УДК 532.5+517.95
DOI: 10.15372/PMTF202215143

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА И СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

Рассматривается система уравнений Эйлера, описывающая двумерные стационарные течения идеальной жидкости. Эта система сводится к нелинейному уравнению Лапласа для функции тока. С помощью τ-функции Хироты находятся решения трех эллиптических уравнений: sin-Гордона, sinh-Гордона и Цицейки. Предложен простой метод построения решений в виде рациональных выражений в эллиптических функциях. Найденные решения описывают источники в завихренной жидкости, струйные течения, цепочки источников и стоков, вихревые структуры. Показано, что расход жидкости по замкнутой кривой квантуется в случае решения эллиптического уравнения sin-Гордона.

Ключевые слова: система Эйлера идеальной жидкости, τ-функция, эллиптические решения

Введение. Рассмотрим двумерные стационарные уравнения идеальной жидкости

$$uu_x + vu_y + p_x/\rho = 0, \qquad uv_x + vv_y + p_y/\rho = 0, \qquad u_x + v_y = 0,$$

где u, v — компоненты вектора скорости; p — давление; ρ — плотность. Плотность жидкости полагается постоянной и равной единице. Известно, что данная система сводится к одному уравнению для функции тока ψ [1]

$$\Delta\psi = \omega(\psi) \tag{1}$$

(ω — завихренность; Δ — двумерный оператор Лапласа; $u = \psi_y$; $v = -\psi_x$). Уравнение (1) возникает также в различных приложениях, таких как физика плазмы, теория твердого тела [2–4].

Наиболее полно уравнение (1) исследовано в линейном случае. Кроме того, эллиптическое уравнение Лиувилля

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \exp(\psi)$$

связано преобразованием

$$\psi = \log(-2\,\Delta(\log\tau))$$

с уравнением Лапласа $\Delta\tau = 0$, что следует из классической формулы общего решения гиперболического уравнения Лиувилля [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2022-873).

В конце XIX — начале XX в. были получены преобразования Беклунда и Цицейки [6], позволяющие размножать решения уравнений

$$u_{xy} = \sin(u), \qquad u_{xy} = \exp(u) - \exp(-2u).$$

В работах [4, 7] с помощью преобразования Беклунда найдены частные решения уравнения sin-Гордона

$$\Delta\psi = \sin(\psi). \tag{2}$$

Формула N-волнового решения для уравнения Цицейки

$$\Delta\psi = \exp(\psi) - \exp(-2\psi)$$

представлена в [8]. Следует отметить работы [9, 10], в которых использовано разделение переменных для построения решений уравнения (1) с другими функциями $\omega(\psi)$.

В настоящей работе рассматриваются решения уравнения sin-Гордона (2) и sinh-Гордона, выражающиеся через элементарные функции. Решения уравнения sin-Гордона имеют вид

$$\psi = 4\arctan(G/F),$$

где F, G — гладкие функции в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. Показано, что расход жидкости

$$Q \equiv \oint\limits_{\gamma} d\psi$$

через простую замкнутую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ равен $8\pi I$ $(I \in \mathbb{Z})$. Целое число I равно сумме индексов Пуанкаре нулевых точек векторного поля $V = (F, G)$, лежащих внутри области, ограниченной кривой γ. Найдены точные решения уравнений sin-Гордона (2) и sinh-Гордона, выраженные через элементарные функции. Эти решения определяют течения, состоящие из отдельных источников и стоков, струйные течения, периодические цепочки из источников-стоков, вихри и их комбинации. Также предложен новый способ построения решений уравнений sin-Гордона, sinh-Гордона и Цицейки. Данные классы решений представляются в виде рациональных выражений в эллиптических функциях. Для поиска этих решений используется система компьютерной алгебры Maple. Вычисления частично аналогичны вычислениям, выполненным в работе [11].

1. Решения в элементарных функциях. Получим решения уравнения (1), выражающиеся через элементарные функции. Сначала рассмотрим уравнения sin-Гордона и sinh-Гордона

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \sin(\psi); \tag{3}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \sinh(\psi). \tag{4}$$

Приведем эти уравнения к единому виду, используя комплексные и двойные числа [12]. Поле комплексных чисел обозначим через $\mathbb{C}$, алгебру двойных чисел — через $\mathbb{D}$. Каждое комплексное и двойное число имеет вид $z = a + \delta b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta \notin \mathbb{R}$. При $\delta = i \in \mathbb{C}$ $\delta^2 = -1$, при $\delta \in \mathbb{D}$ $\delta^2 = 1$. Формулу для умножения двойных чисел зададим в виде

$$(a_1 + \delta b_1)(a_2 + \delta b_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + \delta(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Уравнения (3), (4) запишем следующим образом:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{\exp(\delta\psi) - \exp(-\delta\psi)}{2\delta}. \tag{5}$$

Введем новую функцию $v = \exp(\delta\psi)$. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$v(v_{xx} + v_{yy}) - v_x^2 - v_y^2 - v^3/2 + v/2 = 0. \tag{6}$$

Пусть F, G — гладкие функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\tau = F + \delta G$. Тогда функция $\bar{\tau} = F - \delta G$ называется сопряженной с функцией τ. Решения уравнений (3), (4) будем искать в виде

$$v = \frac{\bar{\tau}^2}{\tau^2}. \tag{7}$$

Очевидно, что функции v и ψ можно представить следующим образом:

$$v = \Big(\frac{1 - \delta\, G/F}{1 + \delta\, G/F}\Big)^2, \qquad \psi = \frac{2}{\delta} \log\Big(\frac{1 - \delta\, G/F}{1 + \delta\, G/F}\Big).$$

Значит, при $\delta = i \in \mathbb{C}$ функция ψ имеет вид

$$\psi = 4 \arctan{(G/F)}, \tag{8}$$

при $\delta \in \mathbb{D}$ — вид

$$\psi = 4 \tanh^{-1}{(G/F)}.$$

Приведем утверждение о расходе жидкости через замкнутую кривую. Предположим, что функция тока ψ имеет вид (8), где функции F и G порождают векторное поле $V = (F, G)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $a \in \Omega$ является нулем векторного поля V, c — малая окружность с центром в этой точке. Тогда криволинейный интеграл

$$\operatorname{ind}{(a)} \equiv \frac{1}{2\pi} \oint\limits_c d \tan^{-1}{(G/F)}$$

является целым числом и называется индексом Пуанкаре точки a [13]. Таким образом, мощность источника

$$\oint\limits_c d\psi$$

равна $8\pi \operatorname{ind}{(a)} \in 8\pi\mathbb{Z}$, т. е. мощность источника в этом случае квантована. В соответствии с терминологией, принятой в квантовой теории поля [14, 15], криволинейный интеграл

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_c d\psi$$

является топологическим зарядом точки a.

Предположим, что простая замкнутая кривая γ представляет собой границу Ω и векторное поле V имеет несколько нулей $a_1, \dots, a_n$ с топологическими зарядами $q_1, \dots, q_n$. Из теоремы Пуанкаре следует, что расход жидкости Q через кривую γ равен [16]

$$\oint\limits_\gamma d\psi = 8\pi \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}{(a_j)} = 8\pi \sum_{j=1}^n q_j.$$

Это означает, что величина Q также квантована. Сингулярные решения с топологическими зарядами можно рассматривать как точечные дефекты в жидкости. Другие топологические квантовые числа обсуждаются в [14].

Пусть сначала функция τ задана формулой

$$\tau = 1 + \delta \exp{(kx + ny + \eta)},$$

где $k, n, \eta \in \mathbb{R}$. Тогда функция v удовлетворяет уравнению (6) при $k^2 + n^2 = 1$. В этом случае линии тока $\psi = \mathrm{const}$ являются прямыми на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. Функция ψ, удовлетворяющая уравнению (3), является гладкой, ее график представляет собой двумерный

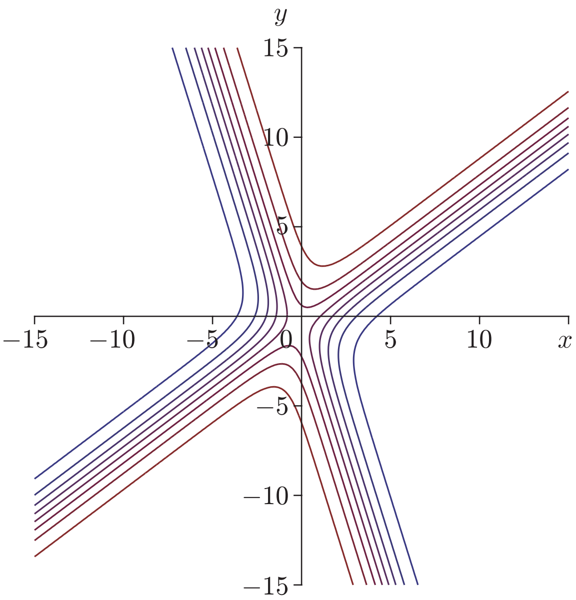

Рис. 1. Картина течения с двумя струями

кинк (гладкую ступеньку). В случае если функция ψ удовлетворяет уравнению (4), она имеет разрыв.

Далее τ-функциями Хироты будем называть линейные комбинации функций вида $\exp(kx + ny + \eta)$, где $k, n, \eta \in \mathbb{C}$. Рассмотрим τ-функцию Хироты

$$\tau = 1 + \delta(f_1 + f_2) + \delta^2 s_{12} f_1 f_2, \tag{9}$$

где $f_i = \exp(k_i x + n_i y + \eta_i)$. Тогда, подставляя соответствующую функцию (7) в левую часть уравнения (6), получаем рациональное выражение в функциях f_1, f_2. Приравнивая к нулю коэффициенты числителя, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно k_i, n_i, s_{12}. Нетривиальное решение этой системы имеет вид

$$s_{12} = \frac{n_1 n_2 + k_1 k_2 - 1}{n_1 n_2 + k_1 k_2 + 1}, \qquad n_i^2 + k_i^2 = 1, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, решения уравнений (3), (4) задаются формулами

$$\psi_1 = 4 \tan^{-1}\left(\frac{f_1 + f_2}{1 - s_{12} f_1 f_2}\right), \qquad \psi_2 = 4 \tanh^{-1}\left(\frac{f_1 + f_2}{1 + s_{12} f_1 f_2}\right).$$

Далее будем рассматривать только решение ψ_1, так как решение ψ_2 является разрывным. Пусть $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $n_i, k_i \in \mathbb{R}$. Функция ψ_1 представляет собой пару кинков и имеет одну седловую точку. Линии тока, показанные на рис. 1, можно интерпретировать как взаимодействие двух струй.

Пусть $\eta_1 = 0, \eta_2 = i\pi, n_i, k_i \in \mathbb{R}$. В точке, где функции f_1+f_2 и $1-s_{12}f_1f_2$ одновременно обращаются в нуль, вектор скорости имеет особенность. Получаем течение типа источника или стока в завихренной жидкости. В случае источника расход равен четырем. Картина линий тока для этого случая представлена на рис. 2.

Предположим, что $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $n_1 = a+ib$, $n_2 = a-ib$ $(b \neq 0)$. В этом случае параллельные прямые, заданные уравнением $f_1+f_2 = 0$, являются линиями тока. Перпендикулярная им прямая, определяемая уравнением $1 - s_{12}f_1f_2 = 0$, также является линией тока. Точки пересечения прямых являются источниками или стоками. Каждая полоса между ближайшими параллельными линиями тока заполнена траекториями, соединяющими источник и сток.

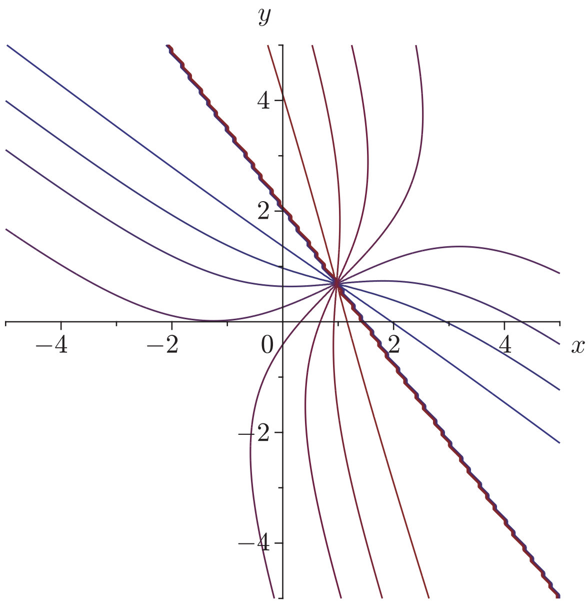

Рис. 2. Картина течения с источником

Найдем трехкратные волны уравнений (3), (4). Соответствующую τ-функцию Хироты будем искать в виде

$$\tau = 1 + \delta(f_1 + f_2 + f_3) + \delta^2(s_{12}f_1f_2 + s_{13}f_1f_3 + s_{23}f_2f_3) + \delta^3 s_{123}f_1f_2f_3. \tag{10}$$

Как и выше, функции f_i имеют вид $\exp(k_ix + n_iy + \eta_i)$ ($k_i, n_i, \eta_i \in \mathbb{C}$), а s_{ij} задаются формулами

$$s_{ij} = \frac{n_in_j + k_ik_j - 1}{n_in_j + k_ik_j + 1}, \qquad n_i^2 + k_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Подставляя τ-функцию Хироты вида (10) в (6), (7), находим

$$s_{123} = s_{12}s_{13}s_{23}.$$

Для построения картин течения необходимо вновь задавать константы $n_i, \eta_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3$) и выбирать знаки у $k_i = \pm\sqrt{1 - n_i^2}$. Наиболее простой случай имеет место при $\eta_i = 0$ и $n_i, k_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$). При $n_1 = -0{,}7$, $n_2 = 0{,}4$, $n_3 = 0{,}1$, $k_1 = \sqrt{1 - k_1^2}$, $k_2 = -\sqrt{1 - k_2^2}$, $k_3 = \sqrt{1 - k_3^2}$ получаем картину течения с тремя струями и вихрем (рис. 3).

Пусть $\eta_1 = i\pi$, $\eta_2 = \eta_3 = 0$, $n_1 = 0{,}1$, $n_2 = 0{,}4$, $n_3 = 0{,}3$, $k_1 = \sqrt{1 - k_1^2}$, $k_2 = -\sqrt{1 - k_2^2}$, $k_3 = \sqrt{1 - k_3^2}$. Тогда имеем течение с источником, стоком и струями (рис. 4). Несложно построить другие решения, выбирая, например, числа n_1 и n_2 комплексно-сопряженными, а n_3 вещественным.

Формулы (9), (10) можно записать в компактном виде

$$(1 + \delta f_1) * (1 + \delta f_2), \qquad (1 + \delta f_1) * (1 + \delta f_2) * (1 + \delta f_3),$$

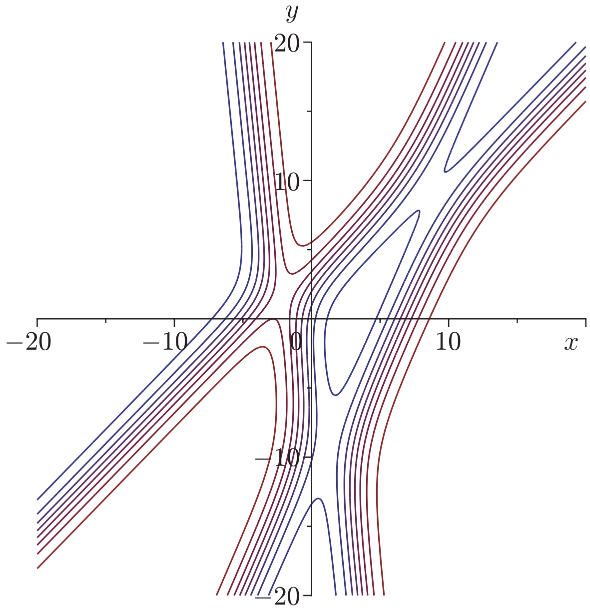

Рис. 3

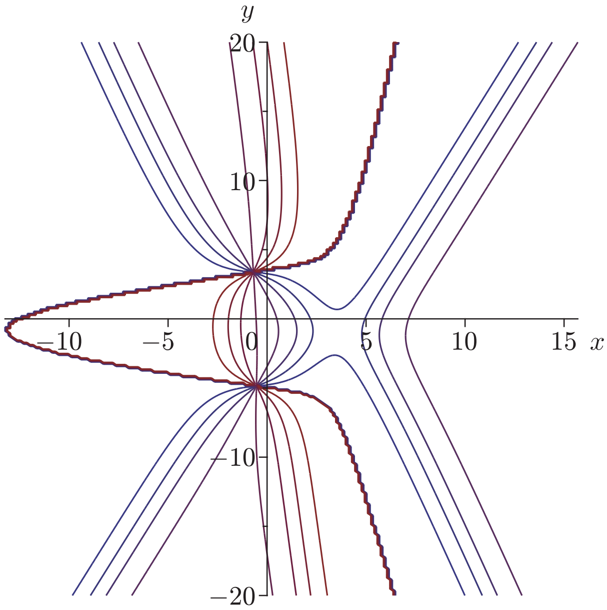

Рис. 4

Рис. 3. Картина течения с тремя струями и вихрем

Рис. 4. Картина течения с тремя струями, источником и стоком

где сложение определяется обычным образом, а операция умножения “$*$” задается выражениями

$$f_i * f_j = s_{ij} f_i f_j, \qquad f_i * f_j * f_k = s_{ij} s_{ik} s_{jk} f_i f_j f_k,$$

где s_{ij}, s_{ik}, s_{jk} вычисляются согласно (11).

Для произвольного n τ-функция Хироты имеет вид

$$\tau = (1 + \delta f_1) * (1 + \delta f_2) * \cdots * (1 + \delta f_{n-1}) * (1 + \delta f_n).$$

При этом выполняются соотношения

$$f_{i_1} * \cdots * f_{i_m} = s_{i_1,\ldots,i_m} f_{i_1} \cdots f_{i_m},$$

где $s_{i_1,\ldots,i_m}$ — произведение всех s_{jk}, таких что $j, k \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, $j < k$.

Кратко рассмотрим случай $n = 4$, когда функция τ имеет вид

$$\tau = (1 + \delta f_1) * (1 + \delta f_2) * (1 + \delta f_3) * (1 + \delta f_4).$$

Решения уравнения (3) будем искать следующим образом. Пусть $\eta_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $n_1 = 0{,}5$, $n_2 = 0{,}4$, $n_3 = 0{,}3$, $n_4 = 0{,}2$, $k_i < 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, $k_4 > 0$. В этом случае получаем картину течения с четырьмя струями и двумя вихрями (рис. 5).

Полагая один из параметров η_i мнимым, можно получить пару источников и пару стоков (или один). Выбирая $n_1 = a + ib$, $n_2 = a - ib$, $n_3 = a + ib$, $n_4 = a - ib$, получаем пересекающиеся цепочки источников и вихрей либо слияние (резонанс) этих цепочек, аналогичное резонансу солитонов для уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Решения уравнения Цицейки

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \exp(\psi) - \exp(-2\psi) \tag{12}$$

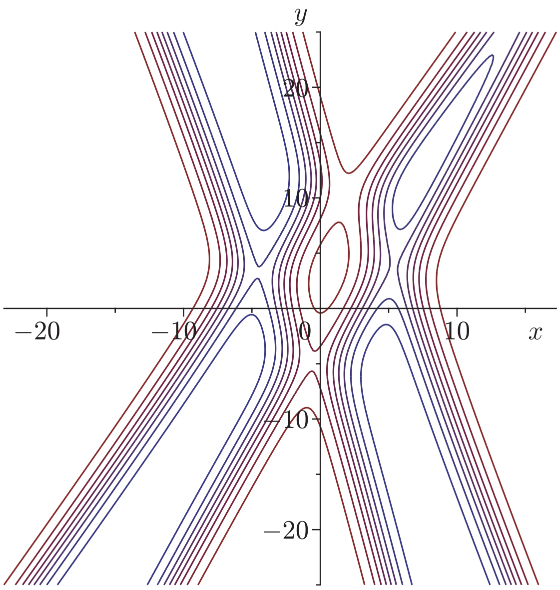

Рис. 5. Картина течения с четырьмя струями и двумя вихрями

будем искать следующим образом. В работе [8] для решений предложена формула

$$\psi = \log\Big(1 - 2\Big(\frac{\partial^2 \log\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log\tau}{\partial y^2}\Big)\Big)$$

с использованием τ-функции Хироты, которая задает решения уравнения (12) при

$$\tau = (1 + f_1) * (1 + f_2) * \dots * (1 + f_n).$$

Здесь

$$f_i = \exp\,(k_i x + n_i y + \eta_i), \qquad n_i^2 + k_i^2 = 3, \qquad f_i * f_j = s_{ij} f_i f_j,$$

$$s_{ij} = \frac{4k_i k_j n_i n_j + 4k_i^2 k_j^2 - 9n_i n_j - 6k_i^2 - 9k_i k_j - 6k_j^2 + 27}{4k_i k_j n_i n_j + 4k_i^2 k_j^2 + 9n_i n_j - 6k_i^2 + 9k_i k_j - 6k_j^2 + 27}.$$

В работе [10] представлены некоторые картины течений, соответствующие этим решениям.

2. Решения в эллиптических функциях. Уравнение sin-Гордона (3) имеет точные решения, которые выражаются через эллиптические функции. Некоторые такие решения найдены с помощью преобразований Беклунда [4] и анзаца Штойервальда [7, 17], часто называемого анзацем Лэмба. Следует отметить, что в монографии [10] допущены некоторые ошибки при построении решений в эллиптических функциях. В настоящей работе решения уравнений (3), (12) находим с помощью специальных анзацев. Для гиперболического уравнения sin-Гордона решения, выраженные через эллиптические функции, получены в [18] с помощью редукций из алгебро-геометрических решений.

Введем новую функцию $w = \tan\,(\psi/4)$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$(1 + w^2)(w_{xx} + w_{yy}) - 2w(w_x^2 + w_y^2) + w^3 - w = 0. \qquad (13)$$

Решения уравнения (13) будем искать в виде

$$w = \frac{s_0 + s_1 F + s_2 G}{p_0 + p_1 F + p_2 G}. \qquad (14)$$

Здесь $s_i, p_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2)$; $F(x)$, $G(y)$ — функции, удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(F_x')^2 = a_4F^4 + a_3F^3 + a_2F^2 + a_1F + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}; \tag{15}$$

$$(G_y')^2 = b_4G^4 + b_3G^3 + b_2G^2 + b_1G + b_0, \qquad b_i \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Подставим (14) в левую часть уравнения (13) и выразим все производные с помощью (15), (16). В результате получаем рациональную функцию F и G. Приравнивая коэффициенты числителя к нулю, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно a_i, b_i $(0 \leqslant i \leqslant 4)$ и s_j, p_j $(0 \leqslant j \leqslant 2)$. Решения нелинейной алгебраической системы находим с помощью системы компьютерной алгебры Maple. В общем случае эти решения довольно громоздки. Рассмотрим два случая.

В первом случае решение является аналогом анзаца Штойервальда

$$w = \frac{G}{F}.$$

Функции F, G удовлетворяют уравнениям

$$(F_x')^2 = b_4F^4 + (1 - b_2)F^2 + b_0, \qquad (G_y')^2 = b_4G^4 + b_2G^2 + b_0,$$

где b_0, b_2, b_4 — произвольные константы. При $b_4 < 0$ функции выражаются через функцию Якоби dn. Пусть $b_0 = 0{,}5$, $b_2 = 1$, $b_4 = -0{,}5$ и $F(0) = G(0) = 1$. Тогда функции F и G являются периодическими и дважды обращаются в нуль на периоде. В результате плоскость течения $\mathbb{R}^2(x, y)$ разбивается на прямоугольные ячейки. В двух противоположных вершинах прямоугольника находятся источники (или стоки соответственно), внутри имеется одна седловая точка. Линии тока соединяют источники и стоки.

Во втором случае решение имеет вид

$$w = \frac{F - G}{F + G}.$$

При этом функции $F(x)$, $G(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$(F_x')^2 = b_4F^4 - (1 + b_2)F^2 + b_0, \qquad (G_y')^2 = b_4G^4 + b_2G^2 + b_0.$$

Картина течения качественно такая же, как в предыдущем случае.

Будем искать решения уравнения (13) в виде

$$w = \frac{s_0 + s_1F + s_2G + s_3FG}{p_0 + p_1F + p_2G + p_3FG}. \tag{17}$$

Предположим, что функции F, G удовлетворяют уравнениям вида (15), (16). Подставляем функцию w, заданную формулой (17), в левую часть (13) и выражаем все производные с помощью (15), (16). В результате получаем рациональную функцию F, G. Приравнивая к нулю коэффициенты числителя, получаем нелинейную алгебраическую систему относительно a_i, b_i $(0 \leqslant i \leqslant 4)$ и s_j, p_j $(0 \leqslant j \leqslant 3)$, решения которой находим с помощью системы Maple. Приведем некоторые представления для функции w:

$$w = \frac{s_0 + s_1F + s_0s_3G/s_1 + s_3FG}{p_2G}, \qquad w = \frac{s_1F + s_3FG}{p_2G + p_3FG},$$

$$w = 4\frac{a_0s_1F + s_3FG}{p_0(4a_0 + a_1F)}, \qquad w = \frac{s_1s_2/s_3 + s_1F + s_2G + s_3FG}{p_0}.$$

Уравнения для функций F, G не приводим вследствие их громоздкости.

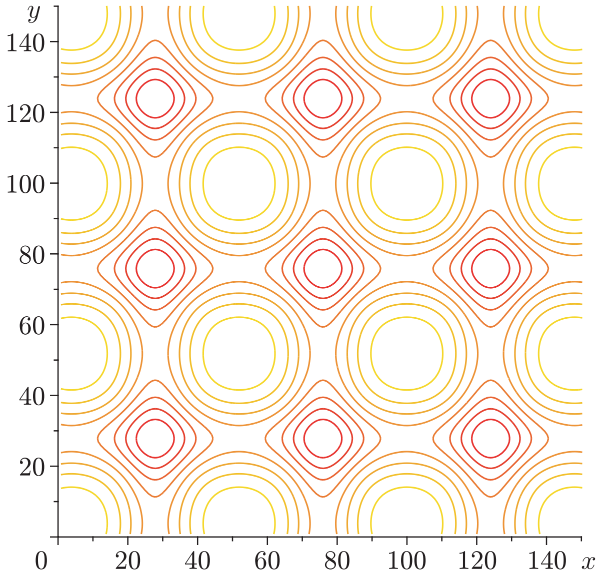

Рис. 6. Линии уровня функции v

Для решения уравнения Цицейки (12) введем новую функцию

$$v = \exp(\psi).$$

Тогда уравнение (12) можно записать следующим образом:

$$v(v_{xx} + v_{yy}) - v_x^2 - v_y^2 - v^3/2 + 1 = 0. \tag{18}$$

Решения этого уравнения сначала находим в виде

$$v = \frac{s_0 + s_1 F + s_2 G}{p_0 + p_1 F + p_2 G},$$

где F и G удовлетворяют уравнениям (15), (16). Как и выше, подставляем функцию v в правую часть (18). Выполняя расчеты, аналогичные проведенным выше, получаем следующее представление:

$$v = s_0 + F + G.$$

Уравнения для функций F, G при $s_0 \neq 0$ имеют вид

$$\begin{gathered} (F_x')^2 = 2F^3 + \Big(3s_0 + \frac{a_1 - b_1}{2s_0}\Big)F^2 + a_1 F - s_0^3 + \frac{s_0(a_1 + b_1)}{2} + 1 - b_0, \\ (G_y')^2 = 2G^3 + \Big(3s_0 + \frac{-a_1 + b_1}{2s_0}\Big)G^2 + b_1 G + b_0. \end{gathered} \tag{19}$$

Решения уравнений (19) выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса. Для того чтобы получить конкретное решение, будем полагать $s_0 = 1$, $b_0 = -0{,}1$, $a_1 = b_1 = -0{,}2$. В качестве начальных данных выбираем значения $F(0) = G(0) = -0{,}2$. В результате получаем картину линий уровня функции v (рис. 6). Поскольку на одной из линий уровня функция v равна нулю, функция тока ψ на ней не определена.

Будем искать функцию v в виде

$$v = \frac{s_0 + s_1 F + s_2 G + s_3 FG}{p_0 + p_1 F + p_2 G + p_3 FG}.$$

Выполняя расчеты, аналогичные проведенным выше, можно получить несколько различных представлений для функции v, наиболее простое из которых имеет вид

$$v = \frac{p_0 + p_3 FG}{s_2 G}.$$

При этом функции F, G должны удовлетворять уравнениям

$$(F_x')^2 = 2p_3F^3 - b_2F^2 + b_3p_0F/p_3 + a_0,$$
$$(G_y')^2 = b_4G^4 + b_3F^3 + b_2G^2 + 2p_0G/s_2.$$

Приведем еще несколько представлений для функции v:

$$v = \frac{p_0 + p_1F + p_3FG}{s_1F},$$

$$v = \frac{p_0 + p_1F + p_0s_3G/s_1 + p_3FG}{s_1F + s_3FG}, \qquad v = \frac{p_0 + p_1F + p_2G + p_3FG}{p_0s_3G/p_1 + s_3FG}.$$

Вид соответствующих уравнений (15), (16) не приводится ввиду их громоздкости.

Заключение. В работе найдены новые классы стационарных решений системы Эйлера идеальной жидкости, описывающие различные гладкие, вихревые течения и течения с особенностями. Предложен способ построения решений в эллиптических функциях.

В перспективе представляется целесообразным дать классификацию всех подобных решений. Важно найти применение этих решений в различных физических приложениях. Также представляет интерес построение аналогичных решений в эллиптических функциях для других математических моделей. Представляется несложным построить аналогичные решения для гиперболических уравнений sin-Гордона и Цицейки. Не найдены подобные решения для нестационарных уравнений Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Batchelor G.** An introduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970.
2. **Bateman G.** MHD instability. Cambridge: MIT Press, 1978.
3. **Movsesyants Yu. B.** Solitons in collisionless cold plasma // Physica A. 1987. V. 140. P. 554–566.
4. **Borisov A. B., Kiseliev V. V.** Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures quasi-periodic solutions of elliptic Sine-Gordon equation // Physica D. 1988. V. 31. P. 49–64.
5. **Ibragimov N. H.** Transformation groups applied to mathematical physics. Boston: Reidel, 1985.
6. **Rogers C.** Bäcklund and Darboux transformations: Geometry and modern applications in soliton theory / C. Rogers, W. K. Schief. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
7. **Капцов О. В.** Некоторые классы плоских вихревых течений идеальной жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 109–117.
8. **Капцов О. В.** Некоторые классы двумерных стационарных вихревых структур в идеальной жидкости // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 50–53.
9. **Shercliff J.** Simple rotational flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 82, pt 4. P. 687–703.
10. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
11. **Kaptsov O. V., Kaptsov D. O.** Exact solution of Boussinesq equations for propagation of nonlinear waves // Europ. Phys. J. Plus. 2020. N 135. 723.
12. **Olariu S.** Complex numbers in n dimensions. Amsterdam: Elsevier: North-Holland Math. Studies, 2002. (Math. studies; V. 190).

13. **Andronov A. A.** Theory of oscillators / A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin. Oxford; L.; N. Y.: Pergamon Press, 1966.
14. **Thouless D. J.** Topological quantum numbers in nonrelativistic physics. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1998.
15. **Раджараман Р.** Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
16. **Arnold V. I.** Ordinary differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992.
17. **Steuerwald R.** Über Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation // Abh. Bayer. Akad. Wiss. 1936. Heft 40. P. 1–105.
18. **Belokolos E. D.** Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations / E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

Поступила в редакцию 31/V 2022 г.,
после доработки — 6/VII 2022 г.
Принята к публикации 25/VII 2022 г.