

УДК 550.837

Алгоритм решения обратной задачи геоэлектрики на основе нейросетевой аппроксимации*

М.И. Шимелевич¹, Е.А. Оборнев¹, И.Е. Оборнев², Е.А. Родионов¹

¹Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджаникидзе, ул. Миклухо-Маклая, 23, Москва, 117485

²Институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, строение 2, Москва, 119991

E-mails: Shimelevich-m@yandex.ru (Шимелевич М.И.), eugenyo@mail.ru (Оборнев Е.А.), o_ivano@mail.ru (Оборнев И.Е.), evgeny_980@mail.ru (Родионов Е.А.)

Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Алгоритм решения обратной задачи геоэлектрики на основе нейросетевой аппроксимации // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 451–468.

В работе представлен аппроксимационно нейросетевой алгоритм решения обратных задач геоэлектрики в классе сеточных (блочных) моделей сред. Алгоритм основан на построении приближенного обратного оператора с помощью нейронных сетей и позволяет формализованно получать решения обратной задачи геоэлектрики с общим числом искомых параметров среды $\sim n \cdot 10^3$. Рассматриваются вопросы корректности задачи построения нейросетевых обратных операторов. Вычисляются апостериорные оценки степени неоднозначности получаемых приближенных решений обратной задачи. Работа алгоритма иллюстрируется на примерах 2D, 3D инверсий синтезированных и полевых данных геоэлектрики, получаемых методом магнитотеллурических зондирований (МТЗ).

DOI: 10.15372/SJNM20180408

Ключевые слова: геоэлектрика, обратная задача, аппроксимация, априорные и апостериорные оценки, нейронные сети.

Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A. An algorithm for solving an inverse geoelectrics problem based on the neural network approximation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2018.— Vol. 21, № 4.— P. 451–468.

The approximation neural network algorithm for solving the inverse geoelectrics problems in the class of grid (block) media models is presented. The algorithm is based on constructing an approximate inverse operator using neural networks and makes it possible to formally obtain solutions of the inverse geoelectrics problem with the total number of desired parameters of the medium $\sim n \cdot 10^3$. The correctness of the problem of constructing the neural network inverse operators is considered. A posteriori estimates of the degree of ambiguity of the inverse problem solutions are calculated. The operation of the algorithm is illustrated by examples of the 2D, the 3D inversions of synthesized and field geoelectric data, obtained by the MTS method.

Keywords: geoelectrics, inverse problem, approximation, a priori and a posteriori estimates, neural networks.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00579).

1. Обратная задача геофизики в конечно-параметрических классах сред

Наиболее эффективный и распространенный на практике способ регуляризации в обратных задачах геофизики заключается в предварительной параметризации исследуемых сред, на основе имеющейся *априорной или гипотетической информации*, и поиске решения в конечно-параметрических классах сред. Искомые физические параметры реальных сред изменяются в конечных пределах, что, с учетом конечности набора входных данных, позволяет свести проблему поиска приближенного решения обратной задачи к численному решению конечномерного (в общем случае нелинейного) операторного уравнения на компактном множестве S_N [5, 6, 16, 18, 30]:

$$A_N s = e, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad e \in R^M, \quad M \geq N; \quad (1a)$$

$$S_N : [s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s], \quad n = 1, \dots, N,$$

где $s = (s^1, \dots, s^N)$ — искомый вектор параметров среды, каждый из которых может изменяться в заданном диапазоне значений $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$; $e = (e^1, \dots, e^M)$ — вектор входных данных; A_N — оператор (обычно непрерывный) численного решения прямой задачи в заданном конечно-параметрическом классе сред. В проекциях система (1a) имеет вид

$$A^m(s^1, \dots, s^N) = e^m, \quad m = 1, \dots, M, \quad M \geq N; \quad (1b)$$

$$s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N,$$

где $A^m(s^1, \dots, s^N)$, $m = 1, \dots, M$, — координатные функции оператора. В данной работе рассматривается, как наиболее универсальная при дефиците априорной информации, сеточная (блочная) параметризация среды [5, 12, 18]. В этом случае проекциями s^n вектора параметров среды являются значения искомой характеристики среды в ячейках (блоках) заданной сетки параметризации θ_N , построенной путем объединения, по какому-либо закону, ячеек исходной конечно-разностной сетки θ_{N_0} размерности N_0 , на которой решается прямая краевая задача. В случаях когда имеется дополнительная априорная информация о строении исследуемой среды, могут использоваться другие типы параметризации и более узкие множества S_N допустимых решений, например вида $s_{\min}^n \leq s^n \leq s_{\min}^n + D_s^n$, $n = 1, \dots, N$.

2. Аппроксимационный метод решения нелинейных операторных уравнений типа (1)

Суть аппроксимационного подхода к решению уравнения (1) (здесь и далее (1) — это обе формы записи (1a) и (1b)) заключается в том, что строится приближенный обратный оператор, который позволяет получать решения уравнения для любой правой части $e \in R^M$ с помощью некоторой, заданной в аналитическом виде, простой в вычислительном плане векторной функции $\Psi(\hat{a}, e) = (\Psi^1, \dots, \Psi^N)$ от M переменных e^1, \dots, e^M [16, 18]. Функцию $\Psi(\hat{a}, e)$ называют *аппроксиматором (интерполятором) инверсии* для уравнения (1). Координатные функции $\Psi^n(a^{n1}, \dots, a^{nJ}, e^1, \dots, e^M)$ зависят (в общем случае нелинейно) от некоторых свободных коэффициентов a^{n1}, \dots, a^{nJ} , $n = 1, \dots, N$, составляющих матрицу $\hat{a} = \{a^{nj}\}$ размерности $N_\Psi = N \cdot J$ аппроксиматора $\Psi(\hat{a}, e)$ (обычно предполагается непрерывность и дифференцируемость функций Ψ^n по

переменным a^{nj} , e^n). Для определения свободных коэффициентов решается задача построения (обучения) аппроксиматора $\Psi(\hat{a}, e)$. С помощью оператора A_N для заданного (представительного) набора S_{bs} векторов параметров $s_q \in S_{bs}$, $q = 1, \dots, I_{bs}$, отобранных по какому-либо правилу из множества S_N , рассчитывается соответствующий набор E_{bs} векторов $e_q = A_N s_q$, $q = 1, \dots, I_{bs}$, и формируется множество $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, I_{bs})$ опорных решений (прямых и обратных) задач для уравнения (1), которое называют *банком решений* [6]. Аппроксиматор $\Psi(\hat{a}, e)$ должен выполнять функцию приближенного обратного оператора для (1), поэтому коэффициенты матрицы $\hat{a} = \{a^{nj}\}$ подбираются так, чтобы на множестве \mathbb{Q}_{bs} приближенно выполнялись равенства:

$$\Psi(\hat{a}, e_q) = s_q, \quad s_q, e_q \in \mathbb{Q}_{bs}, \quad q = 1, \dots, I_{bs}. \quad (2a)$$

Переходя к проекциям, из (2a) получаем систему уравнений *задачи обучения аппроксиматора* $\Psi(\hat{a}, e)$ относительно коэффициентов матрицы $\hat{a} = \{a^{nj}\}$:

$$\Psi^n(a^{n1}, \dots, a^{nJ}, e_q) = s_q^n, \quad n = 1, \dots, N, \quad q = 1, \dots, I_{bs}, \quad M_Q \geq N_\Psi, \quad a^{nj} \in Q_\Psi, \quad (2б)$$

где $M_Q = N \cdot I_{bs}$ — общее число уравнений, которое должно быть не меньше общего числа $N_\Psi = N \cdot J$ коэффициентов аппроксиматора; Q_Ψ — множество допустимых значений коэффициентов $a_{\min}^{nj} \leq a^{nj} \leq a_{\max}^{nj}$, $n = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, J$, границы которого определяются из физических соображений. Система (2б) в общем случае является несовместной, поэтому для нее ищется квазирешение. При использовании, например, среднеквадратичной нормы задача поиска квазирешения системы (2б) решается методом наименьших квадратов и сводится к минимизации функционала ошибки:

$$\varepsilon_{\text{err}}(\hat{a}) = \sum_{q=1}^{I_{bs}} \sum_{n=1}^N (s_q^n - \Psi^n(a^{n1}, \dots, a^{nJ}, e_q))^2 \rightarrow \min_{a^{nj}}, \quad s_q, e_q \in \mathbb{Q}_{bs}, \quad a^{nj} \in Q_\Psi. \quad (3)$$

Решение a_0^{nj} , $n = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, J$, оптимизационной задачи (3) определяет матрицу $\hat{a}_0 = \{a_0^{nj}\}$ искомых коэффициентов обученного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$. Обученный аппроксиматор инверсии $\Psi(\hat{a}_0, e)$ для правых частей $e = e_q \in E_{bs}$, совпадающих с точками множества \mathbb{Q}_{bs} (согласно алгоритму построения), вычисляет решение обратной задачи (1) с минимальной невязкой. Для правых частей $e \notin E_{bs}$ в качестве приближенного решения принимаются значения функции аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$ (как значения интерполирующей функции между опорными точками). Таким образом, с помощью обученного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$ могут быть получены приближенные решения \tilde{s} уравнения (1) при любой заданной правой части $e \in R^M$ в виде:

$$\tilde{s} = \Psi(\hat{a}_0, e), \quad e \in R^M. \quad (4)$$

Аппроксиматор инверсии $\Psi(\hat{a}_0, e)$ является приближенным численным обратным оператором для уравнения (1), представленным в аналитическом виде. Это позволяет *единообразно и быстро* (обычно за единицы секунд) *без задания первого приближения* вычислять приближенное решение обратной задачи в заданном классе сред для любой правой части $e \in R^M$, что является основным достоинством аппроксимационного метода решения нелинейных операторных уравнений вида (1).

2.1. Оценка погрешности аппроксимационного метода

Решение обратной задачи (1), получаемое с помощью аппроксиматора инверсии $\Psi(\hat{a}_0, e)$, по своему смыслу является аппроксимационно-интерполяционным. Обозначим через s_T точное решение уравнения (1) при точно заданной правой части $e_T = A_N s_T$, а через $s_\Psi = \Psi(\hat{a}_0, e_T)$ — приближенное решение, полученное для точной правой части e_T с помощью аппроксиматора инверсии. Ошибка решения $\|s_\Psi - s_T\|_{R^N}$ за счет неточности обратного оператора отлична от нуля даже при точной правой части (1) и не может превышать величины $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0)$ собственной интерполяционной ошибки обученного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$, которая определяется как максимальная ошибка по всему множеству S_N решений уравнения (1), полученных с помощью аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$ при точной правой части [18],

$$\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0) = \max_s \|\Psi(\hat{a}_0, A_N s) - s\|_{R^N}, \quad s \in S_N. \quad (5a)$$

Наряду с общей интерполяционной ошибкой $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0)$ аппроксиматора по всей совокупности параметров на основе (5a) может быть вычислена интерполяционная ошибка $\varepsilon_{\Psi_i}(\hat{a}_0)$ для выделенной i -й группы параметров, например для параметров i -го яруса сетки параметризации θ_N .

Если правая часть (1) задана с некоторой погрешностью χ уровня δ_0 : $e = A_N s_T + \chi$, $\|\chi\|_{R^M} \leq \delta_0$, а $s_{\Psi\delta_0} = \Psi(\hat{a}_0, A_N s_T + \chi)$ — соответствующее интерполяционное решение, то общая ошибка $\|s_{\Psi\delta_0} - s_T\|_{R^N}$ решения $s_{\Psi\delta_0}$ ограничена величиной $\varepsilon_{\Psi\delta_0}(\delta_0, \hat{a}_0)$, определяемой из решения экстремальной задачи вида

$$\varepsilon_{\Psi\delta_0}(\hat{a}_0) = \max_{s, \chi} \|\Psi(\hat{a}_0, (A_N s + \chi)) - s\|_{R^N}, \quad s \in S_N, \quad \chi \in R^M, \quad \|\chi\|_{R^M} \leq \delta_0. \quad (5b)$$

Очевидно, что $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0) \leq \varepsilon_{\Psi\delta_0}(\hat{a}_0)$, и при $\delta_0 = 0$ оценка $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0)$ совпадает с $\varepsilon_{\Psi\delta_0}(\delta_0, \hat{a}_0)$. Для приближенного расчета величин $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0)$, $\varepsilon_{\Psi\delta_0}(\hat{a}_0)$ формируется независимое *тестирующее* множество решений уравнения (1), не использовавшихся при обучении аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$.

2.2. Аппроксимационно-итерационный метод

Аппроксимационный метод не минимизирует в явном виде невязку решения для заданной фиксированной правой части уравнения (1). Уменьшение невязки интерполяционного решения может быть достигнуто за счет улучшения интерполяционных свойств используемых конструкций, увеличения числа опорных точек множества опорных решений, а также за счет проведения уточняющих итераций на основе *аппроксимационно-итерационного метода* [18]. Суть метода заключается в построении *новых уточняющих аппроксиматоров*, обученных на более узких множествах опорных решений, лежащих в окрестности приближенных решений, получаемых на предыдущей итерации.

2.3. Вопросы корректности задачи обучения аппроксиматора инверсии

Рассмотрим *систему* уравнений (2б) *задачи обучения* аппроксиматора $\Psi(\hat{a}, e)$ с позиций теории некорректных задач. Искомые коэффициенты $a^{nj} \in Q_\Psi$ аппроксиматора изменяются в конечных пределах $a_{\min}^{nj} \leq a^{nj} \leq a_{\max}^{nj}$, а координатные функции Ψ^n в (2б) непрерывно зависят от этих коэффициентов. Поэтому у системы (2б) при любой правой части существует квазирешение, которое в общем случае не является единственным [9]. Это означает, что задача обучения аппроксиматора является некорректно поставленной

в силу отсутствия *единственности*. Практически это проявляется в том, что функционал ошибки $\varepsilon_{\text{err}}(\hat{a})$ в экстремальной задаче (3) может обладать многими одинаковыми по величине глобальными минимумами.

Обозначим через $G_a \subset Q_\Psi$ множество квазирешений системы (2б) при заданной правой части, которое при условии непрерывности координатных функций Ψ^n по a^{nj} является компактным [9]. Различные квазирешения задачи (2б) из множества G_a определяют различные наборы коэффициентов $\hat{a} = \{a^{nj}\}$ и соответствующие им различные аппроксиматоры $\Psi(\hat{a}, e)$ инверсии, которые будут давать различные аппроксимационно-интерполяционные решения обратной задачи (1) при одной и той же правой части $e \in R^M$. Целью задачи обучения является построение аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$ инверсии с минимальной приемлемой для практики величиной интерполяционной ошибки $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_0)$ вида (5а). Поэтому из множества квазирешений G_a системы (2б) следует выделить такое квазирешение, т.е. такой набор коэффициентов $\hat{a}_{\min} = \{a_{\min}^{nj}\}$, при котором собственная интерполяционная ошибка $\varepsilon_\Psi(\hat{a}_{\min})$ аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_{\min}, e)$ инверсии будет минимальна:

$$\varepsilon_\Psi(a^{nj}) \rightarrow \min_{a^{nj} \in G_a} . \quad (6)$$

Решение задачи (6) существует (в силу компактности G_a и непрерывной зависимости $\varepsilon_\Psi(a^{nj})$ от a^{nj}), но также может быть неединственным, однако нас устраивает любое ее решение, так как оно дает набор коэффициентов для аппроксиматора инверсии с минимальной интерполяционной ошибкой. Для выполнения требования (6) в алгоритм задачи обучения должны включаться процедуры “просмотра” множества G_a .

Координатные функции аппроксиматора инверсии $\Psi(\hat{a}_0, e)$ непрерывно зависят от входных данных $e = (e^1, \dots, e^M)$, что обеспечивает устойчивость приближенных решений обратной задачи, получаемых с помощью $\Psi(\hat{a}_0, e)$, в заданном классе сред.

2.4. Аппроксимационный нейросетевой метод

Аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод является представителем группы аппроксимационных методов решения обратных задач. В качестве координатных функций аппроксиматора инверсии в АНС методе используются аппроксимационные конструкции, называемые нейронными сетями. Простейшей, и вместе с тем наиболее применяемой на практике, является трехслойная нейронная сеть (персептрон) [14]. С ее помощью *координатные функции* Ψ^n нейросетевого (НС) аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$ представляются в виде:

$$\Psi^n(V, W, e^1, \dots, e^M) = \sum_{l=1}^L v^{nl} \lambda \left(\sum_{m=1}^M w^{lm} e^m \right), \quad n = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где $\lambda(x)$ — заданная (в общем случае нелинейная) ограниченная монотонно возрастающая дифференцируемая функция (функция активации), например $\lambda(x) = 1/(1 + e^{-x})$. Коэффициенты v^{nl} , w^{lm} матриц V , W определяют свободные коэффициенты НС аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$ данного типа, а параметр L — его сложность и размерность матриц коэффициентов V , W . Общее число N_Ψ свободных коэффициентов НС аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$ составляет $N_\Psi = L(M + N)$. Широкое использование нейросети вида (7) на практике обусловлено, с одной стороны, простотой конструкции нейросети, представляющей собой функцию M переменных в виде суперпозиций непрерывных функций

одного переменного и их линейных комбинаций, с другой стороны, — тем, что произвольная непрерывная функция M переменных может быть аппроксимирована трехслойной нейросетью вида (7) с любой заданной точностью при достаточно большом L [19]. Для нелинейных зависимостей трехслойные сети не являются оптимальными аппроксимирующими конструкциями, поэтому на практике часто применяются многослойные нейросети с более сложной архитектурой [14].

НС методы в обратных задачах геофизики. Общая концепция применения НС технологий в задачах обработки и интерпретации геофизических данных изложена в обзорной работе [27]. Примеры решения *обратной задачи геоэлектрики* с использованием нейросетей представлены в работах [22, 26]. В этих работах нейронные сети используются для решения малопараметрических обратных задач геоэлектрики в рамках 1D слоистой модели. Первые результаты применения нейронных сетей для решения обратных задач *геоэлектрики* в горизонтально-неоднородных средах были представлены в работах [13, 28]. В этих работах было показано, что с помощью нейронных сетей могут быть получены приближенные решения обратных задач геоэлектрики с числом искомых параметров порядка $N \sim 10 \div 15$. Адаптация общих методов построения НС аппроксиматоров инверсии к особенностям решаемой задачи и разработка усовершенствованных модификаций НС метода с использованием алгоритмов Монте-Карло позволили авторам настоящей работы обобщить АНС метод на случай 2D, 3D сред, геоэлектрические свойства которых определяются числом параметров $N \sim n \cdot 10^2 \div n \cdot 10^3$ [16, 18]. В работе [16] показано, что нейросетевой аппроксиматор можно рассматривать как *электронную НС палетку* по аналогии с классическими геоэлектрическими палетками [2, 7].

Аппроксимационный НС метод может быть применен также для решения обратных задач, связанных с другими геофизическими методами, которые сводятся к уравнению типа (1).

3. Схема АНС алгоритма решения обратной задачи геоэлектрики

Классическая обратная задача геоэлектрики в классе конечно-параметрических моделей сред сводится к решению операторного уравнения вида (1) [6] и, согласно классификации [23], относится к типу *плохо обусловленных коэффициентных* обратных задач. При сеточной параметризации, рассматриваемой в данной работе, проекциями искомого вектора $s = (s^1, \dots, s^N)$ параметров среды являются значения логарифмов удельного сопротивления ρ_n среды $s^n = \lg \rho_n$, $n = 1, \dots, N$, в ячейках сетки θ_N параметризации. В качестве входных данных, определяющих правую часть $e = (e^1, \dots, e^M)$ уравнения (1), используются значения компонент тензора импеданса Z , типпера W (вектора Визе–Паркинсона) или иные передаточные функции магнитотеллурического (МТ) поля, заданные на поверхности Земли ($z = 0$) в диапазоне частот [1], получаемые методом магнитотеллурических зондирований (МТЗ). Оператор A_N является численным оператором решения прямой задачи геоэлектрики в классе сеточных моделей сред.

3.1. Укрупненная схема АНС алгоритма решения обратной задачи геоэлектрики

Алгоритм АНС метода включает шесть основных блоков.

I. Численное решение прямой задачи геоэлектрики. Численный оператор решения прямой задачи (1) строится на основе системы уравнений Максвелла в диффузном (квазистационарном) приближении [1, 11]. При гармоническом возбуждении во времени

$e^{-i\omega t}$ система Максвелла сводится к уравнениям вида:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H(r, \omega) = \sigma(r) E(r, \omega), \\ \operatorname{rot} E(r, \omega) = i\omega\mu_0 H(r, \omega), \end{cases} \quad r = (x, y, z) \in \Omega_f. \quad (8)$$

При численном решении прямых задач исследуемая область Ω со всех сторон, включая воздух, дополняется переходными зонами до полной области Ω_f для постановки граничных условий, обеспечивающих корректную разрешимость соответствующей краевой задачи геоэлектрики [1]. В двумерном случае ($\partial/\partial y = 0$) система (8) распадается на две независимые группы уравнений, определяющие два типа 2D полей (ТЕ- и ТМ-моды), для которых ставятся соответствующие краевые задачи. На основе численного решения краевых задач для системы (8) и последующих преобразований вычисляются компоненты тензора импеданса Z , типпера W и других передаточных функций МТ поля, используемых при интерпретации.

II. Построение модельного класса сред на основе эффективной сеточной параметризации. На основе исходной конечно-разностной сетки θ_{N_0} прямой задачи размерности N_0 в исследуемой области Ω строится укрупненная регуляризованная сетка параметризации $\theta_{N_{\max}}$ максимальной размерности $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ и соответствующий ей модельный класс сред и множество допустимых решений $S_{N_{\max}}$ таким образом, чтобы численная оценка модуля непрерывности обратного оператора $\beta_{N_{\max}}(2\delta_0)$ для уравнения (1), рассматриваемого на множестве $S_{N_{\max}}$, не превышала заданной величины ε_0 при заданном уровне допустимой невязки (погрешности данных) δ_0 [17, 18]:

$$\beta_{N_{\max}}(2\delta_0) \leq \varepsilon_0. \quad (9)$$

Методы расчета оценок $\beta_{N_{\max}}$, основанные на алгоритмах Монте-Карло, рассмотрены в [17, 18].

III. Построение (обучение) НС аппроксиматора инверсии.

а. Формирование множества опорных решений прямых задач. В соответствии с пунктом 2 для определения свободных коэффициентов и параметров НС аппроксиматора инверсии формируется множество $\mathbb{Q}_{\text{bs}}(S_{\text{bs}}, E_{\text{bs}}, I_{\text{bs}})$ опорных решений $\{s_q, e_q\}$, $s_q \in S_{\text{bs}}$, $e_q = A_N s_q \in E_{\text{bs}}$, $q = 1, \dots, I_{\text{bs}}$, где s_q — вектор параметров q -го варианта строения среды в исследуемой области Ω ; $e_q = A_N s_q$ — векторы, составленные из компонент передаточных функций МТ поля, которые вычисляются в соответствии с блоком I, на основе решения прямой задачи геоэлектрики. При решении прямой задачи исследуемая область Ω , в соответствии с блоком I, дополняется переходной зоной до полной области Ω_f . Параметры переходной зоны меняются для каждого q -го варианта строения модели, чтобы уменьшить влияние среды, окружающей исследуемую область Ω , на свойства обучаемого аппроксиматора. Размерность N векторов параметров среды в исследуемой области Ω может определяться сотнями значений и более, поэтому при построении множества \mathbb{Q}_{bs} опорных примеров применяются методы Монте-Карло, которые широко используются для решения прямых и обратных задач геофизики в сочетании с параллельными вычислениями на высокопроизводительных кластерах (см., например, [10]). Проекция векторов изменяется случайно по равномерному закону, что обеспечивает *равномерное заполнение опорными примерами* всего множества допустимых решений обратной задачи. Множество \mathbb{Q}_{bs} делится на три части: \mathbb{Q}^{Est} , \mathbb{Q}^{Val} , \mathbb{Q}^{Tst} — в пропорциях 70%–20%–10% соответственно, где $\mathbb{Q}^{\text{Est}}\{s_q, e_q\}$, $q = 1, \dots, I^{\text{Est}}$, — подмножество для оценивания (estimation set) целевого функционала задачи обучения НС аппроксиматора;

$\mathbb{Q}^{\text{Val}}\{s_q, e_q\}$, $q = 1, \dots, I^{\text{Val}}$, — подмножество для проверки (validation set) интерполяционных свойств НС аппроксиматора в процессе обучения; $\mathbb{Q}^{\text{Tst}}\{s_q, e_q\}$, $q = 1, \dots, I^{\text{Tst}}$, — подмножество для тестирования (test set) обученного НС аппроксиматора и расчета его собственной интерполяционной ошибки.

б. Оптимизационная задача обучения НС аппроксиматора инверсии. Для простоты изложения схему алгоритма решения оптимизационной задачи (3) обучения проиллюстрируем на примере НС аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$, координатные функции которого определяются трехслойной сетью (7). Целевой функционал ошибки $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ задачи обучения для НС аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$ на подмножестве оценивания \mathbb{Q}^{Est} определяется выражением:

$$\varepsilon_{\text{Est}}(V, W) = \frac{1}{I^{\text{Est}}} \sum_{q=1}^{I^{\text{Est}}} \sum_{n=1}^N (s_q^n - \Psi^n(V, W, e_q))^2, \quad (s_q, e_q) \in \mathbb{Q}^{\text{Est}}. \quad (10a)$$

Функционал $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ в общем случае является многоэкстремальным. Для оценки текущих значений величины собственной интерполяционной ошибки $\varepsilon_{\Psi}(V, W)$ используется проверочный функционал $\varepsilon_{\text{Val}}(V, W)$, определенный на множестве \mathbb{Q}^{Val} ,

$$\varepsilon_{\text{Val}}(V, W) = \frac{1}{I^{\text{Val}}} \sum_{q=1}^{I^{\text{Val}}} \sum_{n=1}^N (s_q^n - \Psi^n(V, W, e_q))^2, \quad (s_q, e_q) \in \mathbb{Q}^{\text{Val}}. \quad (10b)$$

Задача обучения, таким образом, сводится к поиску коэффициентов v^{nl}, w^{lm} аппроксиматора $\Psi(V, W, e)$, при которых функционалы $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$, $\varepsilon_{\text{Val}}(V, W)$ одновременно достигают минимальных значений. На практике для решения этой задачи задается некоторая желаемая величина собственной интерполяционной ошибки $\varepsilon_{\Psi\nu}(V, W)$ и решается задача условной минимизации целевого функционала $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ вида:

$$\varepsilon_{\text{Est}}(V, W) \rightarrow \min_{v^{nl}, w^{lm}}, \quad v^{nl}, w^{lm} \in Q_{\Psi} \quad (11a)$$

при

$$\varepsilon_{\text{Val}}(V, W) = \varepsilon_{\Psi\nu}. \quad (11b)$$

Так как априори величина минимальной собственной интерполяционной ошибки $\varepsilon_{\Psi 0}(V, W)$ неизвестна, то на практике решается некоторое семейство задач (11a), (11b) с различными значениями $\varepsilon_{\Psi\nu}$, $\nu = 1, \dots$, и затем выбирается решение с минимальными значениями функционалов $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$, $\varepsilon_{\text{Val}}(V, W)$.

Строгое обоснование методов решения многоэкстремальных задач типа (11a), (11b) в большинстве случаев затруднительно. Поэтому, для того чтобы приспособить стандартные методы оптимизации для решения задачи обучения, приходится их комбинировать с неформальными эвристическими подходами. Отметим основные приемы, которые применяются в данной работе при решении задачи обучения.

Алгоритм минимизации. Целевой функционал (11a) задан в аналитическом виде и легко дифференцируется, поэтому для решения задачи минимизации функционала $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ применяется наиболее распространенный на практике метод стохастического градиента [3, 14], который является модификацией классического градиентного метода. Производные функционала $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ рассчитываются на основе алгоритма обратного распространения ошибки ВРЕ (*Back Propagation Error*) [4, 14, 29].

Для выхода процесса минимизации из локальных минимумов и “просмотра” множества глобальных минимумов применяются приемы, основанные на методах случайного

поиска. Основными среди таких правил, применительно к задаче обучения, являются случайные изменения (сдвиги) текущих значений свободных коэффициентов при попадании в область минимума, а также многократное проведение “повторных пусков” процесса оптимизации при новых начальных значениях свободных коэффициентов [3, 14]. Для контроля над выполнением ограничений (11б) в процессе минимизации через определенное число итераций вычисляется значение проверочного функционала $\varepsilon_{\text{Val}}(V, W)$ текущих значений свободных коэффициентов. Идеальным критерием завершения процесса обучения является стабилизация проверочного функционала $\varepsilon_{\text{Val}}(V, W)$ на малых значениях при минимальных значениях функционала оценивания $\varepsilon_{\text{Est}}(V, W)$ на протяжении достаточно большого числа итераций. Все текущие значения матриц свободных коэффициентов аппроксиматора, при которых обнаруживаются указанные признаки — “подозрительные точки”, запоминаются. После проведения серии повторных пусков все удачные варианты коэффициентов аппроксиматора сравниваются путем проверки работы аппроксиматоров на независимом тестовом подмножестве \mathbb{Q}^{Tst} и выбирается такой набор коэффициентов, для которого соответствующий НС аппроксиматор инверсии дает минимальную собственную интерполяционную ошибку ε_{Ψ} .

в. Оптимизация размерностей входного и выходного векторов нейросети. Локальные НС аппроксиматоры инверсии. Для уменьшения размерности задачи обучения сети производится предварительное сжатие данных и определение оптимальных размерностей входного и выходного векторов нейросети с учетом специфики решаемой задачи. Возможность использования сжатых данных для решения обратной задачи геоэлектрики, как задача частичной инверсии на основе неполных данных с помощью локальных НС аппроксиматоров инверсии, была рассмотрена в работе [16] и численно реализована в работах [18, 20]. Полученные в этих работах результаты позволили существенно понизить размерность задачи обучения (на 2 порядка и более) и одновременно уменьшить интерполяционную ошибку получаемых НС аппроксиматоров инверсии, что в целом повышает эффективность НС метода.

г. Выбор оптимальной структуры нейросети. При решении задачи оптимизации структуры нейросети проявляется основное противоречие между сложностью сети и ее интерполяционными возможностями: простые сети с малым числом свободных параметров характеризуются большой интерполяционной ошибкой, сложные сети дают меньшую ошибку, но труднее обучаются. Критерием выбора наилучшей архитектуры нейросети служит величина собственной интерполяционной ошибки по экзаменационной выборке. Наилучшие результаты, применительно к рассматриваемым задачам геоэлектрики, показали *пятислойные* сети с количеством нейронов в скрытых k -х слоях $L_k = 32, 16, 8$; $k = 1, 2, 3$.

д. Оценка влияния размерности I_{bs} множества опорных решений. Для реальных геоэлектрических сред, характеризующихся большим числом параметров с широкими диапазонами изменения, размерность обучающего множества I_{bs} может достигать десятков тысяч решений прямых задач, и ее построение требует использования техники параллельных вычислений и использования суперкомпьютерных вычислительных средств. Расчеты показали, что приемлемые для практики интерполяционные свойства НС аппроксиматоров для задач геоэлектрики могут быть получены при $I_{\text{bs}} \sim 10000$ для 2D задач и $I_{\text{bs}} \sim 20000 \div 25000$ для 3D задач.

е. Эталонные ошибки обученного НС аппроксиматора инверсии. Цифровые НС палетки геоэлектрики. После полного завершения всех циклов обучения НС аппроксиматор инверсии применяется к данным независимого *тестирующего* множе-

ства Q^{Tst} и, в соответствии с (5а), производится расчет собственной интерполяционной ошибки аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e_i)$. При этом в пространстве решений R^N использовалась норма вида

$$\|x\|_{l_1}^N = \frac{1}{N D_s} \sum_{n=1}^N |x_n|. \quad (12)$$

Кроме того, рассчитываются средние ошибки аппроксиматора ε_{Ψ_i} по каждому ярусу сетки параметризации. Обученный и протестированный аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0, e_i)$ позволяет решать обратную задачу геоэлектрики в классе сеточных моделей сред, определяемом фиксированной макросеткой $\theta_{N_{\max}}$ параметризации, покрывающей исследуемую область Ω , и диапазоном $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ допустимых значений искоемых параметров среды s^1, \dots, s^N в ячейках сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}$ для заданного набора используемых для инверсии характеристик поля.

IV. НС инверсия наблюдаемых данных. Расчет невязки решения обратной задачи. Измеренные натурные данные — характеристики МТ поля — предварительно обрабатываются. Процесс обработки измеренных данных включает интерполяцию и пересчет данных на пространственно-частотную сетку аппроксиматора, а также сглаживание данных. Затем данные упорядочиваются в виде общего вектора $e = (e^1, \dots, e^M)$. К полученному вектору данных применяется обученный НС аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0, e)$ инверсии и, в соответствии с (4), вычисляется приближенное решение \tilde{s} обратной задачи в исследуемой области Ω единообразно для любой правой части $e \in R^M$ уравнения (1) без задания первого приближения. Время инверсии данных с помощью обученного аппроксиматора определяется скоростью вычисления функции используемой нейросети и обычно составляет первые секунды. Для полученного решения \tilde{s} обратной задачи вычисляется невязка

$$\delta = \|A_N \tilde{s} - e\|_{R^N}. \quad (13)$$

При расчете невязки используется евклидова норма в пространстве R^M с весом

$$\|x\|_{l_2, b}^M = \sqrt{\sum_{m=1}^M b_m x_m^2}, \quad (14)$$

где $b = (b_1, \dots, b_M)$, $b_m > 0$, $m = 1, \dots, M$, — заданный весовой вектор, принимающий различные значения для различных характеристик поля, определяемые по множеству опорных решений.

Примечание. Так как при обучении аппроксиматора варьируются параметры переходных зон (см. пп. а в III), то обученный НС аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0, e)$ в значительной мере адаптирован к неизвестным свойствам среды, окружающей область исследований Ω . Поэтому при практической интерпретации длинных 2D профилей, превышающих горизонтальные размеры пространственной сетки аппроксиматора, 2D аппроксиматор инверсии можно применять методом скольжения вдоль профиля при сохранении всех остальных параметров аппроксиматора. Аналогичным образом можно поступать и при 3D интерпретации площадных данных геоэлектрики путем скольжения исходного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, e)$ по площади измерений.

V. Построение уточняющих НС аппроксиматоров. Уменьшение невязки полученного интерполяционного решения возможно путем построения уточняющих НС аппроксиматоров на основе аппроксимационно-итерационного нейросетевого (АИНС) метода [18].

VI. Расчет оценок степени неоднозначности решения. Для найденного с невязкой δ интерполяционного решения \tilde{s} уравнения (1) строится векторная характеристика степени неоднозначности $\beta_1^i(e, \tilde{s}, \delta)$, $i = 1, \dots, I$, показывающая на сколько могут отклоняться различные δ -эквивалентные решения от найденного \tilde{s} в пределах каждого i -го яруса (горизонтального слоя) сетки параметризации,

$$\beta_1^i(e, \tilde{s}, \delta) = \max_{s'_i \in S_i} \|s'_i - \tilde{s}\|_{R^N} \quad \text{при} \quad \|A_N s'_i - e\|_{R^M} \leq \delta, \quad i = 1, \dots, I, \quad (15)$$

где S_i — множество, определяемое условиями: $s'_i \in S_i$, если $s'_i = \tilde{s} + \Delta s_i$, $\Delta s_i \in S_i^*$; S_i^* — подмножество векторов параметров, проекции которых отличны от нуля только в ячейках сетки параметризации, принадлежащих i -му ярусу параметризации; I — общее число ярусов сетки параметризации. Методы расчета оценок β_1^i , основанные на алгоритмах Монте-Карло, рассмотрены в [17, 18].

3.2. Используемые программные коды

Расчет прямых 2D задач геоэлектрики (моделирование множества Q_{bs}) проводится на основе вычислительного комплекса МТ-Геос (авторы: М.И. Шимелевич, М.В. Дмитриева [8]). В нем применяются методы, аналогичные приведенным в работе [21] и обобщенные на случай комплексных коэффициентов матрицы задачи. Для массивных вычислений используется версия программы МТ-Геос-Parallel (авторы: М.И. Шимелевич, Е.А. Оборнев), в которой модуль расчета прямой задачи распараллеливается на множество выделенных процессорных узлов. Для расчета прямых 3D задач геоэлектрики используется программа MTD3FWD (автор R.L. Mackie [25]), процедуры ввода и вывода которой модернизированы для целей массивных параллельных вычислений. При построении множеств опорных решений задач используются суперкомпьютерные кластеры. Время расчета прямых 2D задач всего множества Q_{bs} ($I_{bs} = 10000$ примеров) составляет ~ 144 часа на одном вычислительном узле (ЦПУ) и ~ 416 часов — для 3D задач ($I_{bs} = 25000$ примеров). При использовании суперкомпьютерного кластера МВС-6000IM МСЦ РАН время расчета сокращается кратно числу выделяемых вычислительных узлов.

Для обучения НС аппроксиматоров инверсии в работе используются открытые программные коды [24] на алгоритмическом языке Фортран-77, адаптированные к особенностям решаемой задачи. Решения технических задач, связанных с выбором оптимальных параметров НС конструкции, получены с использованием программного комплекса из работы [20], который основан на технологии CUDA для графических процессоров GPU.

4. Численные примеры

В данном пункте приводятся примеры решения 2D, 3D обратных задач геоэлектрики для синтезированных и полевых данных.

4.1. Примеры НС инверсии синтезированных данных

2D инверсия. Модель 2D-K1. На рисунке 1а представлена модель 2D среды, заданная на регуляризованной сетке параметризации $\theta_{N_{\max}}$ (2D), для которой рассчитывались синтезированные данные. Число искомых параметров данной модели $N_2 = 315$.

На рис. 1б и рис. 1в представлены результаты инверсии синтезированных данных (1 итерация и 5 итераций соответственно). Для полученных решений считалась средне-взвешенная невязка решения $\bar{\delta}$ в соответствии с (13), (14). Средние ошибки $\bar{\varepsilon}_i$ решения по

параметрам для каждого i -го яруса сетки оценивались по формуле $\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{N_i D_s} \sum_{n=1}^{N_i} |\Delta s_n|$, где Δs_n — разность между истинным и найденным параметрами с номером n ; N_i — число параметров в i -м ярусе; $\bar{\varepsilon}$ — средняя ошибка по всем ярусам. Оценки степени неоднородности β_1^i решения вида (15) получены для каждого яруса, $\bar{\beta}_1$ — средняя величина по всем ярусам (рис. 1г).

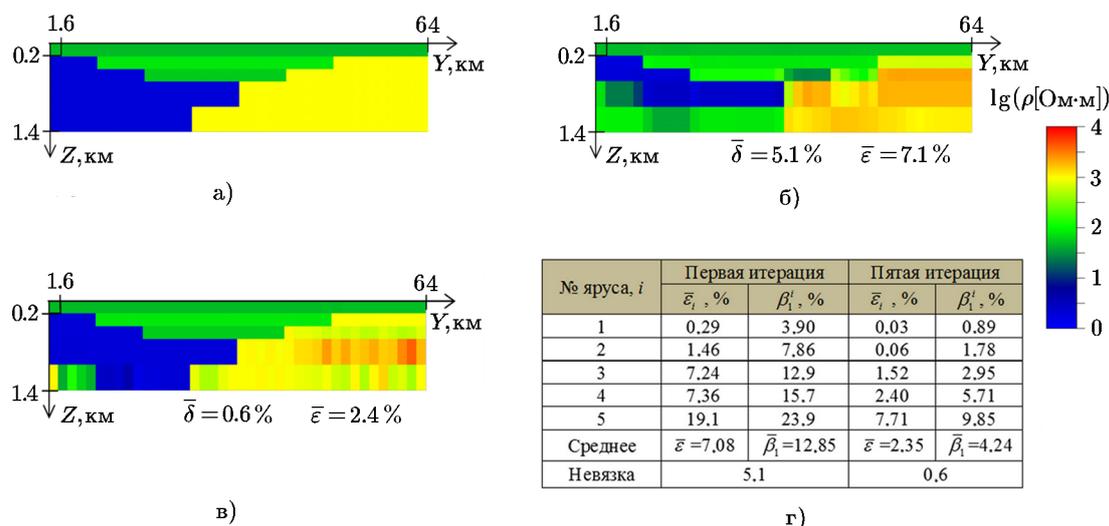


Рис. 1. Результаты инверсии для модели 2D-K1: а) исходная модель 2D-K1; б) результат инверсии с помощью универсального аппроксиматора Π_1^K (2D) на первой итерации; в) результат инверсии после пятой итерации; г) результаты оценки инверсии синтезированных данных

На рис. 2а и рис. 2б представлены результаты по всем пяти итерациям в виде графиков величин ошибок $\bar{\varepsilon}_i$, $\bar{\varepsilon}$ и невязки $\bar{\delta}$ в зависимости от номера итерации. Значения для первой итерации получены с помощью универсального НС аппроксиматора Π_1^K (2D), а дальнейшая серия итераций была рассчитана на основе уточняющих АИНС аппроксиматоров. Анализ графиков показывает, что применение АИНС метода для модели 2D-K1 позволяет уменьшить на пятой итерации среднюю ошибку решения в ~ 3 раза, а невязку — в ~ 8 раз. Средние апостериорные оценки также соответственно снижаются с 12.9% до 4.2%.

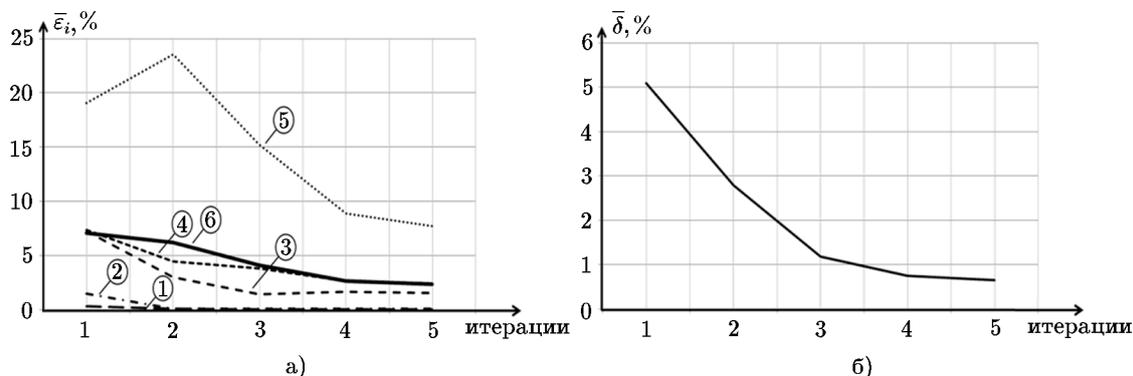


Рис. 2. Графики изменения в зависимости от номера итерации: а) ошибок инверсии $\bar{\varepsilon}_i$ (цифрами в кружочках обозначены номера ярусов сетки параметризации, жирной линией с номером 6 — среднее значение $\bar{\varepsilon}_i$ ошибки инверсии по всем ярусам); б) невязки $\bar{\delta}$

3D инверсия. Модель 3D-K1. На рис. 3а изображена 3D модель среды на регуляризованной сетке параметризации $\theta_{N_{\max}}$ (3D), для которой рассчитывались синтезированные данные. Число искомых параметров $N_2 = 532$ данной модели определяется числом ячеек регуляризованной сетки параметризации в пределах 3D области, представленной на рис. 3а. На рис. 3б, рис. 3в представлен результат инверсии точных синтезированных данных на первой итерации. Изображения блочной модели среды для наглядности представлены в сглаженном виде на основе линейной интерполяции между блоками.

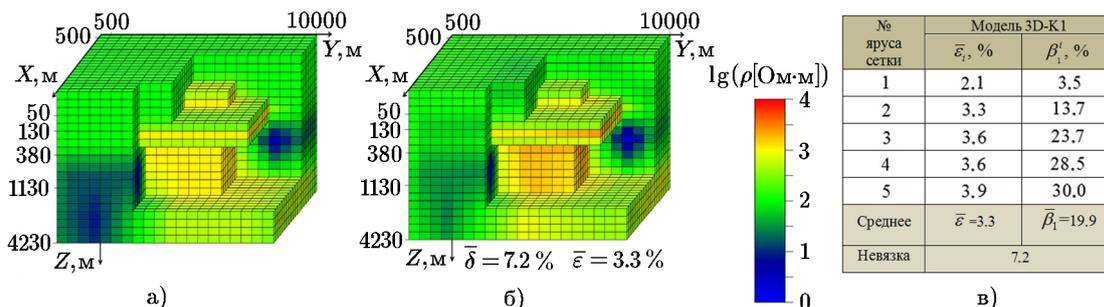


Рис. 3. Результаты инверсии для модели 3D-K1: а) исходная модель 3D-K1 с вырезанными фронтальными фрагментами; б) результаты инверсии с помощью универсального аппроксиматора Π_1^K (3D) на первой итерации; в) результаты оценки инверсии

4.2. Результаты 2D НС инверсии МТ полевых данных

В качестве примера НС инверсии полевых данных представлен участок профиля 2ДВ с 490 км до 1100 км [15]. На рис. 4а представлен результат НС инверсии полевых данных (предварительно обработанных с целью исключения шифт-эффектов и случайных выбросов по методике [15]). При решении обратной задачи на регуляризованной сетке параметризации было определено 1580 параметров в пределах рассматриваемой 2D области, представленной на рис. 4а. Первое приближение не задавалось. Невязки решения, вычисленные по отдельным участкам профиля, представлены на рис. 4а. Оценки степени неоднозначности решения обратной задачи по этим участкам изменяются от 6% до 22%. В целом по всему участку профиля невязка составила $\bar{\delta} = 11\%$, а степень неоднозначности решения обратной задачи (средняя по всем ярусам сетки) $\bar{\beta}_1 = 21.6\%$. Для сравнения на полученный геоэлектрический разрез (рис. 4а) нанесены независимые данные сейсморазведки (черные кривые). Видно, что границы геоэлектрических структур типа прогибов, выделенные в результате НС инверсии достаточно хорошо, сопоставимы с сейсмическими границами.

На рис. 4б представлены результаты независимой инверсии, проведенной Центром ЭМИ [15]. Сопоставление двух инверсий (рис. 4а и рис. 4б) показывает хорошее совпадение границ массивных плохо проводящих и хорошо проводящих структур, а также хорошую общую корреляцию результатов инверсий.

На выделенных черными прямоугольниками участках хорошее визуальное совпадение различных геоэлектрических структур подтверждается приемлемой для практики невязкой синтеза. На отдельных участках профиля проводилась вторая итерация АИНС метода. Например, на участке, выделенном пунктирной линией на рис. 4а длиной 100 км, средневзвешенная невязка на второй итерации снизилась с $\bar{\delta} = 12.1\%$ до $\bar{\delta} = 11.3\%$, а средние $\bar{\beta}_1$ по всем ярусам сетки апостериорные оценки уменьшаются с 21.6% до 20% (рис. 5).

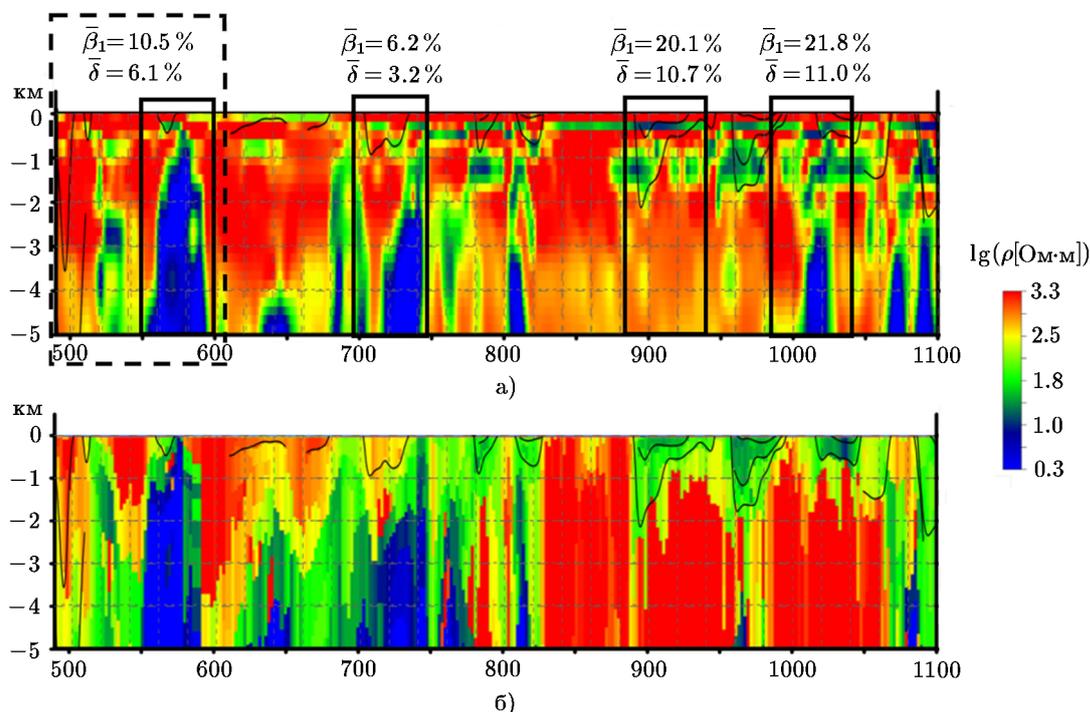


Рис. 4. Геоэлектрический разрез по региональному профилю 2ДВ (участок 490–1100 км): а) результаты НС инверсии, определено 1580 параметров; б) независимая инверсия Центра ЭМИ. Черными прямоугольниками отмечены отдельные участки для детального анализа

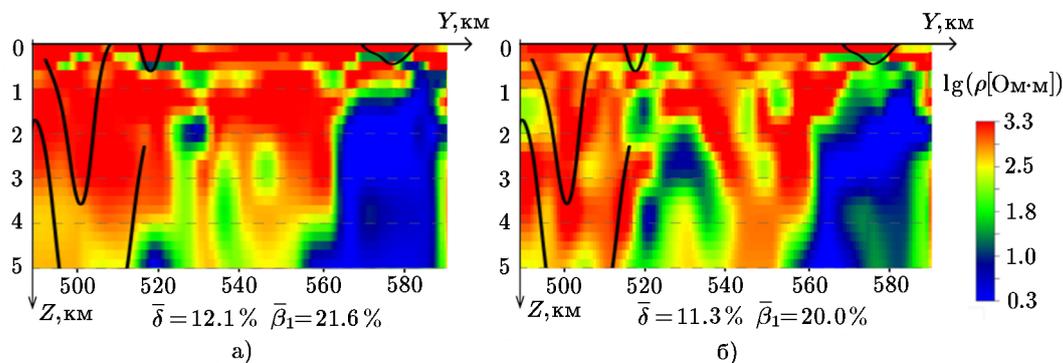


Рис. 5. Участок 100 км профиля 2ДВ, выделенный пунктирной линией на рис. 4а: а) первая итерация с универсальным аппроксиматором; б) вторая итерация с помощью уточняющего аппроксиматора

5. Выводы

1. Аппроксимационный нейросетевой метод и его модификации позволяют формализовано находить устойчивые приближенные решения обратных коэффициентных 2D, 3D задач геоэлектрики в классе сеточных моделей сред на *регуляризованной* сетке параметризации с приемлемой для практики точностью *без задания первого приближения*. Число определяемых параметров среды составляет $\sim n \cdot 10^3$.
2. Для получаемых приближенных решений обратной задачи могут быть вычислены оценки степени неоднозначности (погрешности), не зависящие от применяемого метода инверсии.

3. Развиваемые в работе подходы и методы существенно опираются на современную вычислительную технику типа суперкомпьютерных кластеров и технологии массивно-параллельных вычислений.

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

Литература

1. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Обратные задачи магнитотеллурики в современной постановке // Физика Земли. — 2004. — № 4. — С. 12–29; Перевод: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Inverse problems of magnetotellurics: A modern formulation // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2004. — Vol. 40, № 4. — P. 276–292.
2. Ваньян Л.Л., Бутковская А.И. Магнитотеллурическое зондирование слоистых сред. — М.: Недра, 1980.
3. Воронцов К.В. Лекции по искусственным нейронным сетям. — 2009. — <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/c/cc/Voron-ML-NeuralNets.pdf>.
4. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. — М.: Энергия, 1974.
5. Гласко В.Б., Гуцин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1976. — Т. 16, № 2. — С. 283–292.
6. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. — М.: МАКС Пресс, 2012.
7. Дмитриев В.И., Кокотушкин Г.А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. — М.: Изд-во МГУ, 1971.
8. Дмитриева М.В. Численное моделирование физических процессов в плазме установок токамак при воздействии электромагнитных волн альфвеновского диапазона частот: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. — М.: ИПМ АН СССР, 1985.
9. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. — 1963. — Т. 61, № 2. — С. 211–223.
10. Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Новиков Н.С. Алгоритмы определения упругих параметров по площадным системам наблюдений (прямая линейная обработка данных сейсмических наблюдений) // Вестник кибернетики. — 2016. — № 2. — С. 83–91.
11. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. — М.: Наука, 1991.
12. Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 344–347.
13. Спичак В.В., Попова И.В. Применение нейросетевого подхода для реконструкции параметров трехмерной геоэлектрической структуры // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 1998. — № 1. — С. 39–45; Перевод: Spichak V.V., Popova I.V. Application of the neural network approach to the reconstruction of a three-dimensional geoelectric structure // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 1998. — Vol. 34, № 1. — P. 33–39.
14. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. 2-е изд. — М.: Изд. дом “Вильямс”, 2006.
15. Фельдман И.С., Окулесский Б.А., Сулейманов А.К., Николаева В.И., Кунчеров В.А., Чамо С.С. Электроразведка методом МТЗ в комплексе региональных нефтегазопоисковых работ в европейской части России // Записки Горного института. — СПб, 2008. — Т. 176 — С. 125–131.

16. **Шимелевич М.И., Оборнев Е.А.** Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. — 2009. — № 12. — С. 22–38; Перевод: Shimelevich M.I., Osborne E.A. An approximation method for solving the inverse mts problem with the use of neural networks // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2009. — Vol. 45, № 12. — P. 1055–1071.
17. **Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.** Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. — 2013. — № 3. — С. 58–64; Перевод: Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A. Numerical methods for estimating the degree of practical stability of inverse problems in geoelectrics // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2013. — Vol. 49, № 3. — P. 356–362.
18. **Шимелевич М.И., Е.А. Оборнев, И.Е. Оборнев, Е.А. Родионов** Аппроксимационный нейросетевой метод решения многомерных нелинейных обратных задач геофизики // Физика Земли. — 2017. — № 4. — С. 100–109; Перевод: Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A. The neural network approximation method for solving multidimensional nonlinear inverse problems of geophysics // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2017. — Vol. 53, № 4. — P. 588–597.
19. **Cybenko G.** Approximation by superpositions of a Sigmoidal Function // Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314.
20. **Dolenko S., Guzhva A., Osborne E., Persiantsev I., and Shimelevich M.** Comparison of adaptive algorithms for significant feature selection in neural network based solution of the inverse problem of electrical prospecting // Proc. ICANN 2009. Part II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. — P. 397–405. — (Lect. Notes in Computer Science; 5769)
21. **Eisenstat S., Schultz M., and Sherman A.** Algorithms and data structures for sparse symmetric gaussian elimination // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. — 1981. — Vol. 2, № 2. — P. 225–237.
22. **Hidalgo H., Gyzmez-Trevico E., and Swiniarski R.** Neural network approximation of a inverse functional // Proc. IEEE International Conference on Neural Networks. — 1994. — Vol. 5. — P. 3387–3392.
23. **Kabanikhin S.I.** Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2008. — Vol. 16. — P. 317–357.
24. **Lönnblad L., Peterson C., and Rögnavlsson T.** Pattern recognition in high energy physics with artificial neural networks — JETNET 2.0 // Computer Physics Communications. — 1992. — Vol. 70, № 1. — P. 167–182.
25. **Mackie R.L., Smith J.T., and Madden T.R.** Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: the magnetotelluric example // Radio Science — 1994. — Vol. 29. — P. 923–935.
26. **Poulton M., Sternberg B., and Glass C.** Neural network pattern recognition of subsurface EM images // J. of Applied Geophysics. — 1992. — Vol. 29, № 1. — P. 21–36.
27. **Raiche A.** A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural nets // Geophysics J. Int. — 1991. — Vol. 105. — P. 629–648.
28. **Shimelevitch M., Osborne E.** The method of neuron network in inverse problems MTZ // Abstracts of the 14-th workshop on Electromagnetic Induction in the Earth. — Sinaia, Romania, 1998.
29. **Werbos P.J.** Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences: PhD thesis. — Cambridge, MA: Harvard University, 1974.
30. **Yagola A.** Error estimation for ill-posed problems with priori information // Global J. on Technology & Optimization. — 2010. — Vol. 1. — P. 88–92.

Поступила в редакцию 16 ноября 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Berdichevskiy M.N., Dmitriev V.I.** Obratnye zadachi magnitotelluriki v sovremennoy postanovke // Fizika Zemli. — 2004. — № 4. — S. 12–29; Perevod: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Inverse problems of magnetotellurics: A modern formulation // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2004. — Vol. 40, № 4. — P. 276–292.
2. **Van'yan L.L., Butkovskaya A.I.** Magnitotelluricheskoe zondirovanie sloistyh sred. — M.: Nedra, 1980.
3. **Voroncov K.V.** Lekcii po iskusstvennym neyronnym setyam. — 2009. — <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/c/cc/Voron-ML-NeuralNets.pdf>.
4. **Galushkin A.I.** Sintez mnogoslennykh sistem raspoznavaniya obrazov. — M.: Energiya, 1974.
5. **Glasko V.B., Gushchin G.V., Starostenko V.I.** O primeneniі metoda regulyariizatsii A.N. Tihonova k resheniyu nelineynykh sistem uravneniy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1976. — T. 16, № 2. — S. 283–292.
6. **Dmitriev V.I.** Obratnye zadachi geofiziki. — M.: MAKS Press, 2012.
7. **Dmitriev V.I., Kokotushkin G.A.** Al'bom paletok dlya magnitotelluricheskogo zondirovaniya v neodnorodnykh sredakh. — M.: Izd-vo MGU, 1971.
8. **Dmitrieva M.V.** CHislennoe modelirovanie fizicheskikh processov v plazme ustanovok tokamak pri vozdeystvii elektromagnitnykh voln al'fvenovskogo diapazona chastot: Avtoreferat dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.07. — M.: IPM AN SSSR, 1985.
9. **Ivanov V.K.** O nekorrektno postavlennykh zadachah // Matematicheskiy sbornik. — 1963. — T. 61, № 2. — S. 211–223.
10. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Novikov N.S.** Algoritmy opredeleniya uprugikh parametrov po ploshchadnym sistemam nablyudeniya (pryamaya lineynaya obrabotka dannykh seysmicheskikh nablyudeniya) // Vestnik kibernetiki. — 2016. — № 2. — S. 83–91.
11. **Romanov V.G., Kabanikhin S.I.** Obratnye zadachi geoelektriki. — M.: Nauka, 1991.
12. **Strahov V.N., Lapina M.I.** Montazhnyy metod resheniya obratnoy zadachi gravimetrii // Dokl. AN SSSR. — 1976. — T. 227, № 2. — S. 344–347.
13. **Spichak V.V., Popova I.V.** Primenenie neyrosetevogo podhoda dlya rekonstruktsii parametrov trekhmernoy geoelektricheskoy struktury // Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli. — 1998. — № 1. — S. 39–45; Perevod: Spichak V.V., Popova I.V. Application of the neural network approach to the reconstruction of a three-dimensional geoelectric structure // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 1998. — Vol. 34, № 1. — P. 33–39.
14. **Haykin S.** Neyronnye seti. Polnyy kurs. 2-e izd. — M.: Izd. dom “Vil'yams”, 2006.
15. **Fel'dman I.S., Okuleskiy B.A., Suleymanov A.K., Nikolaeva V.I., Kuncherov V.A., Chamo S.S.** Elektrorazvedka metodom MTZ v komplekse regional'nykh neftegazopiskovykh rabot v evropeyskoy chasti Rossii // Zapiski Gornogo instituta. — SPb, 2008. — T. 176 — S. 125–131.
16. **Shimelevich M.I., Osborne E.A.** Approksimatsionnyy metod resheniya obratnoy zadachi MTZ s ispol'zovaniem neyronnykh setey // Fizika Zemli. — 2009. — № 12. — S. 22–38; Perevod: Shimelevich M.I., Osborne E.A. An approximation method for solving the inverse mts problem with the use of neural networks // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2009. — Vol. 45, № 12. — P. 1055–1071.
17. **Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A.** Chislennyye metody ocenki stepeni prakticheskoy ustoychivosti obratnykh zadach geoelektriki // Fizika Zemli. — 2013. — № 3. — S. 58–64; Perevod: Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A. Numerical methods for estimating the degree of practical stability of inverse problems in geoelectrics // Izvestiya – Physics of the Solid Earth. — 2013. — Vol. 49, № 3. — P. 356–362.

18. **Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A.** *Approksimacionnyy neyrosetevoy metod resheniya mnogomernykh nelineynykh obratnykh zadach geofiziki // Fizika Zemli.* — 2017. — № 4. — S. 100–109; *Perevod: Shimelevich M.I., Osborne E.A., Osborne I.E., Rodionov E.A. The neural network approximation method for solving multidimensional nonlinear inverse problems of geophysics // Izvestiya – Physics of the Solid Earth.* — 2017. — Vol. 53, № 4. — P. 588–597.
19. **Cybenko G.** *Approximation by superpositions of a Sigmoidal Function // Mathematics of Control, Signals, and Systems.* — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314.
20. **Dolenko S., Guzhva A., Osborne E., Persiantsev I., and Shimelevich M.** *Comparison of adaptive algorithms for significant feature selection in neural network based solution of the inverse problem of electrical prospecting // Proc. ICANN 2009. Part II.* — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. — P. 397–405. — (Lect. Notes in Computer Science; 5769)
21. **Eisenstat S., Schultz M., and Sherman A.** *Algorithms and data structures for sparse symmetric gaussian elimination // SIAM J. Sci. and Stat. Comput.* — 1981. — Vol. 2, № 2. — P. 225–237.
22. **Hidalgo H., Gyzmez-Trevico E., and Swiniarski R.** *Neural network approximation of a inverse functional // Proc. IEEE International Conference on Neural Networks.* — 1994. — Vol. 5. — P. 3387–3392.
23. **Kabanikhin S.I.** *Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems.* — 2008. — Vol. 16. — P. 317–357.
24. **Lönnblad L., Peterson C., and Rögnavlsson T.** *Pattern recognition in high energy physics with artificial neural networks — JETNET 2.0 // Computer Physics Communications.* — 1992. — Vol. 70, № 1. — P. 167–182.
25. **Mackie R.L., Smith J.T., and Madden T.R.** *Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: the magnetotelluric example // Radio Science—1994.* — Vol. 29. — P. 923–935.
26. **Poulton M., Sternberg B., and Glass C.** *Neural network pattern recognition of subsurface EM images // J. of Applied Geophysics.* — 1992. — Vol. 29, № 1. — P. 21–36.
27. **Raiche A.** *A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural nets // Geophysics J. Int.* — 1991. — Vol. 105. — P. 629–648.
28. **Shimelevitch M., Osborne E.** *The method of neuron network in inverse problems MTZ // Abstracts of the 14-th workshop on Electromagnetic Induction in the Earth.* — Sinaia, Romania, 1998.
29. **Werbos P.J.** *Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences: PhD thesis.* — Cambridge, MA: Harvard University, 1974.
30. **Yagola A.** *Error estimation for ill-posed problems with priori information // Global J. on Technology & Optimization.* — 2010. — Vol. 1. — P. 88–92.