\mathrm{PrRe}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{T}}{\mathrm{d}\overline{y}^2}, \tag{12}$$

$$\overline{\rho}(i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{R} + \frac{\mathrm{d}\overline{R}}{\mathrm{d}\overline{y}}\tilde{v}) = \frac{\overline{\mu}}{\mathrm{ReSc}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}\overline{y}^2}, \tag{13}$$

$$i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)(\tilde{p}-\overline{\rho}\tilde{\theta}) + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}\overline{y}}\tilde{v} + \left(i\overline{\alpha}\tilde{u} + i\overline{\beta}\tilde{w} + \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\overline{y}}\right) = 0. \tag{14}$$

Система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений десятого порядка (9) – (14) с десятью однородными граничными условиями, например, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{R} = 0$ при $\overline{y} = 0, \infty$, определяет задачу устойчивости пограничного слоя как задачу на собственные значения.

При числах Льюиса Le = 1 (Sc = Pr) порядок системы уравнений устойчивости пограничного слоя может быть понижен в сравнении с порядком системы (9) – (14). Действительно, после умножения уравнения (12) на $\overline{R}$, а уравнения (13) на $\overline{T}$ и их суммирования, с учетом приближения Дана – Линя $\overline{R}\dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{T}}{\mathrm{d}\,\overline{y}^2} \approx \dfrac{\mathrm{d}^2(\overline{R}\tilde{T})}{\mathrm{d}\,\overline{y}^2}$, $\overline{T}\dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}\,\overline{y}^2} \approx \dfrac{\mathrm{d}^2(\overline{T}\tilde{R})}{\mathrm{d}\,\overline{y}^2}$, можно получить

$$\overline{\rho} i\alpha(\overline{u}-c)\tilde{\theta} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}\overline{y}}\tilde{v} = \overline{R}\frac{\gamma-1}{\gamma} i\overline{\alpha}(\overline{u}-c)\tilde{p} + \frac{\overline{\mu}}{\mathrm{PrRe}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\theta}}{\mathrm{d}\overline{y}^2}. \tag{15}$$

Здесь учтено, что $\overline{R}\dfrac{\mathrm{d}\,\overline{T}}{\mathrm{d}\,\overline{y}} + \overline{T}\dfrac{\mathrm{d}\,\overline{R}}{\mathrm{d}\,\overline{y}} = \dfrac{\mathrm{d}(\overline{R}\overline{T})}{\mathrm{d}\,\overline{y}} = \dfrac{\mathrm{d}(1/\overline{\rho})}{\mathrm{d}\,\overline{y}} = -\dfrac{1}{\overline{\rho}^2}\dfrac{\mathrm{d}\,\overline{\rho}}{\mathrm{d}\,\overline{y}}$.

Таким образом, задача устойчивости пограничного слоя многокомпонентной смеси с постоянными числами Шмидта разных газов и равных числу Прандтля сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка (9) – (11), (14) и (15), как и в случае однокомпонентного газа, но с коэффициентами, зависящими и от температуры, и от плотности, так как $\overline{R} = 1/\overline{\rho}\overline{T} \neq 1$.

В связи с последним замечанием полезно сослаться на уравнения устойчивости из работ [30 – 32], в которых учитывается, что $\overline{\rho}\overline{T} \neq 1$. Однако в этих работах давление в невозмущенном течении принималось $\overline{p} = \overline{\rho}\overline{T}$, а индивидуальная газовая постоянная считалась неизменной, и ее возмущение принималось равным нулю. При больших числах Рейнольдса и постоянной молекулярной массе смеси возмущение концентраций, а следовательно, и возмущение индивидуальной газовой постоянной, слабо влияют на характеристики устойчивости [33]. При числах Льюиса, равных единице, их влиянием вовсе можно пренебречь. В этом случае для вычисления характеристик устойчивости можно пользоваться программой, предложенной авторами [32], учитывающей неравенство $\overline{\rho}\overline{T} \neq 1$.

Обратимся теперь к задаче невязкой неустойчивости. Согласно исследованию [28], порядок системы (9)–(11), (14) и (15) может быть понижен путем введения новых переменных и параметров в соответствии с соотношениями: $\breve{\alpha}\tilde{u} + \breve{\beta}\tilde{w} = \breve{\alpha}\breve{u}$, $\breve{\alpha}\tilde{p} = \breve{\alpha}\breve{p}$, $\breve{\alpha}\tilde{\theta} = \breve{\alpha}\breve{\theta}$, $\breve{\alpha}\mathrm{M}_\mathrm{e}^2 = \breve{\alpha}\breve{\mathrm{M}}_\mathrm{e}^2$, $\breve{\alpha}\,\mathrm{Re} = \breve{\alpha}\,\breve{\mathrm{Re}}$, $\breve{\alpha}^2 = \breve{\alpha}^2 + \breve{\beta}^2$. С их учетом невязкие уравнения устойчивости приобретают вид:

$$
\begin{gathered}
i\breve{\alpha}(\bar{u}-c)(\breve{p}-\bar{\rho}\breve{\theta}) + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}\bar{y}}\tilde{v} + \left(i\breve{\alpha}\breve{u} + \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\bar{y}}\right) = 0,\\
\bar{\rho}i\breve{\alpha}(\bar{u}-c)\breve{u} + \bar{\rho}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{y}}\tilde{v} = -\frac{i\breve{\alpha}}{\gamma\breve{\mathrm{M}}_\mathrm{e}^2}\breve{p},\\
\bar{\rho}i\breve{\alpha}(\bar{u}-c)\tilde{v} = -\frac{1}{\gamma\breve{\mathrm{M}}_\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}\breve{p}}{\mathrm{d}\bar{y}},\\
\bar{\rho}i\breve{\alpha}(\bar{u}-c)\breve{\theta} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}\bar{y}}\tilde{v} = \bar{R}\frac{\gamma-1}{\gamma}i\breve{\alpha}(\bar{u}-c)\breve{p},
\end{gathered}
\tag{16}
$$

затем они приводятся к уравнению второго порядка:

$$
\frac{\mathrm{d}^2\breve{p}}{\mathrm{d}\bar{y}^2} = \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}\bar{y}} + \frac{2}{(\bar{u}-c)}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{y}}\right)\frac{\mathrm{d}\breve{p}}{\mathrm{d}\bar{y}} + \breve{\alpha}^2\left\{1-\breve{\mathrm{M}}_\mathrm{e}^2(\bar{u}-c)^2\bar{\rho}\left[\gamma(1-\bar{R})+1\right]\right\}\breve{p} = 0. \tag{17}
$$

В случае однокомпонентного газа ($\bar{R}=1$, $\bar{\rho}=1/\bar{T}$) (17) полностью совпадает с широко известным (см., например, работы [34–36]) уравнением:

$$
\frac{\mathrm{d}^2\breve{p}}{\mathrm{d}\bar{y}^2} = \left(-\frac{1}{\bar{T}}\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}\bar{y}} + \frac{2}{(\bar{u}-c)}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{y}}\right)\frac{\mathrm{d}\breve{p}}{\mathrm{d}\bar{y}} + \breve{\alpha}^2\left(1-\frac{\mathrm{M}_\mathrm{e}^2(\bar{u}-c)^2}{\bar{T}}\right)\breve{p} = 0.
$$

Таким образом, при постоянном числе Прандтля смеси и одинаковых постоянных числах Шмидта всех газов (Sc_i = Sc) в приближении Дана–Линя–Алексеева задача устойчивости двумерного пограничного слоя многокомпонентной смеси относительно трехмерных возмущений сводится к задаче на собственные значения системы обыкновенных дифференциальных однородных уравнений десятого порядка (в случае однокомпонентного газа используется система восьмого порядка) с однородными граничными условиями.

Дополнительное допущение о равенстве числа Льюиса единице (Le = 1 (Pr = Sc)) понижает порядок системы дифференциальных уравнений устойчивости до порядка системы, аналогичной случаю однокомпонентного газа, но с коэффициентами, зависящими как от температуры, так и от плотности, так как в многокомпонентной смеси $\bar{\rho} \neq 1/\bar{T}$.

В случае невязкой неустойчивости, а значит, независимо от значений чисел Pr и Sc, система уравнений неустойчивости сводится к одному уравнению второго порядка, как и в случае однокомпонентного газа, но учитывающего неравенство: $\bar{\rho} \neq 1/\bar{T}$.

2. Расчет параметров стационарного течения с горением

На рис. 1 показана расчетная область обтекания плоской пластины с подачей водорода через пористую поверхность. Для расчетов строилась структурированная сетка со сгущением к поверхности пластины, содержащая по продольной координате 2500 точек,

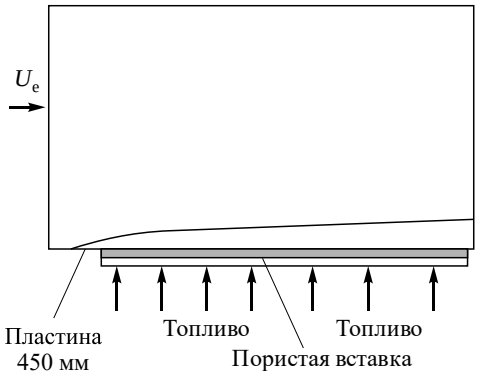

Рис. 1. Схема расчетной области.

по нормальной координате на пограничный слой — примерно 100 точек, а на пористую вставку — около 30. Общее количество точек не превышало 2 млн. На верхней и левой границах параметры течения соответствовали набегающему потоку с температурой торможения T_0 = 300 K. Набегающий поток состоял из азота и кислорода в пропорции 78 % к 22 % соответственно. На правой границе (выход) задавалось статическое давление, равное 5600 Па. Перед пластиной ставились условия симметрии. Пластина имела физическую длину 450 мм. До пористой вставки задавалась адиабатическая стенка длиной 30 мм. Пористая вставка имела длину 400 мм и толщину 20 мм, под ней находилась область толщиной 20 мм без пористости. На нижней границе этой области задавался массовый расход водорода с различной температурой (T_{H_2}).

Нестационарные уравнения Навье – Стокса решались методом конечных объемов с помощью программного комплекса Ansys Fluent, в котором в размерном виде задаются:

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{v}Y_i\right) = -\nabla\cdot\vec{J}_i + R_i;$$

— уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{v}\right) + \nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\vec{v}\right) = -\nabla P + \nabla\left(\bar{\tau}\right),$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu\left[\left(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^{\wedge T}\right) - \frac{2}{3}\nabla\vec{v}I\right];$$

— закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{dt}\left(\rho\left(e + \frac{v^2}{z}\right)\right) + \nabla\left(\rho v\left(h + \frac{v^2}{2}\right)\right) = \nabla\left(k\nabla T - \sum\nolimits_j \overline{h_j J_j}\right) + S_\text{h}.$$

Здесь Y_i — массовая доля i-й компоненты, R_i — выработка i-й компоненты, P — статическое давление, $\bar{\bar{\tau}}$ — тензор напряжений, μ — молекулярная вязкость, l — единичный тензор, k — теплопроводность, $\bar{J}_j$ — диффузионный поток j-й компоненты, S_h — источник энергии.

Энтальпия h для идеальных газов принимается в виде:

$$h = \sum\nolimits_j Y_j h_j, \quad h_j = \int\limits_{T_\text{ref}}^{T} c_{p,j}\,\mathrm{d}T.$$

Источник энергии в результате химической реакции определяется как

$$S_\text{h} = -\sum\nolimits_j \frac{h_j^u}{M_j} R_j,$$

где h_j^0 — энтальпия образования j-й компоненты при T_{ref}, а R_j — объемная скорость образования j-ой компоненты.

Диффузионный поток запишется в виде:

$$\overrightarrow{J_j} = -\rho D_{i,m} \nabla Y_i - D_{T,i} \frac{\nabla T}{T},$$

здесь $D_{i,m}$ — коэффициент массовой диффузии i-й компоненты в смеси, $D_{T,i}$ — тепловой коэффициент диффузии.

Газ предполагается идеальным: $P = \rho RT$.

Вязкость, теплоемкость и теплопроводность для каждой компоненты смеси определяется с помощью кинетической теории с использованием потенциала Леонардо – Джонсона:

$$\mu = 2,67 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{M_{\text{w}} T}}{\sigma^2 \Omega_\mu},$$

$$C_p = \frac{1}{2} \frac{R_0}{M_{\text{w}}} \left(f_i + 2 \right), \; k = \frac{15}{4} \frac{R}{M_{\text{w}}} \mu \left[\frac{4}{15} \frac{C_p M_{\text{w}}}{R} + \frac{1}{3} \right],$$

здесь R_0 — универсальная газовая постоянная, M_{w} — молекулярная масса, f_i — число степеней свободы i-й компоненты, σ — диаметр столкновения в ангстремах, Ω_μ — относительный интеграл столкновений.

В таблице приведены молекулярные массы, энтальпии образования, параметры потенциала Леннарда – Джонса (σ и глубина потенциальной ямы ε, отнесенная к постоянной Больцмана — ε/k) при T_{ref} = 290 K и число степеней свободы.

Молярная скорость порождения/вырождения i-й компоненты в реакции определяется следующим образом:

$$R_i = \left(\nu_i'' - \nu_i' \right) \left(k_{\text{f}} \Pi_{j=1}^{N} \left[C_j \right]^{n_j'} \right),$$

где $\left[C_j \right]$ — молярная концентрация j-й компоненты, n_j' — показатель скорости для j-й компоненты, ν_i', ν_i'' — стехиометрические коэффициенты i-й компоненты исходных веществ и их продуктов.

В нашем случае рассматривается одностадийная реакция сгорания водорода в воздухе: $2H_2 + O_2 + N_2 = 2H_2O + N_2$.

Скорость реакции k_{f} вычисляется с использованием выражения Аррениуса:

$$k_{\text{f}} = A T^{\beta} \text{e}^{-E/RT},$$

Таблица

Постоянные используемых газов из работы [37]

Параметр \ Вещество	N_2	O_2	H_2O	H_2
M_{w}, кг/кмоль,	28,0134	31,9988	18,01534	2,01594
h_j^0, Дж/кмоль,	1428,921	–847,8067	$-2,418 \cdot 10^8$	2447,839
σ, Å	3,621	3,458	2,605	2,92
ε/k, K	97,53	107,4	572,4	38
f_i	5	5	6	5

в котором параметры, взятые из работы [37], имеют следующие значения: A = 9,87·10^8, $\beta = 0$ и E = 3,17·10^7 Дж/кмоль, $\nu'_{H_2} = \nu''_{H_2O} = 2$, $\nu''_{O_2} = 1$, $n_{H_2} = 2$, $n_{O_2} = 1$.

Верификация подхода проводилась на примере расчетов работ [38, 39]. На рис. 2*a* для сравнения представлены распределения продольной скорости по пограничному слою при сгорании водорода, полученные в настоящих расчетах (сплошная линия) и в работе [38] (символы), при внешней скорости обтекания пластины воздухом U_∞ = 82 см/с. Водород подавался через пористую вставку с расходом 2,17·10^{-4} г/(см^2·с). Распределения приведены для расстояния 30 см от передней кромки пластины. В целом следует признать близость двух результатов удовлетворительной. Некоторое количественное различие можно объяснить упрощениями работы [38], в которой принимались постоянными и равными 0,7 числа Прандтля и Шмидта. Кроме того, в [38] показатель $n_{H_2} = 1$ и использовался другой закон Аррениуса. Отметим, что в указанной работе не приводились данные по распределению температуры в пограничном слое.

На рис. 2*b* представлены для сравнения настоящие результаты по распределению температуры (шкала сверху) и объемных концентраций C_j (шкала внизу), а также результаты работы [39], в которой, следует отметить, отсутствуют данные по распределению скорости. В расчетах [39] скорость набегающего потока воздуха принималась равной 2 м/с. Массовый расход через пористую вставку смеси азота и водорода в пропорции 97 %: 3 % соответственно составлял 0,7 % от расхода набегающего потока. Заметим, что в исследовании [39] расчеты проводились с учетом многостадийности горения и излучения стенкой, поэтому детальная информация о коэффициентах переноса отражена не в полной мере. При этом настоящие расчеты проведены в одностадийном приближении, а значит, при неполном соответствии коэффициентов переноса двух расчетов. Таким образом, соответствие результатов можно считать удовлетворительным.

В силу того, что комплекс Ansys Fluent обеспечивает надежные расчеты течения как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях, а литературные данные по расчетам ламинарного сверхзвукового обтекания пластины с диффузионным горением отсутствуют, считалось достаточным сопоставление настоящих расчетов с данными работ

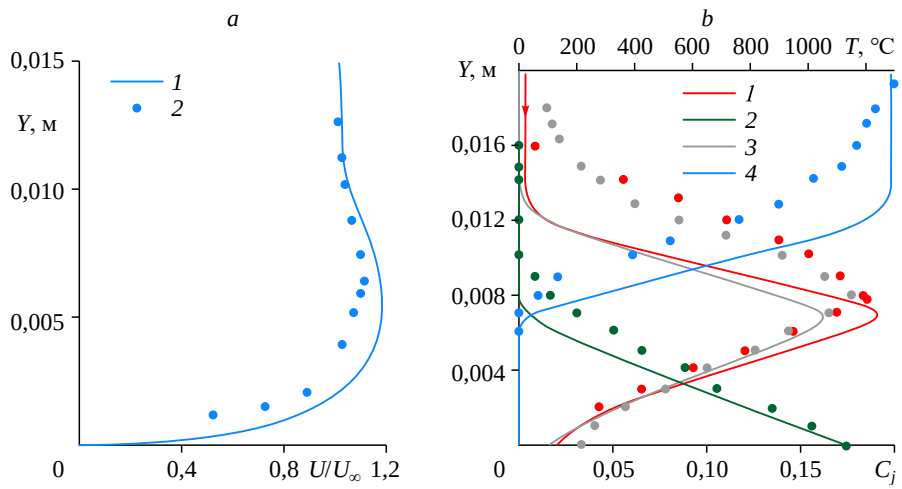

Рис. 2. Сравнение результатов настоящих расчетов и работ [38] (*a*) и [39] (*b*).
Линии — результаты настоящих расчетов, символы — данные работ [38] и [39];
a: данные расчета по Ansys Fluent (*1*) и работы [38] (*2*),
b: распределения температуры (*1*) и объемных концентраций H_2 (*2*), H_2O (*3*), O_2 (*4*).

[38, 39] при дозвуковых скоростях. Надежность вычислений обеспечивалась варьированием расчетной сетки, а также устойчивым и стабильным счетом в широком диапазоне параметров.

Ниже приводятся результаты расчета сверхзвукового пограничного слоя с диффузионным горением при числе Маха M = 2. Расчеты проводились при подаче водорода через пористую вставку с температурой T_{H_2} = 300, 600 и 900 K. Массовый расход водорода задавался 0,01 кг/(м^2·с).

На рис. 3 показано распределение продольной скорости (рис. 3*a*), температуры (рис. 3*b*), величины $1/(\rho T)$ (рис. 3*c*) и функции $K = \rho \dfrac{du}{dy}$ (рис. 3*d*), экстремумы которой ответственны за невязкую неустойчивость по пограничному слою при T_{H_2} = 600 K на разных расстояниях от передней кромки пластины — x = 0,4, 0,3, 0,2, 0,1, 0,05 м. Из представленных данных можно видеть, что распределение скорости по пограничному слою на большом расстоянии (x = 0,4 м) немонотонно, скорость внутри пограничного слоя может превышать скорость внешнего течения аналогично случаю дозвукового обтекания (см. рис. 2*a*). Температура внутри слоя становится заметно выше температуры стенки только на расстоянии x > 100 мм от передней кромки и растет вниз по потоку до 1500 K при x = 0,4 м. Произведение плотности и температуры непостоянно в отличие от однокомпонентного газа в силу изменения молекулярной массы реагирующей смеси.

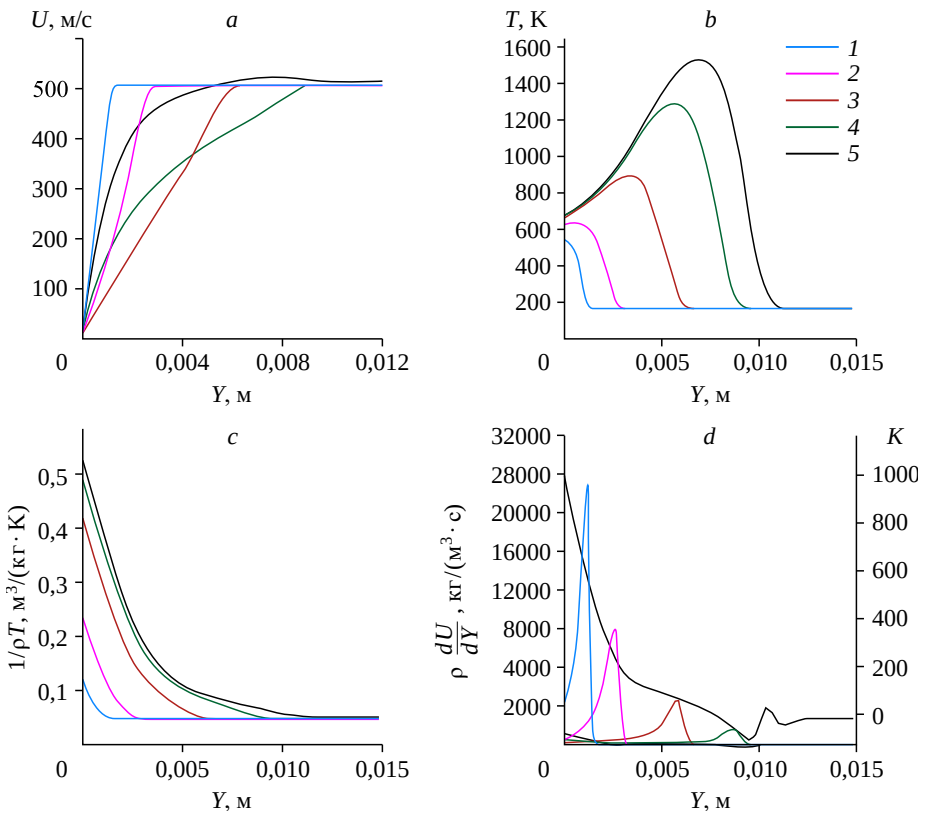

Рис. 3. Распределение по пограничному слою продольной скорости (*a*), температуры (*b*), величин $1/\rho T$ (*c*) и $K = \rho \mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ (*d*) на расстояниях x = 0,05 (*1*), 0,1 (*2*), 0,2 (*3*), 0,3 (*4*) и 0,4 (*5*) м от передней кромки.

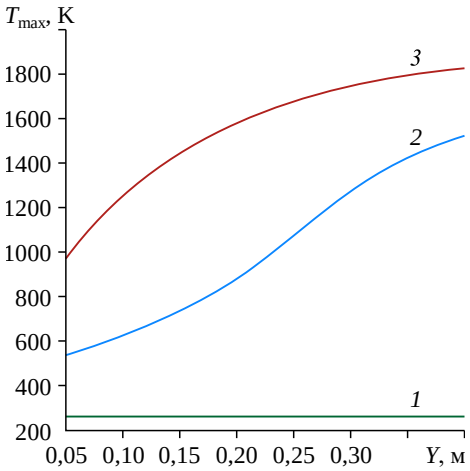

Рис. 4. Зависимости максимальной температуры в пограничном слое от продольной координаты. T_{H_2} = 300 (*1*), 600 (*2*), 900 (*3*) K.

На рис. 3*d* можно видеть, что у функции $K(y)$ имеется максимум при всех x, включая x = 0,4 м (шкала справа). В сечениях x = 0,3 м и x = 0,4 м наряду с максимумами у зависимости $K(y)$ присутствуют минимумы. Наличие максимума и минимума функции K, которые также наблюдались в пограничном слое однокомпонентного газа с подводом тепла внутрь слоя [40 – 41], является необходимым условием невязкой неустойчивости. Для скорости в максимуме U_{s1} в сечениях x = = 0,05, 0,1 и 0,2 м выполняется второе необходимое условие неустойчивости Фьёртофта [42]: $(U - U_{s1})(\mathrm{d}K/\mathrm{d}y) < 0$ при $U < U_{s1}$. Для сечения 0,3 м оно выполняется при $U_{s2} < U < < U_{s1}$, где U_{s2} — скорость в минимуме функции K, а условие $(U - U_{s2})(\mathrm{d}K/\mathrm{d}y) < 0$ выполняется при $U > U_{s1}$. В сечении x = 0,4 м условие $(U - U_{s1})(\mathrm{d}K/\mathrm{d}y) < 0$ выполняется в области $U_{s1} < U < U_{s2}$, а условие $(U - U_{s2})(\mathrm{d}K/\mathrm{d}y) < 0$ — в области $U_{s2} < U < U_{max}$. Что касается второго минимума функции K при x = 0,4 м, то он слабо выражен, и его анализ здесь не приводится.

Данные, полученные при температуре вдуваемого водорода T_{H_2} = 900 K, качественно согласуются с данными при T_{H_2} = 600 K. Некоторое количественное различие показано на примере зависимостей максимальных по пограничному слою температур T_{max} от продольной координаты на рис. 4. Следует отметить, что зависимости от продольной координаты при T_{H_2} = 600 K и T_{H_2} = 900 K аналогичны полученным в экспериментах с дозвуковым пограничным слоем [38]. Что касается максимума температуры при T_{H_2} = = 300 K, то он достигался на стенке и не превышал 300 K. С формальной точки зрения при такой температуре незначительное выделение тепла имеет место, но оно недостаточно для образования реального факела. Поэтому можно утверждать, что реальное горение инициировалось достаточно высокой температурой подаваемого водорода.

3. Результаты расчетов устойчивости

На основании распределений параметров потока, полученных с помощью комплекса Ansys Fluent, были рассчитаны характеристики устойчивости сверхзвукового пограничного слоя при числе M_e = 2. Большинство результатов было получено для двумерных волн (β = 0) как наиболее усиливающихся. Задача решалась для пространственного усиления волн, то есть при реальной частоте колебаний и комплексном волновом числе $a = a_r + a_i$. При отрицательных a_i амплитуда нарастает вниз по потоку, что свидетельствует о неустойчивости течения в ПС.

Результаты получены спектральным методом [32] на основе системы (9) – (11), (14) и (15), то есть в предположении, что число Льюиса Le = 1. С учетом последнего замечания указанная система записывалась в виде

$$(i\alpha B - i\omega C + D)\Phi = 0,$$

где $\Phi = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{p})$, $\omega = \alpha c$ — реальная частота. Матричные элементы матриц C, B и D имеют вид:

$$c_{11} = \bar{\rho},\ c_{22} = \bar{\rho},\ c_{33} = \bar{\rho},\ c_{44} = \bar{\rho},\ c_{45} = -\bar{R}\frac{\gamma - 1}{\gamma},\ c_{54} = -\bar{\rho},\ c_{55} = 1;$$

$$b_{11} = \bar{\rho}\bar{u},\ b_{15} = \frac{i\alpha}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2},\ b_{22} = \bar{\rho}\bar{u},\ b_{33} = \bar{\rho}\bar{u},\ b_{44} = \bar{\rho}\bar{u},$$

$$b_{45} = -\bar{R}\frac{\gamma - 1}{\gamma}\bar{u},\ b_{51} = 1,\ b_{54} = -\bar{\rho}\bar{u},\ b_{55} = \bar{u};$$

$$d_{11} = -\frac{\bar{\mu} D_y D_y}{\mathrm{Re}},\ d_{12} = \bar{\rho}\bar{u}_y,\ d_{25} = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\mathrm{e}^2} D_y,\ d_{33} = -\frac{\bar{\mu} D_y D_y}{\mathrm{Re}},\ d_{35} = \frac{i\beta}{\gamma \mathrm{M}^2},$$

$$d_{42} = -\frac{\bar{\rho}_y}{\bar{\rho}},\ d_{44} = -\frac{\bar{\mu} D_y D_y}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}},\ d_{52} = \frac{\bar{\rho}_y}{\bar{\rho}} + D_y,\ d_{53} = i\beta,\ \text{где } D_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\bar{y}}.$$

Для выяснения влияния коэффициентов переноса импульса, тепла и концентраций проводились отдельные расчеты на основе системы (16) или уравнения (17).

На рис. 5*a* и 5*b* представлены соответственно зависимости степеней усиления и фазовых скоростей от частоты на разных расстояниях от передней кромки пластины. Из приведенных данных прежде всего следует, что вниз по течению степень усиления возмущения и частотный диапазон нарастающих волн уменьшается, что, по-видимому, связано с ростом температуры в пограничном слое. Более того, при $x > 0{,}4$ м можно говорить о полной стабилизации ПС. Из данных рис. 5*b*, 3*a* и 3*d* можно установить, что скорость в критической точке $U = c_x$ удовлетворяет необходимому условию Фьёртофта невязкой теории устойчивости, а для нейтральных волн, когда $a_i = 0$, в области высоких частот фазовая скорость примерно равна скорости в обобщенной точке перегиба U_{s1}.

Подавление возмущений пламенем хорошо проиллюстрировано на рис. 6, где приведены контуры степеней нарастания в плоскости бокового волнового числа β и частоты f на расстояниях от передней кромки 0,05, 0,1, 0,2, 0,3 м (см. соответственно рис. 6*a* – 6*d*)

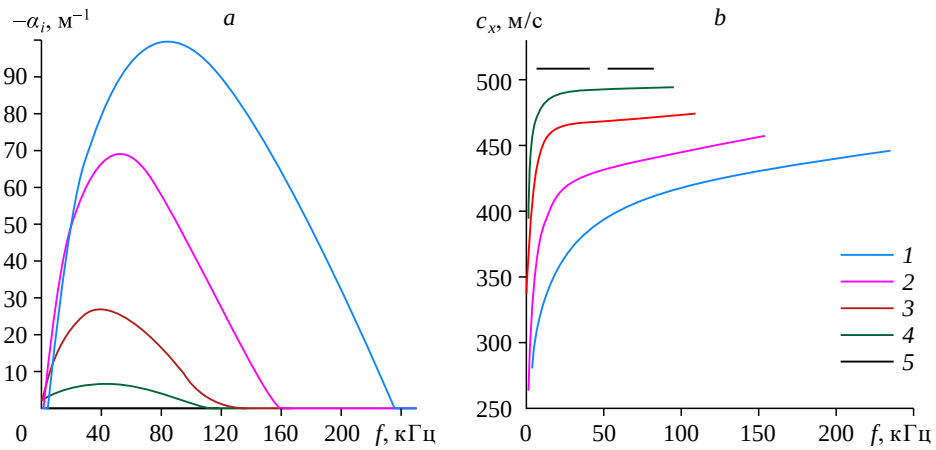

Рис. 5. Зависимости степеней усиления (*a*) и фазовых скоростей (*b*) от частоты на расстояниях x = 0,05 (*1*), 0,1 (*2*), 0,2 (*3*), 0,3 (*4*), 0,4 (*5*) м от передней кромки пластины.

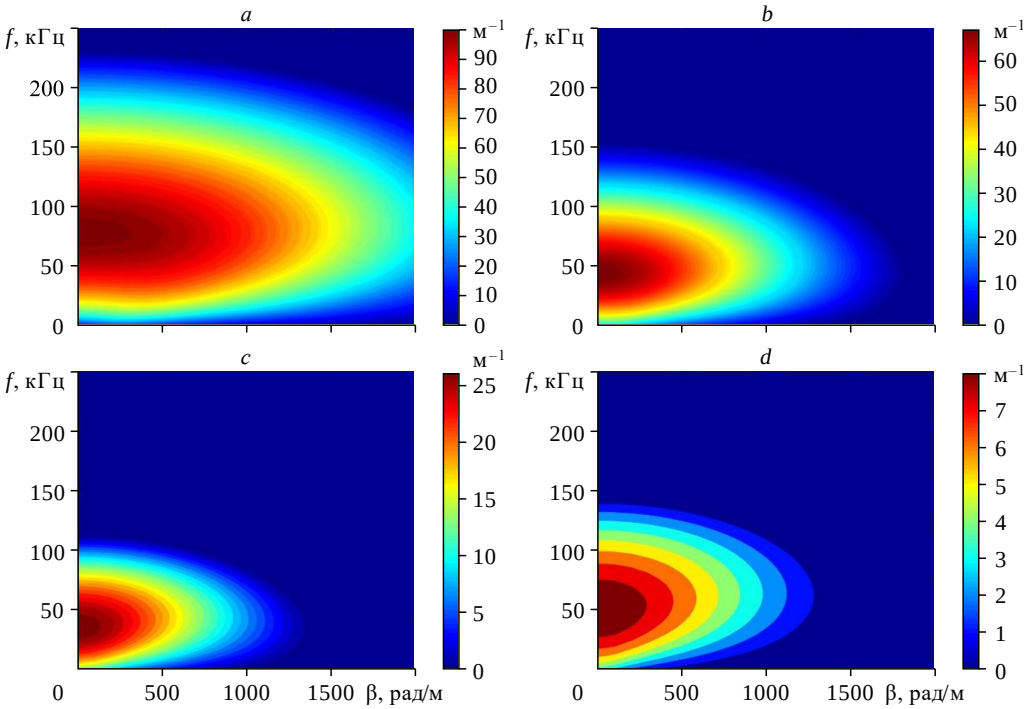

Рис. 6. Контуры степеней нарастания в плоскости бокового волнового числа β и частоты f на расстояниях 0,05 (*a*), 0,1 (*b*), 0,2 (*c*), 0,3 (*d*) м от передней кромки.

при массовом расходе водорода 0,01 кг/(м^2·с) и температуре T_{H_2} = 600 K. Видно, что область частот и волновых чисел нарастающих волн вниз по течению сильно сжимается, а максимальная степень усиления на участке 0,05 м < x < 0,3 м уменьшается более чем в 10 раз.

Аналогичные расчеты проводились также при (T_{H_2} = 300 и 900 K). На рис. 7 показаны максимальные по частоте степени нарастания в зависимости от продольной координаты при разных значениях T_{H_2}. В отсутствие пламени (T_{H_2} = 300 K) зависимость немонотонна и сравнительно слабо меняется вниз по течению. В присутствии пламени (как в случае T_{H_2}= 600 K, так и в случае T_{H_2} = 900 K) неустойчивость ослабевает вниз по течению существенно, что связано с ростом температуры в ПС. В обоих случаях можно говорить, по существу, о полной стабилизации ПС относительно двумерных возмущений: при x = 0,4 м — для T_{H_2} = 600 K и при x = 0,2 м — для T_{H_2} = 900 K.

На рис. 8 представлены степени усиления, рассчитанные на основе системы (9)–(11), (14) и (15) как с учетом возмущения индивидуальной газовой постоянной (линия *1*), так и без него (линия *2*), а также в невязком приближении (линия *3*) при T_{H_2} = 600 K (x = 0,05 м, 0,2 м)

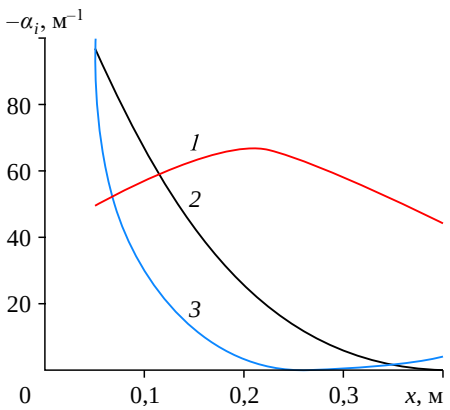

Рис. 7. Зависимости максимальных по частоте степеней усиления от продольной координаты. T_{H_2} = 300 (*1*), 600 (*2*), 900 (*3*) K.

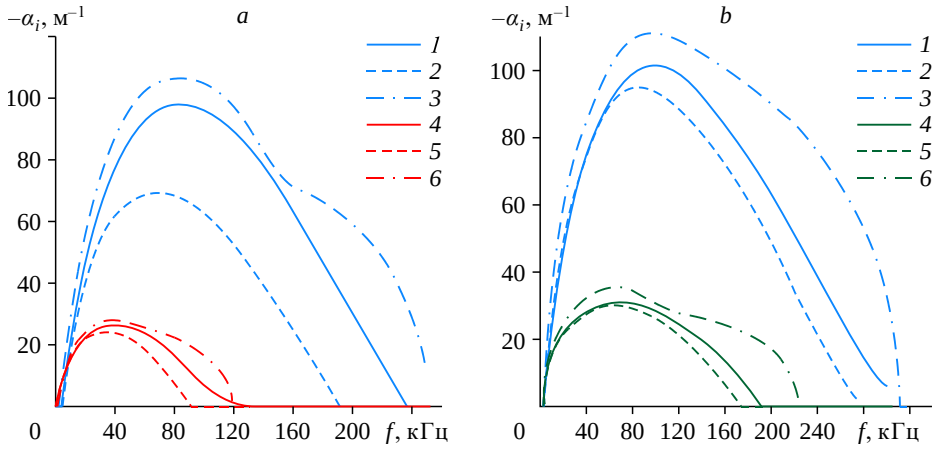

Рис. 8. Сопоставление результатов расчета степеней нарастания по разным моделям при T_{H_2} = 600 (*a*) и T_{H_2} = 900 K (*b*).

Расчеты по модели Дана – Линя – Алексеева с учетом возмущения индивидуальной газовой постоянной (*1*), без ее учета ($R = 0$, $\bar{R} = 1$) (*2*) и по невязкой модели (16) (*3*); голубые линии — x = 0,05 м (*a*, *b*), красные — x = 0,2 (*a*), зеленые — x = 0,1 (*b*) м.

и при T_{H_2} = 900 K (x = 0,05, 0,1 м). Сопоставление зависимостей *1* и *2* при T_{H_2} = 600 K (x = = 0,05 м) показывает, что учет возмущений газовой постоянной (молекулярной массы смеси) приводит к увеличению степеней нарастания, но их влияние уменьшается вниз по течению (аналогичное сопоставление при T_{H_2} = 600 K при x = 0,2 м). Это снижение можно объяснить ростом температуры. Согласно данным, полученным в первом разделе, устойчивость зависит от параметра $\theta = \bar{T}R + \bar{R}T$. Из (8) можно видеть, что возмущение R фактически не зависит от температуры. Наоборот, из (4) видно, что возмущение температуры напрямую связано с градиентом ее стационарного значения $\mathrm{d}\bar{T}/\mathrm{d}y$, который растет вниз по течению. Таким образом, относительный вклад R в θ уменьшается и влияние возмущений газовой постоянной на устойчивость снижается. Этот вывод подтверждается данными для случая T_{H_2} = 900 K. Разница в степенях усиления с учетом возмущения газовой постоянной и без его учета существенно уменьшается уже при x = 0,05 м (линии *1* и *2* на рис. 8*b*) в сравнении с соответствующей разницей при T_{H_2} = 600 K (линии *1* и *2* на рис. 8*a* при x = 0,05 м). Разница максимальных степеней усиления двух моделей практически исчезает при x = 0,2 м для T_{H_2} = 600 K и при x = 0,1 м для T_{H_2} = 900 K. Таким образом, в случае достаточно высокой температуры пламени можно не принимать в расчет влияние возмущения газовой постоянной на устойчивость пограничного слоя даже при водород-воздушном пламени. В работе [33] также было установлено, что при малом изменении молекулярной массы смеси внутри пограничного слоя (например, при углеводородном топливе) возможность пренебрежения возмущением газовой постоянной допустима независимо от температуры внутри пограничного слоя.

Влияние вязкости в уравнениях устойчивости демонстрируется сопоставлением зависимостей (1) и (3) на рис. 8. Как видно, поправки, связанные с учетом вязкости в уравнениях устойчивости, незначительны вблизи максимальных значений степеней усиления и надежные результаты могут быть получены в рамках уравнения (17).

Заключение

1. В приближении Дана – Линя – Алексеева уравнения устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением или многокомпонентного газа (1) – (6) приводятся относительно возмущений, пропорциональных $\exp[i\bar{\alpha}(\bar{x}-c\bar{t})+\bar{\beta}\bar{z})]$, при одинаковых числах Шмидта всех газов смеси к системе обыкновенных дифференциальных уравнений десятого порядка — (9) – (14). Увеличение системы восьмого порядка для однокомпонентного газа связано с дополнительным уравнением (13) на возмущения обратной величины молекулярной массы смеси *R*.

При числах Льюиса, равных единице, система десятого порядка снижается до восьмого, как и в случае однокомпонентного газа, но с уравнением на возмущение отношения температуры к молекулярной массе смеси $\tilde{\theta}$, а не температуры, как в случае с однокомпонентным газом. В невязком приближении задача устойчивости сводится к интегрированию одного уравнения второго порядка (17), как и в задаче однокомпонентного газа. Однако во всех случаях полученные уравнения зависят не только от температуры, но и от плотности.

2. Анализ сверхзвукового ($M_e = 2$) ламинарного пограничного слоя с диффузионным горением водорода, подаваемого через пористую стенку в воздушный поток, рассчитанного с помощью программного пакета ANSYS Fluent, показал, что при наличии пламени ($T_{H_2} \approx 600$ и 900 K) температура внутри слоя растет вниз по течению, как и в экспериментах с дозвуковым пограничным слоем [38]. Обобщенная точка перегиба (максимумом произведения плотности на градиент скорости) смещается к границе пограничного слоя с увеличением расстояния от передней кромки пластины. Также показано, что существует область пограничного слоя, где выполняется необходимое условие невязкой неустойчивости Фьёртофта [41].

С использованием уравнений устойчивости при числе Льюиса, равном единице, впервые рассчитаны характеристики растущих волн в ламинарном сверхзвуковом пограничном слое с диффузионным горением. При $M_e = 2$ установлено, что:

— диффузионное пламя может играть стабилизирующую роль и существуют расстояния от передней кромки пластины, по превышении которых наступает практически полная стабилизация течения;

— удовлетворительные результаты по устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением можно получить на основе теории невязкой неустойчивости (уравнение (17)).

Список литературы

1. **Rohmat T.A., Katoh H., Obara T., Yoshihashi T., Ohyagi S.** Diffusion flame stabilized on a porous plate in a parallel airstream // AIAA J. 1998. Vol. 36, No. 11. P. 1945–1952.
2. **Баев В.К., Бажайкин А.Н.** Стабилизация диффузионных пламен импактных и встречных струй топлива // Физика горения и взрыва. 2016. № 5. С. 23–32.
3. **Ильченко М.А., Крютченко В.В., Мнацаканян Ю.С., Пинкэ И.М., Рудаков А.С., Руденко А.Н., Фоломеев Е.А., Эпштейн В.А.** Устойчивость рабочего процесса в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1995.320 с.
4. **Раушенбах Б.В.** Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961. 500 с.
5. **Liu Q., Baccarella D., Lee T.** Review of combustion stabilization for hypersonic air breathing propulsion // Progress in Aerospace Sci. 2020. Vol. 119, P. 100636-1–100636-82.
6. **Ландау Л.Д.** К теории медленного горения // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1944. Т. 14, № 6. С. 240–244.

7. Darrieus G. Propagation d'un front de flame. Unpublished work presented at La Technique Moderne (1938), and at Le Congres de Mechanique Appliquee (1945).

8. Markstein G.R. Experimental and studies of flame-front stability // J. Aeronaut. Sci. 1951. Vol. 18, No. 3. P. 199–209.

9. Shen S.F. Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // Proc. 5th Midwest. Conf., Fluid Mech., Ann Arbor. 1957. P. 11–20.

10. Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя газа с химическими реакциями на каталитической поверхности // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10, № 6. С .797–801.

11. Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа // Прикл. механика и технич. физика. 1978. № I. С. 40–45.

12. Петров Г.В. Влияние диссоциации на устойчивость пограничного слоя // Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск, 1979. С. 104–117.

13. Malik M.R., Anderson E.C. Real gas effects on hypersonic boundary-layer stability // Phys. Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. Vol. 3, No. 5. P. 803–821.

14. Stuckert G.K., Reed H.L. Linear disturbances in hypersonic, chemically reacting shock layers // AIAA J. 1994. Vol. 32, No. 7. P. 1384–1394.

15. Chang C.L, Vinh H., Malik M.R. Hypersonic boundary-layer stability with chemical reactions // AIAA Paper. 1997. No. 1997-2012.

16. Hudson M., Chokani N., Candler G.V. Linear stability theory of hypersonic, chemically reacting viscous flow // AIAA. 1997. Vol. 35, No. 6. P. 958–964.

17. Johnson H.B., Seipp T.G., Candler G. Numerical study of hypersonic reacting boundary layer transition on cones // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. P. 2676–2685.

18. Lyttle I.J., Reed H.L. Sensitivity of second mode linear stability to constitutive models within hypersonic flow // AIAA Paper. 2005. No. 2005-0889.

19. Marxen O. Hydrodynamic stability of hypersonic chemically reacting boundary layers I // Multiphysics phenomena analysis on boundary layer stability in hypersonic regime. STO-AVT-289. EN-AVT-289-02. 2017.

20. Han Y.F., Cao W. Flat-plate hypersonic boundary layer flow instability and transition prediction considering air dissociation // Applied Mathematics and Mechanics. 2019, Vol. 40, No. 5. P. 719–736.

21. Mortensen C., Zhong X. Real gas and surface ablation effects on hypersonic boundary layer instability over a blunt cone // AIAA Paper. 2013. No. 2013-2981.

22. Jackson T.L., Hussaini M.Y. An asymptotic analysis of supersonic reacting mixing layers // Combustion Sci. and Technology. 1988. Vol. 57, No. 4–6. P. 129–140.

23. Jackson T.L., Grosch C.E. Structure and stability of a laminar diffusion flame in a compressible, three-dimensional mixing layer // Theoret. and Comput. Fluid Dynamics. 1994. Vol. 6, No. 2–3. P. 89–112.

24. See Y.C., Ihme M. Effects of finite-rate chemistry and detailed transport on the instability of jet diffusion flames // J. of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 745. P. 647–681.

25. Гапонов С.А. Устойчивость пограничного слоя при внутреннем выделении тепла и подаче газа через пористую стенку // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 41–50.

26. Гапонов С.А., Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 93 с.

27. Shin D.S., Ferziger J.H. Linear stability of the reacting mixing layer // AIAA J. 1991. Vol. 29, No. 10. P. 1634–1642.

28. Dunn D.W., Lin C.C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. 1955. Vol. 22, No. 7. P. 455–477.

29. Алексеев М.А. 06 асимптотических приближениях в задаче устойчивости ламинарного пограничного слоя при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1972. Вып. 1420. 27 с.

30. Lees L., Lin C.C. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // NACA-TN-1115. 1946. 83 p.

31. Mack L.M. Boundary-layer linear stability theory // AGARD Report No. 709: Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow. 1984. P. 3–81.

32. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. On computing the location of laminar–turbulent transition in compressible boundary layers // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2017. Vol. 32, No. 1. P. 1–12.

33. Гапонов С.А. Приближенная формулировка проблемы устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением // Физика горения и взрыва. 2023. Т. 58, № 2. С. 101–110.

34. Lighthill M.J. Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream neglecting viscosity and heat conduction // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1950. Vol. 3, No. 3. P. 303–325.

35. Mack L.M. Boundary layer stability theory // Document 900-277. Rev. A, Pasadena. California: JPL. 1969. 388 p.

36. Lees L., Reshotko E. Stability of the compressible laminar boundary layer // J. Fluid Mechanics. 1962. Vol. 12, No. 4. P. 555–590.

37. Ansys Fluent Theory Guide, Release 15.0. Ansys, Inc. 2015. 814 p.

38. Ha J.S., Shim S.H., Shin H.D. Boundary layer diffusion flame over a flat plate in the presence and absence of flow separation // Combustion Sci. and Technology. 2007. Vol. 75, No. 4–6. P. 241–260.

39. Volchkov E.P., Lukashov V.V., Terekhov V.V., Hanjalic K. Characterization of the flame blow-off conditions in a laminar boundary layer with hydrogen injection // Combustion and Flame. 2013. Vol. 160. P. 1999–2008.

40. Гапонов С.А. Влияние подвода тепла в узкую полосу пограничного слоя на его устойчивость // Прикл. механика и технич. физика. 2020. № 5. С. 5–13.

41. Гапонов С.А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при подводе тепла в его узкую полосу // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 3. С. 351–360.

42. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. Oslo, 1950. Vol. 17, No. 6. P. 1–52.

Статья поступила в редакцию 20 марта 2023 г.,
после доработки — 7 июля 2023 г.,
принята к публикации 17 августа 2023 г.