3. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.** Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.— Т. 16.— М.: ВИНИТИ, 1982.— С. 209—289.
4. **Стернин Л. Е., Маслов Б. Н., Шрайбер А. А. и др.** Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами.— М.: Машиностроение, 1980.— 172 с.
5. **Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б.** Нестационарные режимы горения пористых порохов // ФГВ.— 1983.— 19, № 3.— С. 53—61.
6. **Ergun S.** Fluid flow through packed columns // Chem. Eng. Prog.— 1952.— 48, N 2.— P. 89—94.
7. **Чудновский А. Ф.** Теплообмен в дисперсных средах.— М.: Гостехиздат, 1954.— 441 с.
8. **Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б.** Теория нестационарного горения пороха.— М.: Наука, 1973.— 176 с.
9. **Новожилов Б. В.** Нестационарное горение твердых ракетных топлив.— М.: Наука, 1973.— 176 с.
10. **Кутушев А. Г., Назаров У. А.** Ослабление УВ слоями однородной и неоднородной моно- и полидисперсной газовзвеси // ФГВ.— 1991.— 27, № 3.— С. 129—134.
11. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике.— М.: Наука, 1982.— 392 с.
12. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.** Модифицированный метод «крупных частиц» для расчета нестационарных волновых процессов в многофазных дисперсных средах // ЖВМиМФ.— 1977.— 17, № 6.— С. 1531—1544.
13. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г.** Численное исследование нестационарных волновых течений газовзвесей с выделением границ двухфазных областей и контактных разрывов в несущем газе // ЧММСС.— Новосибирск, 1983.— 14, № 6.— С. 58—82.

г. Тюмень *Поступила в редакцию 8/V 1992*

УДК 534.222.2 533.6.011

А. А. Афанасьев, В. А. Левин

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЕТОНАЦИИ В РЕЖИМЕ ЧЕПМЕНА — ЖУГЕ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Рассматривается распространение волны детонации в покоящейся горючей неоднородной смеси газов, начальное состояние которой характеризуется значениями давления и плотности, в общем случае являющимися функциями координаты — расстояния от плоскости, оси или центра симметрии, и времени. За фронтом детонации предполагается наличие источников массы, импульса и энергии. Определяются соответствующие необходимые условия, при выполнении которых волна детонации может распространяться в режиме Чепмена — Жуге. Проводится анализ полученных соотношений для некоторых неоднородных сред: с переменной плотностью, с изменяющимся с расстоянием тепловыделением и сред с источниками догорания за фронтом детонации.

При распространении детонации в горючей смеси газов горение локализуется в узкой зоне за ударной волной (УВ) достаточно большой интенсивности. В этом случае для масштабов времени и расстояния, больших по сравнению с характерными масштабами протекания химических реакций, комплекс из лидирующей УВ и примыкающей к ней зоны горения можно заменить поверхностью сильного разрыва, на которой должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии [1]. При этом в общем случае не обязательно знать внутреннюю структуру детонационной волны (ДВ) и нет нужды вводить какие-либо предположения о ее деталях.

Математическая постановка задачи здесь сводится к решению уравнений классической газовой динамики с удовлетворением соответствующих условий на ДВ, скорость которой неизвестна, начальных данных и других условий. Так, в задаче о поршне должно выполняться условие непротекания, в задаче о распространении ДВ от неподвижного поджигающего источника — равенство скорости газа нулю в центре инициирования и т. д. Во всех этих и других случаях скорость ДВ должна определяться из решения всей задачи в целом.

Так, в результате решения краевой задачи о распространении плоской ДВ в однородной среде показано, что волна обязательно должна распространяться в режиме Чепмена — Жуге, тем самым дан ответ на вопрос о выборе ее скорости [2]. В осесимметричном и сферическом случаях при однородных начальных распределениях параметров ДВ также распространяется в режиме Чепмена — Жуге от точечного поджигающего источника с нулевой энергией инициирования [3, 4].

В среде с переменной плотностью $\rho = Ar^{-\omega}$ $(\omega > 0)$ и постоянной величиной тепла Q_0, выделяющегося при сгорании единицы массы газа, в зависимости от показателя неоднородности решения ведут себя принципиально различным образом. В сферическом случае при $0 \leqslant \omega \leqslant 2\gamma/(\gamma+1)$ ДВ распространяется в режиме Чепмена — Жуге, при $2\gamma/(\gamma+1) < \omega < 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ решение с этой волной отсутствует, а волна обязательно пересжатая. При $\omega > 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ в центре образуется пустота и волна распространяется в пересжатом режиме. В этом случае происходит полный разлет облака [3].

Аналогичные результаты получены при решении задач о распространении ДВ в гравитирующих средах применительно к проблеме взрыва звезд [5]. Ряд задач о распространении ДВ в неоднородных средах решен в работах [6—8]. Изучались как расходящиеся, так и сходящиеся ДВ. В частности, показано, что в однородной среде сходящиеся цилиндрические и сферические волны обязательно пересжатые [9, 10]. Если ДВ имеет вид произвольной достаточно гладкой поверхности, то она может распространяться в однородной среде в режиме Чепмена — Жуге только при условии выпуклости этой поверхности в сторону движения волны, т. е. волна должна расширяться с течением времени [11]. При доказательстве этого утверждения использовался тот факт, что в общем случае ДВ Чепмена — Жуге является огибающей характеристических поверхностей уравнений газовой динамики. Впервые это отмечено в работе [12] и использовано для определения условий существования плоских ДВ Чепмена — Жуге во внешнем электрическом и магнитных полях в [13].

Для произвольных систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка исследованы условия существования и определен вид асимптотического разложения решения в окрестности огибающей характеристических поверхностей, на которой заданы начальные значения функций [14]. Как и в случае произвольных ДВ Чепмена — Жуге, в общем случае существует только два решения и оба по одну сторону от огибающей поверхности. Сходимость соответствующих рядов доказана в [15]. Опираясь на разработанную методику, можно поставить вопрос об определении условий, при выполнении которых возможно распространение детонации в режиме Чепмена — Жуге.

ДВ Чепмена — Жуге в неоднородных средах

Рассмотрим[1] распространение ДВ в покоящейся горючей неоднородной смеси газов, начальное состояние которой характеризуется значениями давления и плотности, в общем случае являющимися функциями координаты — расстояния от плоскости, оси или центра симметрии:

$$p_\infty = p_\infty(r), \quad \rho_\infty = \rho_\infty(r), \quad \bar{u}_\infty = 0.$$

Для определенности предположим, что волна распространяется по невязкому и нетеплопроводному совершенному газу и рассматривается как поверхность разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа

[1] Эта работа выполнена в 1986 г. и опубликована в Отчете ИМ МГУ № 3374. Часть результатов докладывалась на Всесоюзном семинаре «Фундаментальные проблемы физики ударных волн» (Азау, 1987) и приведены в сборнике тезисов докладов (Черноголовка, 1987).

выделяется тепло Q, величина которого также зависит от координаты $Q = Q(r)$. Во всей области течения за волной показатель адиабаты продуктов детонации (ПД) считается постоянным и равным γ.

Течение за фронтом детонации при наличии в этой области источников массы, импульса и энергии описывается уравнениями газовой динамики [3]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu \rho u}{r} = m, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = g, \tag{1}$$

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{d}{dt} \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = e,$$

где значения $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют плоской, цилиндрической и сферической симметрии; r, t — пространственная и временная координаты; u, p, ρ — скорость, давление и плотность; γ — показатель адиабаты; m, g, e — функции, описывающие источники массы, импульса и энергии.

На фронте ДВ, распространяющейся в режиме Жуге, выполняются следующие соотношения [3]:

$$\rho_J = \rho_\infty \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma + q_J)}, \quad p_J = p_\infty \frac{(\gamma + q_J)}{q_J (\gamma + 1)}, \quad u_J = \mp D_J \frac{(1 - q_J)}{(\gamma + 1)},$$

$$D_J^2 = \frac{a_\infty^2}{q_J}, \quad a_\infty^2 = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}, \quad a_J^2 = \frac{\gamma p_J}{\rho_J}, \tag{2}$$

$$q_J^2 - 2 q_J \left[1 + \frac{Q}{a_\infty^2} (\gamma^2 - 1) \right] + 1 = 0,$$

где p_J, ρ_J, u_J, $D_J q_J$ — параметры газа и скорость волны в режиме Чепмена — Жуге, знак минус соответствует сходящимся к центру, оси или плоскости симметрии волнам, плюс — расходящимся. Показатель адиабаты исходного газа для простоты полагался равным показателю адиабаты продуктов детонации: $\gamma_\infty = \gamma$.

Система уравнений газовой динамики, будучи гиперболической, имеет три семейства характеристик, на которых выполняются соответствующие характеристические соотношения [3]. Если при этом на некоторой достаточно гладкой линии $r = r_0(t)$ значения функций $p(r, t)$, $\rho(r, t)$, $u(r, t)$ удовлетворяют одному из характеристических соотношений, но не удовлетворяют другому соотношению на характеристике, эта линия является огибающей соответствующее семейство характеристик системы уравнений (1), а решение в окрестности огибающей необходимо искать в виде

$$p(r, t) = p_0(t) + p_1(t) \sqrt{|r - r_0(t)|} + p_2(t) |r - r_0(t)| \pm$$
$$\pm p_3(t) |r - r_0(t)|^{3/2} + \ldots \tag{3}$$

(аналогично для функций $\rho(r, t)$ и $u(r, t)$), причем решение существует при $r < r_0(t)$ либо при $r > r_0(t)$ [12, 13].

В общем случае m, g, e могут быть функциями не только независимых переменных, но и p, ρ и u. Предположим, что на траектории $r = r_0(t)$ эти функции принимают значения m_0, g_0 и e_0. Если теперь подставить разложения (3) в (1), то последняя окажется эквивалентной системе бесконечного числа алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Часть ее для коэффициентов с индексами 0, 1 и 2 имеет вид

$$\rho_1 (D_J - u_0) = \rho_0 u_0,$$
$$\rho_0 u_1 (D_0 - u_0) = p_1, \quad \rho_0 p_1 = \gamma p_0 \rho_1; \tag{4}$$

$$\rho_2 (u_0 - D_0) + \rho_0 u_2 = \mp \dot{\rho}_0 - \rho_1 u_1 \mp \frac{\nu \rho_\infty u_\infty}{r_0} \pm m_0,$$

$$\rho_0 u_2 (u_0 - D_0) + p_2 = \mp \rho_0 \dot{u}_0 \pm g_0 \rho_0, \tag{5}$$

$$(\rho_0 p_2 - \nu p_0 \rho_2)(u_0 - D_0) = \mp \left(\rho_0 \dot{p}_0 - \gamma p_0 \dot{\rho}_0 \right) - \frac{(\gamma - 1)}{2} \rho_0 p_1 u_1 \pm e_0 \rho_0^2 (\gamma - 1).$$

Дифференцирование по t обозначено точкой, а $D_0 - \dot{r}_0$. Здесь верхний знак соответствует существованию решения при $r > r_0(t)$, нижний — при $r < r_0(t)$. Определители систем (4) и (5), а также систем всех последующих приближений для нахождения коэффициентов разложения p_k, ρ_k, u_k, равны нулю в силу выполнения упомянутого выше характеристического соотношения. Поэтому для совместности системы (5) необходимо потребовать выполнения следующего условия, вытекающего из рассмотрения расширенного определителя системы:

$$\mp \rho_0 \dot{p}_0 \pm \gamma p_0 \dot{\rho}_0 - \rho_0 u_1 p_1 \frac{\gamma - 1}{2} \pm \rho_0^2 (u_0 - D_0) \dot{u}_0 \mp \rho_0 \dot{\rho}_0 (u_0 - D_0) -$$
$$- \rho_0 \rho_1 u_1 (u_0 - D_0)^2 \mp \frac{\nu_0 u_0}{r_0} \rho_0^2 (u_0 - D_0)^2 \pm e_0 \rho_0^2 (\gamma - 1) \mp$$
$$+ (u_0 - D_0) g_0 \rho_0^2 \pm (u_0 - D_0)^2 m_0 \rho_0 = 0.$$

Из этого выражения с учетом (4) находим

$$\rho_1^2 = \pm \frac{2\rho_0^3}{\gamma(\gamma+1) p_0} \left[- \dot{u}_0 + (u_0 - D_0) \left(\frac{\dot{p}_0}{\gamma p_0} + \frac{\nu u_0}{r_0} \right) - \right.$$
$$\left. - e_0 \frac{(\gamma - 1)}{(u_0 - D_0)} + g_0 - m_0 \frac{(u_0 - D_0)}{\rho_0} \right]. \quad (6)$$

Аналогичные соотношения можно получить для следующих коэффициентов разложения (3): p_g, ρ_g, u_g и т. д. С учетом соответствующих условий совместности это позволит полностью построить ряды указанного вида и тем самым определить решение уравнений (1) в некоторой окрестности линии $r = r_0(t)$. Для существования искомого решения необходимо потребовать выполнения условия

$$\mp \dot{u}_0 \pm (u_0 - D_0) \left(\frac{\dot{p}_0}{\gamma p_0} + \frac{\nu u_0}{r_0} \right) \mp e_0 \frac{(\gamma - 1)}{(u_0 - D_0)} \pm g_0 + m_0 \frac{(u_0 - D_0)}{\rho_0} \geqslant 0, \quad (7)$$

причем знак равенства здесь определяет для рассматриваемого значения времени t выполнение соответствующего характеристического соотношения.

Рассмотрим течения за ДВ, распространяющимися в режиме Жуге. Вдоль траектории ДВ, задаваемой соотношением $r = r_0(t) = r_J(t)$ выполняется равенство $\dot{r}_0 = D_0 - \mp D_J$, в котором положительный знак соответствует расходящимся, а отрицательный — сходящимся волнам, одновременно $p_0 = p_J$, $u_0 = u_J$, $\rho_0 = \rho_J$ (определяются из (2), $m_0 = m_J$, $g_0 = g_J$, $e_0 - e_J$). При этом значения p_0, u_0 и ρ_0 удовлетворяют одному из характеристических соотношений, тогда как другое не выполняется. Таким образом, траектория волны Чепмена — Жуге есть огибающая характеристика, в соответствии с чем можно, используя соотношения (7), определить необходимое условие существования решения за волной

$$\mp \dot{u}_J + a_J \left(\frac{\dot{p}_J}{\gamma p_J} \mp \frac{\nu u_J}{\gamma_J} \right) - \frac{e_J (\gamma - 1)}{a_J} \pm g_J - a_J \frac{m_J}{\rho_J} \geqslant 0. \quad (8)$$

Неравенство (8) вместе с (2) определяет необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге, распространяющейся по среде с параметрами, задаваемыми функциями $p_\infty = p_\infty(r)$ и $\rho_\infty = \rho_\infty(r)$ при законе тепловыделения в волне $Q = Q(r)$, с источниками энерговыделения, импульса и массы в потоке за волной, значения которых подчинены законам $e_J = e_J(r_J)$, $g_J = g_J(r_J)$ и $m_J = m_J(r_J)$.

Из (8) следует, что при постоянном фоне $p_\infty = \mathrm{const}$, $u_\infty = \mathrm{const}$, $\rho_\infty = \mathrm{const}$ и $Q = \mathrm{const}$ при отсутствии источников за волной ($m = g = e = 0$) в случае $\nu = 1$, 2 левая часть неравенства всегда положительна (отрицательна) для расходящихся (сходящихся) волн. Отсюда следует известный факт, что траектории расходящихся ДВ в сферически и цилиндрически симметричном случае — огибающие семейства характеристик, сходящиеся же волны распространяются в пересжатом режиме. При $\nu = 0$ на траектории волны выполнено характеристическое соотношение. Таким образом, траектории плоских волн — характеристики. Таким образом, условие (8) принимает вид

$$\pm\left[\frac{p'_\infty}{p_\infty}\left(\frac{2q_J}{1+q_J}+\frac{q_J}{\gamma}\right)+\frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty}\frac{1-q_J}{1+q_J}+\frac{Q'}{Q}\frac{(q_J+3)(1-q_J)}{2(1+q_J)}\right]\mp$$

$$\mp\frac{\nu(\gamma+q_J)(1-q_J)}{(\gamma+1)r_J}-\frac{e_J}{a_\infty^2}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2q_J^{3/2}}{(\gamma+q_J)a_\infty}\pm\frac{g_J}{a_\infty^2}(\gamma+1)q_J-$$

$$-\frac{m_J}{\rho_\infty}\frac{q^{1/2}(\gamma+q_J)^2}{a_\infty(\gamma+1)}\geqslant 0, \qquad (9)$$

штрихом обозначено дифференцирование по r.

Рассмотрим некоторые частные случаи распространения ДВ в неоднородных средах. При этом в основном остановимся на случае, когда в условии (9) соблюдено равенство — предельный случай распространения волны вдоль характеристики.

Волны Чепмена — Жуге с переменным тепловыделением

Пусть неоднородность окружающей среды определяется только зависимостью тепловыделения в волне Q от пространственной координаты r, остальные параметры среды полагаются постоянными: $Q = Q(r)$, $p_\infty = \mathrm{const}$, ρ_∞ — const и $u_\infty = 0$. Соотношение (9) примет вид

$$\mp\frac{Q'}{Q}\frac{(q_J+3)(1-q_J)}{2(1+q_J)}\mp\frac{\nu(\gamma+q_J)(1-q_J)}{(\gamma+1)r_J}\geqslant 0. \qquad (10)$$

Определим возможность распространения волны вдоль характеристики при выполнении равенства в (10). Здесь, как и в дальнейшем, удобно воспользоваться соотношением

$$\frac{q_J'}{q_J} = -\frac{1-q_J}{1+q_J}\left(\frac{Q'}{Q}-\frac{p'_\infty}{p_\infty}+\frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty}\right),$$

тогда

$$(\gamma+q_J)^{3-\gamma}(1-q_J)^{-4\gamma}q_J^{3(\gamma+1)}/r_J^{2\nu\gamma}=c_1, \qquad (11)$$

где c_1 — значение левой части (10) в некоторой точке r_1 траектории, в которой она является волной Чепмена — Жуге. В силу того, что

$$Q=\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}\frac{(1-q_J)^2}{2(\gamma^2-1)q_J}, \qquad (12)$$

соотношение (11) определяет в неявном виде закон изменения тепловыделения с расстоянием, при котором ДВ может распространяться вдоль характеристики.

Диапазон изменения параметра q_J лежит в интервале $(0, 1)$. Значение $q_J \to 0$ отвечает асимптотический случай $r \to 0$, причем оказывается $q_J \sim r^{\frac{2\nu\gamma}{3(\gamma+1)}}$, а из (12) получаем $Q \sim 1/q_J \sim r^{-\frac{2\nu\gamma}{3(\gamma+1)}}$.

Таким образом, при приближении к центру (оси) симметрии с увеличением интенсивности волны Жуге ($q_J \to 0$) изменение тепловыделения с расстоянием, при котором траектория волны может совпадать с характеристикой, подчинено степенно́му закону $Q \sim r^{-\lambda_1}$ с показателем степени $\lambda_1 = 2\nu\gamma/3(\gamma+1)$. Этот результат согласуется с выводами работы [10], где в предположении сильной ДВ найден закон схождения фронта как характеристики, разделяющей возмущенную и невозмущенную среды (см. также [20]).

Закон движения сходящейся ДВ в рассматриваемом предельном случае имеет степенной характер: $r = a(-t)^{n_1}$ (полагаем $r = 0$ при $t = 0$) с показателем степени $n_1 = 2/(\lambda_1 + 2)$. Сравним его с законом движения сходящихся УВ, также степенным [16] с показателем степени n_2. В частном случае $\gamma = 1{,}4$, $\nu = 2$, $n_2 = 0{,}717$. Закон распространения ДВ при таких γ и ν определяется показателем $n_1 = 0{,}720$. Оказывается, что тепловыделение на фронте волны в рассматриваемом случае слабо влияет на закон схождения сильной УВ.

В другом асимптотическом случае $q_J \to 1$, соответствующем $r \to \infty$, из (11), (12) следует $1 - q_J \sim r^{-\nu/2}$ и $Q \sim (1 - q_J)^2 \sim r^{-\nu}$. В итоге, на больших расстояниях от центра (оси) симметрии сохранение режима Жуге оказывается возможным для ДВ исчезающе малой интенсивности ($q_J \to 1$) с тепловыделением, асимптотически подчиняющемся степенно́му закону $Q \sim r^{-\lambda_2}$ с $\lambda_2 = \nu$.

Пусть тепловыделение в волне подчиняется степенно́му закону $Q \sim r^{-\lambda}$. Из условия (10) следует выражение для диапазона значений λ как функции интенсивности волны q_J, при которых волна может распространяться в режиме Жуге

$$\lambda \gtrless \frac{2\nu(\gamma + q_J)(1 + q_J)}{(\gamma + 1)(3 + q_J)}. \qquad (13)$$

Здесь, как и ранее, верхний знак соответствует сходящимся, нижний — расходящимся волнам. Выражение в правой части условия (13) на интервале (0,1) изменений параметра q_J — монотонно возрастающая функция, принимающая на границах этого интервала значения соответственно λ_1 и λ_2. В результате для сферических и цилиндрических волн можно сделать ряд заключений.

1. Если тепловыделение с расстоянием падает быстрее (медленнее) функции $r^{-\lambda_2}$ (в частности, для степенно́го закона тепловыделения, если $\lambda \geqslant \lambda_2$ ($\lambda < \lambda_2$)), то на всем интервале изменения тепловыделения и соответственно интенсивности волны расходящаяся (сходящаяся) ДВ не может быть волной Чепмена — Жуге — она будет распространяться в пересжатом режиме.

2. Если тепловыделение с расстоянием падает медленнее (быстрее) функции $r^{-\lambda_1}$ (в частности, для степенно́го закона тепловыделения, если $\lambda \leqslant \lambda_1$ ($\lambda \geqslant \lambda_1$)), то при любом значении тепловыделения расходящаяся (сходящаяся) волна будет сохранять возможность распространения в режиме Жуге.

3. Промежуточный случай, когда закон изменения тепловыделения с расстоянием лежит между этими двумя степенны́ми законами (в частности, если $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$), определяет следующий характер процесса: если даже в некоторый момент (при определенном значении тепловыделения в волне, а соответственно ее интенсивности — некотором значении параметра q_J) волна является волной Чепмена — Жуге, то в любом случае на некотором расстоянии (критическом для данного режима тепловыделения) она выйдет из режима Жуге.

В плоском случае ($\nu = 0$) из (10) следует, что существование режима Жуге определяется законом производной Q': если по мере распространения плоской ДВ тепловыделение во фронте падает ($Q' < 0$ для удаляющихся от плоскости симметрии и $Q' > 0$ для приближающихся волн), то последняя распространяется в пересжатом режиме; если знак производной Q' обратный (тепловыделение растет), то режим Жуге может сохраниться, причем в отличие от случая постоянного тепловыделения здесь траектория плоской волны — огибающая одного из акустических семейств характеристик.

Соотношения (11), (12) определяют зависимость тепловыделения от расстояния в предельном случае равенства в условии (10). Сходящаяся или расходящаяся ДВ с тепловыделением, подчиненным этому закону,

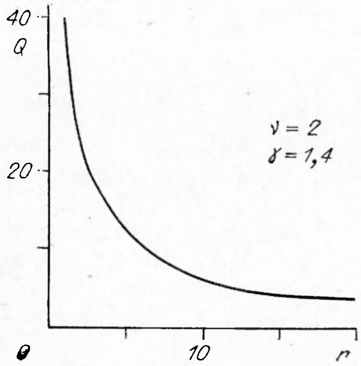

Рис. 1.

может быть волной Чепмена — Жуге, и на ее траектории выполняется соответствующее характеристическое соотношение. На рис. 1 показана зависимость $Q(r)$ в предположении, что на некотором расстоянии $r = R$ тепловыделение во фронте составляло $Q/(\gamma p_\infty/\rho_\infty) = 40$ ($\nu = 2$, $\gamma = 1{,}4$). Асимптоты кривой:

$$Q(r) \sim r^{-\lambda_1} \text{ при } r \to 0 \text{ и } Q(r) \sim r^{-\lambda_2}$$
$$\text{при } r \to \infty.$$

Проведенные в модельной одномерной постановке расчеты уравнений нестационарной газовой динамики [17], где в каждый следующий момент времени максимально (минимально) определялось возможное значение тепловыделения в расходящейся (сходящейся) волне, при котором волна не выходит из режима Жуге, показали: 1) определяемый закон изменения тепловыделения с расстоянием совпадает в пределах задаваемой точности вычислений с законом, полученным из приведенных аналитических рассуждений (см. рис. 1); 2) оказывается, что ДВ действительно распространяется в режиме Жуге во всем диапазоне рассматриваемых значений $r > R$ ($r < R$) при задаваемом законе тепловыделения с расстоянием (аналитический же результат определяет лишь необходимое, но не достаточное условие существования волны Чепмена — Жуге).

Волны Чепмена — Жуге в среде с переменной плотностью

Пусть неоднородность окружающей среды определяется только зависимостью $\rho_\infty(r)$, остальные параметры среды полагаются постоянными: $\rho_\infty = \rho_\infty(r)$, $p_\infty = \text{const}$, $Q = \text{const}$ и $u_\infty = 0$. Соотношение (9) примет вид

$$\mp \frac{\rho_\infty'}{\rho_\infty} \frac{1 - q_J}{1 + q_J} \mp \frac{\nu(\gamma + q_J)(1 - q_J)}{(\gamma + 1)\, r_J} \geqslant 0. \qquad (14)$$

Следуя последовательности рассуждений, проведенных в предыдущем разделе, получим

$$(\gamma + q_J)^{-1}(1 - q_J)^{-\nu} q_J^{\gamma+1}/r_J^{\nu\gamma} = c_2, \qquad (15)$$

а в двух асимптотических случаях:

$$r \to 0:\ q_J \to 0,\ q_J \sim r^{\frac{\nu\gamma}{\gamma+1}}, \rho_\infty \sim 1/q_J \sim r^{-\frac{\nu\gamma}{\gamma+1}}, \qquad (16)$$
$$r \to \infty:\ q_J \to 1,\ 1 - q_J \sim r^{-\nu}, \rho_\infty \sim (1 - q_J)^2 \sim r^{-2\nu}.$$

Из (14) при степенной зависимости $\rho_\infty \sim r^{-\omega}$ получаем выражение, определяющее предельное значение показателя степени ω как функции интенсивности волны g_J, при котором существуют волны Чепмена — Жуге в таких неоднородных средах:

$$\omega \gtrless \frac{\nu(\gamma + q_J)(1 + q_J)}{(\gamma + 1)}. \qquad (17)$$

Здесь верхний знак соответствует сходящимся, нижний — расходящимся волнам. Выражение в правой части условия (17) на интервале (0,1) изменений параметра g_J — монотонно возрастающая функция, принимающая на границах этого интервала значения соответственно $\omega_1 = \nu\gamma/(\gamma + 1)$ и $\omega_2 = 2\nu$. В результате для распространения сферических и цилиндрических волн можно сделать ряд заключений.

1. Если плотность с расстоянием падает быстрее (медленнее) функции $r^{-\omega_2}$ (в частности, для степенного закона изменения плотности, если

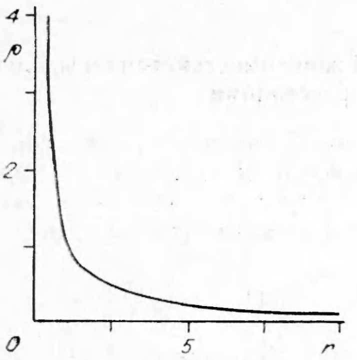

Рис. 2.

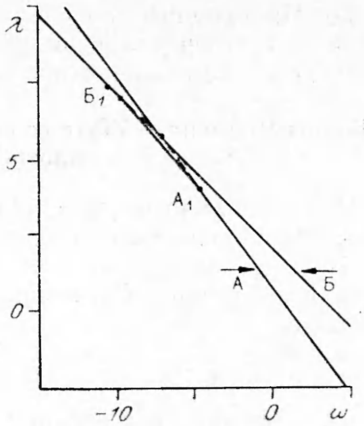

Рис. 3.

$\omega \geqslant \omega_2 (\omega < \omega_2)$), то на всем интервале изменения плотности и соответственно интенсивности волны расходящаяся (сходящаяся) ДВ не может быть волной Чепмена — Жуге. Она будет распространяться в пересжатом режиме.

2. Если плотность с расстоянием падает медленнее (быстрее) функции $r^{-\omega_1}$ (в частности, для степенного закона изменения плотности, если $\omega \leqslant \omega_1$ ($\omega \geqslant \omega_1$)), то на любом расстоянии, при любом значении плотности среды, расходящаяся (сходящаяся) волна будет сохранять возможность распространения в режиме Жуге.

3. Промежуточный случай, когда закон изменения плотности с расстоянием лежит между этими двумя указанными выше (в частности, для степенно́го закона плотности, если $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$), определяет следующий характер распространения волны: если даже в некоторый момент (при некоторых значениях ρ_∞ и q_J) волна будет волною Чепмена — Жуге, то в любом случае на некотором расстоянии (критическом для данного закона изменения плотности) она выйдет из режима Жуге. Плоские волны ($\nu = 0$) оказываются возможными при неубывании по мере распространения волны плотности окружающей среды $\left(\rho'_\infty \geqslant 0\right)$.

Полученный степенно́й закон распределения плотности, соответствующий такому закону падения плотности среды перед сильной ДВ, при котором последняя распространяется вдоль характеристики, согласуется с результатами работ [3, 5, 8, 20], где определяется пороговое значение показателя степени в законе распределния плотности, при котором существует волна Чепмена — Жуге, совпадающего со значением ω_1.

Закон движения сильной ДВ по среде с $\rho_\infty \sim r^{-\omega_1}$ запишется так:

$$r \sim a t^{n_1},\ n_1 = \frac{2}{\omega_1 + 2} = \frac{2(\gamma + 1)}{2(\gamma + 1) + \nu\gamma}.$$

С другой стороны, автомодельное решение для сильной УВ (без тепловыделения) в среде с $\rho_\infty \sim r^{-\omega}$ определяет закон движения фронта $r \sim a t^{n_2}$ с $n_2 = 2/(5 - \omega)$, в случае $\omega = \omega_1$ $n_2 = (\gamma + 1)/[(5 - \nu)\gamma + 5]$. В итоге, при $\gamma = 1{,}4$, $\nu = 2$ $n_2 = 0{,}522$, что меньше, чем в законе распространения сильной ДВ вдоль характеристики ($n_1 = 0{,}632$). Это определяет влияние тепловыделения в волне на процесс распространения сильной волны.

Аналогично случаю с переменным тепловыделением на рис. 2 представлена зависимость $\rho_\infty(r)$ в предположении, что на расстоянии $r = R$ $\rho_\infty/\rho_0 = 1$, $Q/(\gamma p_\infty/\rho_\infty) = 40$, $\nu = 2$, $\gamma = 1{,}4$ (R, ρ_0 — некоторые характерные значения координаты и плотности) и выполняется равенство в соотношении (14): траектория волны в этом случае совпадает с характеристикой. Асимптоты при $r \to 0$ и $r \to \infty$ — степенны́е функции с показателями $-\omega_1$

и $-\omega_2$. Проведенные численные расчеты нестационарного распространения волн подтвердили существование волн Чепмена — Жуге в средах с задаваемой таким законом плотностью.

Волны Чепмена — Жуге со степенной зависимостью тепловыделения и плотности от расстояния

Полученные выше результаты можно обобщить в случае зависящих от расстояния плотности среды и тепловыделения в волне. Соотношение (9) в предположении, что в окрестности точки r_J законы изменения плотности среды и тепловыделения в волне степенные ($\rho_\infty \sim r^{-\omega}$ и $Q \sim r^{-\lambda}$), примет вид

$$\pm 2\omega \pm \lambda (3 + q_J) \mp \frac{2\nu}{\gamma + 1} (\gamma + q_J) (1 + q_J) \geqslant 0. \tag{18}$$

Рассматривая, как и ранее, предельные случаи сильной ДВ ($q_J \to 0$) и волны исчезающе малой интенсивности ($q_J \to \infty$), получим систему неравенств

$$3\lambda + 2\omega \gtrless \frac{2\nu\gamma}{\gamma + 1}, \quad 2\lambda + \omega \gtrless 2\nu. \tag{19}$$

При выполнении равенства в представленных условиях эти соотношения определяют в случае $\nu = 1{,}2$ набор прямых па плоскости (λ, ω): А и Б — для первого и второго равенства в (19), В — для прямых, задаваемых (18). Тогда область, лежащая выше прямых А и Б, определяет те значения λ и ω, при которых в случае расходящихся волн ДВ — пересжатая волна, а если волны сходящиеся. ДВ может распространяться в режиме Жуге (рис. 3; $\nu = 2$, $\gamma = 1{,}4$).

С другой стороны, область, лежащая ниже линий А и Б, а также ниже семейства прямых В, определяет значения λ и ω, при которых, напротив, расходящиеся волны могут быть волнами Чепмена — Жуге, а сходящиеся распространяются в пересжатом режиме. Последняя область ограничена выше точки $Б_1$ прямой Б, ниже точки $А_1$ — прямой А, а между точками $А_1$ и $Б_1$ — некоторой криволинейной границей $А_1Б_1$, задаваемой параметрическим набором линий В при изменении параметра q_J в диапазоне (0,1).

Промежуточная между названными областями часть плоскости (λ, ω) определяет величины λ и ω, при которых существование волны Чепмена — Жуге по мере распространения волны постепенно сменяется пересжатым режимом. В плоском случае пересекающиеся в начале координат прямые А и Б из (19) определяют три области на плоскости (λ, ω) с аналогичными свойствами[2] (см. рис. 3).

Волны Чепмена — Жуге в неоднородных средах с источниками тепловыделения

Неоднородность среды может определяться не только теми особенностями, которые рассмотрены выше, но и наличием источников тепловыделения (в общем случае также источников массы и импульса) в потоке за ДВ. В случае однородной покоящейся среды, когда $p_\infty = \text{const}$, $\rho_\infty = \text{const}$, $u_\infty = 0$, $Q = \text{const}$, (9) примет вид

$$\mp \frac{\nu (\gamma + q_J) (1 - q_J)}{(\gamma + 1) r_J} - M \geqslant 0,$$

$$M = \frac{e_J}{a_\infty^2} \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2 q_J^{3/2}}{(\gamma + q_J) a_\infty} \mp \frac{g_J}{a_\infty^2} (\gamma + 1) q_J - \frac{m_J}{\rho_\infty} \frac{q^{1/2} (\gamma + q_J)^2}{a_\infty (\gamma + 1)}. \tag{20}$$

---

[2] Естественные физические ограничения на возможные значения параметров λ и ω накладывают условие конечности массы и суммарного тепловыделения в сфере или цилиндре конечных размеров ($\nu = 1{,}2$), что определяет необходимость соблюдения неравенств: $\omega < \nu + 1$, $\omega + \lambda < \nu + 1$. Это замечание относится также к рассмотренным выше случаям.

Таким образом, возможность существования волн Чепмена — Жуге определяется суммарным воздействием источников массы, импульса и энергии, задаваемым обобщенным параметром M. В плоском случае ($\nu = 0$) это воздействие должно быть либо отрицательным, ослабляющим поток, либо различные источники должны взаимно компенсировать друг друга: $M \leqslant 0$. В сферическом или цилиндрическом случае ($\nu = 2, 1$) для расходящихся волн (нижний знак в (20)) рассматриваемое условие определяет возможность существования волн Чепмена — Жуге с суммарным положительным воздействием ($M > 0$), но ограничивает степень этого воздействия некоторой величиной, зависящей от координаты волны и ее интенсивности, причем с увеличением расстояния ($r_J \to \infty$) допустимая степень такого положительного воздействия стремится к нулю: $M \to 0$.

В асимптотическом случае сильной волны ($q_J \to 0$) оказываются возможными достаточно интенсивные положительные источники — большие предельные значения $m_J > 0$, $g_J > 0$ и $e_J > 0$. С другой стороны, если волна с бесконечно убывающей интенсивностью ($g_J \to 1$), условие (20) примет вид

$$\frac{e_J}{a_\infty}(\gamma - 1) + g_J + \frac{m_J}{\rho_\infty} a_\infty \leqslant 0.$$

Оно аналогично соотношению, полученному в [18], где исследовался вопрос о затухании УВ и показано, что при положительном обобщенном параметре в левой части последнего неравенства решения за распространяющейся характеристикой не существует — характеристика сразу же переходит в УВ.

Для сходящихся сферических и цилиндрических ДВ (верхний знак в (20)) для возможности существования режима Жуге рассматриваемое условие определяет, напротив, отрицательное суммарное воздействие источников и ограничивает допустимую минимальную степень ослабления потока в зависимости от интенсивности волны и ее координаты. Причем, по мере приближения к центру симметрии ($r_J \to 0$) степень ослабления потока для волны конечной интенсивности должна быть все более значительной.

Остановимся отдельно на случае, когда в потоке за волной существует только один источник — источник энерговыделения e_J. Условие (20) примет вид

$$\frac{\nu}{(\gamma + 1)^2 (\gamma^2 - 1)} \frac{(\gamma + q_J)^2 (1 - q_J)}{q_J^{3/2}} \geqslant \frac{e_J r_J}{a_\infty^2 a_\infty}. \tag{21}$$

По (1) e_J — это количество тепла, выделяющееся за фронтом, в расчете на единицу массы в единицу времени. Таким образом, выражение в правой части (21) определяет безразмерное количество тепла, выделяющееся за фронтом волны за счет источника в течение некоторого характерного для данного положения фронта детонации r_J промежутка времени $t = r_J / a_\infty$. Для данного положения фронта (фиксированного значения r_J) при уменьшении интенсивности волны (увеличении q_J) допустимое значение положительного тепловыделения за фронтом e_J, при котором волна может оставаться волной Чепмена — Жуге, уменьшается, причем для исчезающе малой интенсивности волны ($q_J \to 0$) сколь угодно малое тепловыделение за фронтом выводит волну из режима Жуге.

С другой стороны, при фиксированной интенсивности волны с увеличением расстояния предельное значение тепловыделения e_J уменьшается обратно пропорционально расстоянию r_J. Вследствие этого, если предположить, что e_J есть функция лишь параметров на фронте детонации (величина постоянная для данной интенсивности волны q_J), то существует некоторое предельное расстояние, превысив которое ДВ с таким источником энерговыделения за ней выйдет из режима Жуге на пересжатый режим.

Полученные аналитические результаты подтверждаются численными расчетами, выполненными в модельной постановке (метод Годунова [17]): решались уравнения нестационарной газовой динамики (1) с наличием источника энерговыделения за фронтом детонации $e(r, t)$, который для простоты полагался постоянным во всей области течения за волной и независящим от времени.

Расчеты проводились для различных значений определяющих параметров задачи: $Q/(p_\infty/\rho_\infty)$, $e/(p_\infty/\rho_\infty)$, γ, среда перед фронтом волны считалась покоящейся и ее параметры p_∞ и ρ_∞ постоянными. Обнаружено, что в полном соответствии с соотношением (21) в случае плоской симметрии волна не может распространяться в режиме Жуге: для любого значения интенсивности источника за фронтом e_J волна переходит на пересжатый режим после «включения» источника. При сферической симметрии волна действительно до определенного расстояния, зависящего от e_J (при фиксированных Q и γ), сохраняет режим Жуге, причем предельное расстояние удовлетворяет соотношению (21): волна, перейдя в область значений r_J, превышающих эту величину, сразу же идет в пересжатом режиме.

Следует заметить, что дополнительное энерговыделение за счет источника меняет профиль давления в области за фронтом, увеличивая давление, а при определенных законах энерговыделения за фронтом оказывается возможным образование интенсивных волн сжатия, за счет которых может произойти преждевременный (ранее, чем определяется соотношением (21)) выход волны из режима Жуге [19]. В численном эксперименте выбран случай постоянного энерговыделения за фронтом $e = \mathrm{const}$, который, как показали расчеты, не приводит к такой перестройке течения. Переход волны на пересжатый режим в этом случае определяется именно наличием источника непосредственно за фронтом волны $e_J = e$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михельсон В. А.** О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей.— М.: Университетская тип., 1890.
2. **Гриб А. А.** О распространении плоской ударной волны при обыкновенном взрыве у твердой стенки // ПММ.— 1944.— 8, № 3.— С. 169.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1981.
4. **Зельдович Я. Б.** О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности при сферическом распространении детонационной волны // ЖЭТФ.— 1942.— 12, № 9.— С. 389.
5. **Яворская И. М.** Решение некоторых задач о детонации в среде с переменной плотностью // Докл. АН СССР.— 1956.— 111, № 4.— С. 783.
6. **Шкин И. С.** Исследование некоторых задач о детонации и горении в средах с переменной плотностью // Вестник МГУ. Серия мат., мех., астр., физ., хим.— 1957.— № 4.— С. 49.
7. **Андрианкин Э. И.** О некоторых автомодельных движениях газа при ударе и детонации в среде с переменной плотностью // ПММ.— 1966.— 30, № 6.— С. 1133.
8. **Сапунков Я. Г.** Сходящиеся детонационные волны в режиме Ч.— Ж. в среде с переменной и постоянной начальной плотностью // Там же.— 1967.— 31, № 5.— С. 932.
9. **Зельдович Я. Б.** Сходящаяся цилиндрическая детонационная волна // ЖЭТФ.— 1959.— 36, № 3.— С. 782.
10. **Нигматулин Р. И.** Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны // ПММ.— 1967.— 31, № 1.— С. 152.
11. **Свалов А. М.** Об условиях существования криволинейных детонационных волн //. Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика.— 1976.— № 6.— С. 71.
12. **Левин В. А., Черный Г. Г.** Асимптотические законы поведения детонационных волн // ПММ.— 1967.— 31, № 3.— С. 393.
13. **Левин В. А.** Распространение детонационных волн в электрическом и магнитном полях: Отчет ИМ МГУ, 1969.— № 972.
14. **Левин В. А., Свалов А. М.** Об особенностях распространения детонационных волн // Тр. ИМ МГУ, № 44.— М.: Изд-во МГУ, 1978.
15. **Куликовский В. А.** Задача Коши для квазилинейной системы при наличии характеристических точек на начальной поверхности // ПММ.— 1985.— 49, № 2.— С. 258.
16. **Guderley G.** Starke Kugeliche und Zylindrische Verdichtungsstosse in der Nahe de Kugelmittelpunktes bzv der Zylinderachse // Luftfahrtforshung.— 1942.— 19, N 9.— S. 302.