УДК 624.074+539.376 : 678.5.06

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК

В. Д. Потапов

(Москва)

В работе [1] рассмотрена задача об устойчивости вязкоупругих стержней и оболочек, находящихся под действием сжимающих нагрузок, случайным образом меняющихся во времени. Для решения использован метод моментных функций. Указанная задача относится к классу стохастически нелинейных, поэтому система уравнений относительно искомых моментных функций оказывается незамкнутой [2—4]. Замыкание системы уравнений осуществляется с помощью гипотезы о квазигауссовости изучаемого процесса, в результате чего получено приближенное решение. Особенность построения такого решения делает в общем случае весьма проблематичной оценку степени его погрешности. С этой точки зрения представляет несомненный интерес анализ точных решений указанных задач, на примере которых можно провести сопоставление результатов, полученных приближенными и точными методами.

Данная работа посвящена рассмотрению точного метода решения задачи об устойчивости элементов конструкций, находящихся под действием случайных нагрузок.

Допустим, что вязкоупругий стержень, загруженный стационарными поперечной нагрузкой и сжимающей силой, приложенной по концам, покоится на сплошном вязкоупругом основании. Уравнение равновесия для такого стержня при квазистатической постановке задачи имеет вид

$$w = -(c + \mathbf{K})\,[(1 - \mathbf{\Gamma})EIw^{\mathrm{IV}} + P(w + w_0)'' - q], \tag{1}$$

где

$$\mathbf{\Gamma} f = \int_{t_0}^{t} \Gamma(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad \mathbf{K}\varphi = \int_{t_0}^{t} K(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau;$$

w, w_0 — дополнительный и начальный прогиб стержня. Остальные обозначения общепринятые.

Ядра релаксации $\Gamma(t-\tau)$ и ползучести $K(t-\tau)$ характеризуют вязкие свойства материала стержня и вязкоупругого основания.

Считая стержень шарнирно-опертым по концам и полагая

$$w_0(x) = f_0 \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$w(x, t) = f(t) \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad q(x, t) = q^0(t) \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

из уравнения (1) получим

$$f = -(c + \mathbf{K})\left[(1 - \mathbf{\Gamma})EI\frac{k^4\pi^4}{l^4}f - \frac{k^2\pi^2}{l^2}P(f + f_0) - q^0\right]. \tag{2}$$

Представляя в дальнейшем ядра $\Gamma(t-\tau)$, $K(t-\tau)$ в виде линейной комбинации экспонент, интегральное уравнение (2) можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения.

Запишем случайные функции $P(t)$, $q^0(t)$ следующим образом:

$$P(t) = P_0 + P'(t), \; q^0(t) = q_0 + q'(t),$$

где

$$P_0 = \langle P(t)\rangle = \mathrm{const}; \; q_0 = \langle q^0(t)\rangle = \mathrm{const}.$$

Рассматривая стационарные процессы $P'(t)$, $q'(t)$ как результат прохождения «белых» шумов через линейные фильтры и учитывая экспоненциальный характер ядер $K(t-\tau)$, $\Gamma(t-\tau)$, путем расширения фазового пространства заменим интегральное уравнение (2) системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы уравнений является многомерным марковским процессом. Наиболее полную информацию об этом процессе дает плотность вероятности, которая удовлетворяет уравнению Колмогорова [5].

В качестве примера, позволяющего качественно и количественно оценить поведение вязкоупругих элементов, сжатых нагрузками, являющимися стационарными процессами, рассмотрим упругий стержень, находящийся в сплошной среде, которая в реологическом смысле представляет собой тело Максвелла. Пренебрегая упругими деформациями в среде по сравнению с вязкими деформациями, запишем соотношение между скоростью изменения прогиба стержня и реакцией основания r в виде

$$dw/dt = Ar.$$

Допустим, что случайная составляющая сжимающей нагрузки пропорциональна гауссовскому «белому» шуму $\xi(t)$ с коэффициентом пропорциональности m. Тогда уравнение (2) в дифференциальной форме принимает вид (при $t \geqslant t_0 = 0$, $q^0 \equiv 0$)

$$ds/d\tau = -[(1-\alpha)s - \beta\xi s - f_0]. \tag{3}$$

Здесь $\tau = \gamma t$ — новая временная переменная;

$$\gamma = \frac{k^4\pi^4}{l^4} EIA; \quad \beta = \frac{ml^2}{k^2\pi^2 EI}; \quad \alpha = \frac{P_0 l^2}{k^2\pi^2 EI}; \quad s = f + f_0.$$

В дальнейшем рассмотрим два варианта задачи: $f_0 = 0$ и $f_0 \neq 0$. В первом случае имеем

$$ds/d\tau = -[(1-\alpha) - \beta\xi]s. \tag{4}$$

Решение этого однородного обыкновенного дифференциального уравнения должно удовлетворять начальному условию $s_0 = s(\tau_0)$. Перемещение s_0 можно понимать, например, как прогиб, накопившийся за счет вязких деформаций сплошной среды в результате нагружения стержня поперечной нагрузкой до момента приложения продольной силы (при отсутствии продольной силы прогиб s_0 уменьшался бы во времени до нуля по экспоненциальному закону). Если поперечная нагрузка случайная, прогиб s_0 является случайной величиной, подчиняющейся некоторому закону распределения, если же поперечная нагрузка детерминированная, тогда s_0 — детерминированная величина.

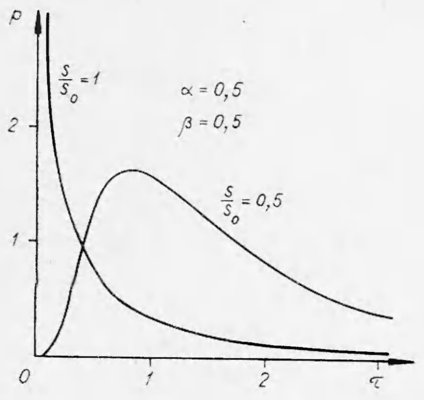
Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова относительно плотности распределения вероятностей $p(s, \tau, s_0, \tau_0)$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial s}[(1-\alpha)sp] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta^2 s^2 p). \tag{5}$$

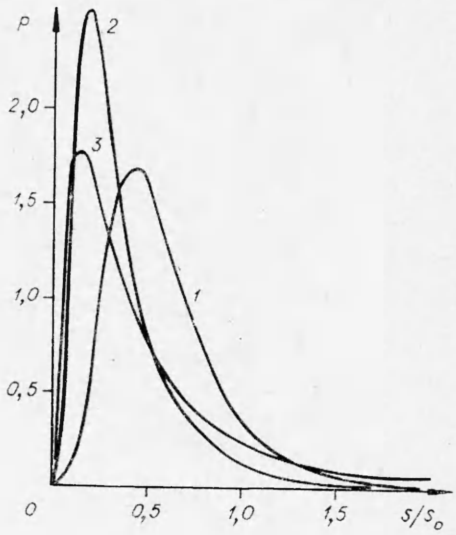
Решение этого уравнения отвечает начальному условию $p = \delta(s - s_0)$, если s_0 — детерминированная величина, или $p = p(s_0, \tau_0)$, если s_0 — случайная величина, и краевым условиям $p \to 0$ при $|s| \to \infty$. Кроме того, функция p должна удовлетворять условию положительности и нормировки.

Например, если величина s_0 детерминированная, то, сводя уравнение (5) к уравнению теплопроводности [6], получим (при $\tau_0 = 0$)

$$p(s, \tau, s_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\tau}} e^{(1-\alpha+\beta^2)\tau} \exp\left\{-\frac{[\ln(s/s_0) + (1{,}5\beta^2 + 1 - \alpha)\tau]^2}{2\beta^2\tau}\right\}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Графики изменения функции p при разных значениях α, β и τ представлены на фиг. 1, 2 (на фиг. 2 кривой *1* соответствуют значения $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5, \tau = 1$; *2* — $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5, \tau = 2$; *3* — $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1, \tau = 1$).

Зная плотность распределения $p(s, \tau, s_0)$, можно определить моменты безразмерных величин s/s_0.

Опуская промежуточные выкладки, запишем выражения для моментов k-го порядка

$$\langle (s/s_0)^k \rangle = \exp \{-[(1-\alpha) - \beta^2(k-1)/2]k\tau\}. \tag{6}$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Момент k-го порядка является затухающей функцией времени, если выполняется условие

$$\alpha < 1 - \beta^2(k-1)/2. \tag{7}$$

Например, при $k = 1$ имеем

$$\alpha < 1. \tag{8}$$

Заметим, что при $\beta = 0$ решение уравнения (4) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова [7] по отношению к возмущению начальных условий, если $\alpha < 1$.

Таким образом, условие асимптотической устойчивости по Ляпунову и условие затухания математического ожидания перемещения стержня (или условие устойчивости по математическому ожиданию решения исходного уравнения (4) [3, 8]) совпадают.

При $k = 2$ из соотношения (6) получим

$$\langle (s/s_0)^2 \rangle = \exp[-(2 - 2\alpha - \beta^2)\tau].$$

Решение уравнения (4) устойчиво в среднеквадратичном, если

$$\alpha < 1 - \beta^2/2. \tag{9}$$

Условие устойчивости (9) является более жестким, чем условие (8). Это положение подтверждается и общей теорией устойчивости решений стохастических уравнений [8]. Из неравенства (7) следует, что при фиксированном значении величин α и β, начиная с некоторого значения k, решение уравнения (4) будет неустойчиво по моментам порядка больше k.

Далее остановимся на втором варианте задачи, когда f_0 — детерминированная величина, отличная от нуля.

Запишем уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для этого случая

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial s}\{[(1-\alpha)s - f_0]p\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta^2 s^2 p). \tag{10}$$

Ограничимся рассмотрением только стационарного решения, положив $\partial p/\partial\tau = 0$. Общее решение уравнения (10) при этом имеет вид

$$p\left(\frac{s}{f_0}\right) = C\exp\left(-\frac{2f_0}{\beta^2 s}\right)\left(\frac{s}{f_0}\right)^{-\rho},$$

где $\rho = 2(1 + (1-\alpha)/\beta^2)$.

Заметим, что переменная s имеет тот же знак, что и начальный прогиб f_0. Постоянная C определяется из условия нормирования функции $p(s/f_0)$. После всех преобразований придем к следующему выражению относительно плотности распределения вероятностей:

$$p\left(\frac{s}{f_0}\right) = \frac{\beta^2}{2\Gamma(\rho-1)}\exp\left(-\frac{2f_0}{\beta^2 s}\right)\left(\frac{2f_0}{\beta^2 s}\right)^{\rho},$$

где $\Gamma(\rho - 1)$ — гамма-функция.

Графики изменения функции $p(s)$ в зависимости от α, β представлены на фиг. 3 (кривая *1* отвечает значениям $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$; *2* — $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$; *3* — $\alpha = 1$, $\beta = 1$; *4* — $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$; на кривой *4* максимум достигается при $s/f_0 = 4$). Интересно отметить, что при нагружении стержня постоянной детерминированной нагрузкой, при которой параметр α равен 1, стационарные решения задачи оказываются невозможными. Наложение на детерминированную часть нагрузки случайно составляющей приводит к появлению стационарного режима деформирования стержня.

Очевидно, что стационарное решение уравнения (10) возможно только в том случае, когда

$$\rho - 1 > 0 \text{ или } \alpha < 1 + \beta^2/2.$$

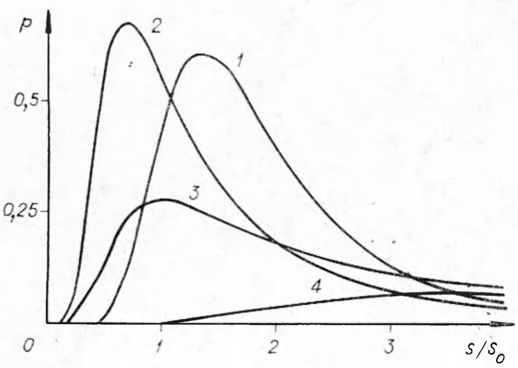
Статистические моменты k-го порядка отношений s/f_0 определяются равенствами

$$\left\langle\left(\frac{s}{f_0}\right)^k\right\rangle = \left(\frac{2}{\beta^2}\right)^k \frac{\Gamma(\rho-1-k)}{\Gamma(\rho-1)}.$$

В частности, математическое ожидание $\langle(s/f_0)\rangle$ равно

$$\langle(s/f_0)\rangle = 1/(1-\alpha). \tag{11}$$

Заметим, что нри действии детерминированной сжимающей силы P_0 при неограниченном увеличении времени перемещение стержня s стремится к постоянному значению $f_0/(1-\alpha)$, если $\alpha < 1$. Следовательно, это условие совпадает с условием ограниченности математического ожидания перемещения $\langle s\rangle$ (11) и условием устойчивости по математическому ожиданию (8) решения уравнения (4).



Фиг. 3

Очевидно, что условия ограниченности моментов норядка, большего единицы, которые имеют вид

$$\rho - 1 - k > 0 \text{ или } \alpha < 1 - \beta^2(k - 1)/2,$$

также совпадают с условиями устойчивости по моменту того же порядка решения уравнения (4).

В заключение следует отметить, что с помощью уравнений (5), (10) и при соответствующем выборе граничных условий может быть решена задача об определении вероятности выхода случайного процесса $s(t)$ за границы заданной области.

Модель упругого стержня, расположенного в сплошной вязкой среде, является упрощенной моделью вязкоупругого стержня, материал которого обладает ограниченной вязкостью. Поэтому полученные выше результаты, по-видимому, качественно будут совпадать с аналогичными результатами для указанного стержня, сжатого нагрузкой, являющейся стационарным процессом типа «белого» шума.

Поступила 22 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Потапов В. Д.** Устойчивость вязкоупругих стержней и оболочек при действии нагрузок, меняющихся во времени.— Механика композитных материалов, 1979, № 3.
2. **Миллионщиков М. Д.** К теории однородной изотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9.
3. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
4. **Болотин В. В., Москвин В. Г.** О параметрических резонансах в стохастических системах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
5. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
6. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
8. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

УДК 533.6.011

К ЗАДАЧЕ О ВНЕЗАПНОМ ВДВИГАНИИ КЛИНА

В. В. Титаренко

(Саратов)

Рассматривается задача о внезапном вдвигании в покоящуюся среду клина с постоянной скоростью. Некоторые случаи задачи исследованы в линейном приближении в [1—4]. В [4] построены также нелинейные решения, справедливые в окрестности волновой границы области возмущений. Ниже для симметричного и несимметричного случаев движения клина с малой скоростью построены нелинейные решения в окрестности его носика. Показано сильное качественное отличие полей изобар, вычисленных по линейной и нелинейной теориям. В несимметричном случае найдено, что в разложения акустики и в разложения, справедливые в окрестности волновой границы, необходимо вставить дополнительные члены, указаны их порядок и вид. Обнаружен режим вдвигания с образованием висячей ударной волны, рассчитана ее интенсивность. Проведен также линейный и нелинейный анализ всевозможных случаев вдвигания вогнутого угла.

1. Рассмотрим внезапное вдвигание бесконечного клина произвольного угла раствора $2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (фиг. 1) в покоящийся идеальный газ с малой постоянной скоростью $w_0 = a_0 M_0$ (a_0 — скорость звука в газе,