

УДК 519.6

## О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением\*

Б.М. Шумилов

Томский государственный архитектурно-строительный университет, пл. Соляная, 2, Томск, 634003

E-mails: sbm@tsuab.ru; sbm05@yandex.ru

**Шумилов Б.М.** О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 107–120.

В статье изучается вопрос использования для построения полуортогональных сплайн-вейвлетов скалярного произведения с производными. Показано уменьшение носителей данных вейвлетов по сравнению с классическими полуортогональными вейвлетами. Для случая сплайнов 3-й степени получен алгоритм вейвлет-преобразования в виде решения трехдиагональной системы линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием. Представлены результаты численных экспериментов по вычислению производных дискретно заданной функции.

**DOI:** 10.15372/SJNM20170108

**Ключевые слова:** *B-сплайны, вейвлеты, неявные соотношения разложения.*

**Shumilov B.M.** About semi-orthogonal spline-wavelets with derivatives, and the algorithm with splitting // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 107–120.

This paper deals with the use of a scalar product with derivatives for constructing semi-orthogonal spline-wavelets. The reduction of supports of such wavelets in comparison with classical semi-orthogonal wavelets is shown. For the splines of the 3rd degree, the algorithm of wavelet-transformation in the form of the solution to a three-diagonal system of the linear equations with strict diagonal prevalence has been obtained. The results of numerical experiments on the calculation of derivatives of a discretely set function are presented.

**Keywords:** *B-splines, wavelets, implicit decomposition relations.*

---

### 1. Введение

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1, 2]. За счет сжатия вейвлеты выявляют с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а путем сдвига способны проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. При анализе нестационарных сигналов свойство локальности вейвлетов обеспечивает им существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает только глобальные сведения о свойствах исследуемого сигнала, поскольку используемые при этом базисные функции (синусы и косинусы) имеют бесконечный носитель. При решении задач численного анализа, поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными параметрами, такой базис оказывается более эффективным с точки зрения обусловленности и сходимости.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Томской области (проект № 16-41-700400 p\_a).

Основой для построения вейвлетов является наличие набора аппроксимирующих пространств  $\cdots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \cdots$  таких, что каждая базисная функция в  $V_{L-1}$  может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в  $V_L$ . В частности, таким свойством обладают сплайны — гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени  $m$ , на вложенной последовательности сеток. Классические полуортогональные вейвлеты [1] определяются как элементы пространства  $V_L$ , ортогональные пространству  $V_{L-1}$ . Характерным свойством полуортогональных вейвлетов, которое иногда [3] полагается в основу численного метода построения вейвлет-преобразования, является то, что вейвлет-разложение обеспечивает построение наилучшего среднеекватрического приближения сплайнов на густой сетке посредством сплайнов на прореженной сетке. Это дает преимущество при решении задачи сжатия дискретной числовой информации. Однако данное преимущество нивелируется при дифференцировании полученных сплайн-вейвлетных разложений. Некоторое продвижение в решении этой проблемы было сделано на пути построения сплайн-вейвлетов, у которых равно нулю повышенное количество моментов [4–8], однако при условии увеличения носителей вейвлетов. На наш взгляд, оптимальным соотношением между точностью вычисления производных и длиной носителя обладают изучаемые в данной статье сплайн-вейвлеты третьей степени  $m = 3$ , полуортогональные с производными второго порядка. Их отличительным свойством является то, что по построению они наследуют свойство наилучшего среднеекватрического приближения производных второго порядка [9, с. 175] интерполяционных сплайнов и, соответственно, обеспечивают наилучшее среднеекватрическое приближение вторых производных сплайнов на густой сетке посредством вторых производных сплайнов на прореженной сетке. Например, в случае сплайнов первой степени на отрезке  $[a, b]$  с равномерной сеткой узлов  $\Delta^L : x_i = a + hi, i = 0, 1, \dots, 2^L, h = (b - a)/2^L$ , и базисными функциями  $N_i^L(x) = \varphi_1(v - i) \forall i$ , где  $v = (x - a)/h$ , с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами функции

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 + t, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1 - t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

использование вейвлета с уменьшенным, по сравнению с классическим вейвлетом первой степени, носителем  $[0, 2] \subset [0, 3]$  [10]:

$$w_1(t) = \varphi_1(2t - 1) - \varphi_1(2t - 3)$$

приводит к полуортогональности относительно метрики с первыми производными, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1'(x - l) \varphi_1'(x - k) dx = 0 \quad \forall l, k.$$

Хотя в обычном смысле данные вейвлеты и ортогональны только константам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x - l) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x - l)x dx \neq 0 \quad \forall l,$$

что отнюдь не обеспечивает близости к среднеекватрическому приближению дискретно заданных функций, тем не менее, для задачи аппроксимации первой производной получаются вполне приемлемые результаты (см. далее рис. 1).

В случае кубических сплайнов в [11, 12] были найдены вейвлеты третьей степени  $\psi(x - i) \forall i$ , для которых удовлетворяются условия ортогональности соответствующим

базисным сплайнам  $\varphi(x-j) \forall j$  относительно скалярного произведения со вторыми производными

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi''(x-i)\varphi''(x-j) dx = 0 \forall i, j.$$

При этом оказывается, что эти вейвлеты имеют очень простую конструкцию, в частности, носитель меньше носителей классических полуортогональных сплайн-вейвлетов третьей степени, а именно,  $[0, 3] \subset [0, 7]$ . Вдобавок, они заслужили общее признание при решении дифференциальных уравнений [13] и были численно реализованы в качестве стандартной программы [14] в системе MatLab. Аналогичное решение [15] было найдено для случая кубических эрмитовых сплайн-вейвлетов, полуортогональных относительно скалярного произведения с первыми производными. Более того, в [16] автором настоящей публикации был предложен оригинальный метод четно-нечетного расщепления системы уравнений вейвлет-преобразования [15] на параллельное решение двух трехдиагональных систем линейных уравнений вдвое меньшего порядка со строгим диагональным преобладанием. К недостаткам вейвлет-преобразований, основанных на эрмитовых сплайнах, относится то, что в задаче обработки измерительной информации приходится сначала вычислять приближенные значения производных в узлах самой густой сетки с подходящей точностью [17] и только затем применять алгоритмы вейвлет-преобразований. С точки зрения сжатия данных количество вейвлет-коэффициентов при этом по сравнению с методами, основанными на  $B$ -сплайнах, кратно увеличивается. Поэтому далее в п. 2.2 впервые рассматривается применение идеи четно-нечетного расщепления к случаю вейвлет-преобразования обычных кубических сплайнов.

Отметим, что в [18] для других вейвлетов прием четно-нечетного расщепления матрицы вейвлет-преобразования использовался при доказательстве ее обратимости, однако без явного указания возможности практического применения для вычислений.

## 2. Построение сплайн-вейвлетов 3-й степени, полуортогональных с производными второго порядка

Пусть пространство  $V_L$  является пространством кубических сплайнов гладкости  $C^2$  на сетке узлов  $\Delta^L$ , и базисные функции  $N_i^L(x) = \varphi_3(v-i) \forall i$  порождены сжатиями и сдвигами функции вида [19, с. 23]:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-1)^j (t-j)_+^3,$$

где  $t_+^n = (\max\{t, 0\})^n$ . Тогда эти функции удовлетворяют калибровочному соотношению [1, с. 154]:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \varphi_3(2t-k). \quad (1)$$

Для того, чтобы облегчить построение вейвлетов вблизи краев конечного отрезка, будем накладывать на функции дополнительное условие:  $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ . Соответствующая левая краевая базисная функция имеет вид [11, 12]:

$$\varphi_b(t) = \frac{3}{2}t_+^2 - \frac{11}{12}t_+^3 + \frac{3}{2}(t-1)_+^3 - \frac{3}{4}(t-2)_+^3,$$

и удовлетворяется следующее калибровочное соотношение:

$$\varphi_b(t) = \frac{1}{4}\varphi_b(2t) + \frac{11}{16}\varphi_3(2t) + \frac{1}{2}\varphi_3(2t-1) + \frac{1}{8}\varphi_3(2t-2). \quad (2)$$

На любой сетке  $\Delta^L$ ,  $L \geq 2$ , сплайн 3-й степени с нулевыми краевыми условиями может быть представлен как

$$S^L(x) = C_{-1}\varphi_b(v) + \sum_{i=0}^{2^L-4} C_i\varphi_3(v-i) + C_{2^L-3}\varphi_b(2^L-v), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

где коэффициенты  $C_i \forall i$  являются решением, например, интерполяционной задачи:

$$S^L(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2^L - 1.$$

Если сетка  $\Delta^{L-1}$ ,  $L \geq 1$ , получена из  $\Delta^L$  посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство  $V_{L-1}$  с базисными функциями  $N_i^{L-1}(x)$ , у которых носители в два раза больше по ширине и центры в четных узлах сетки  $\Delta^L$ , вложено в  $V_L$ . Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений  $V_{L-1}$  и локальных уточняющих подробностей  $W_{L-1} = V_L - V_{L-1}$ . Кубические вейвлеты, полуортогональные с производными второго порядка, с уменьшенными носителями имеют вид [11, 12]:

$$\begin{aligned} w_3(t) &= -\frac{3}{7}\varphi_3(2t) + \frac{12}{7}\varphi_3(2t-1) - \frac{3}{7}\varphi_3(2t-2), \\ w_b(t) &= \frac{24}{13}\varphi_b(2t) - \frac{6}{13}\varphi_3(2t). \end{aligned} \quad (4)$$

Они удовлетворяют условиям полуортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^{2^L} w_3''(x-l)\varphi_3''(x-k) dx &= \int_0^2 w_b''(x)\varphi_3''(x-k) dx = 0, \quad l, k = 0, 1, \dots, 2^L - 2, \\ \int_0^3 w_3''(x-l)\varphi_b''(x) dx &= \int_0^2 w_b''(x)\varphi_b''(x) dx = 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2^L - 2, \end{aligned}$$

и при этом выполняется условие дополнения размерностей полученных пространств  $\text{Dim}(V_L) = \text{Dim}(V_{L-1}) + \text{Dim}(W_{L-1})$ . Данные вейвлеты могут быть использованы при решении уравнений, содержащих вторую производную от искомой функции, методом Галеркина, поскольку аппроксимируют вторую производную со вторым порядком погрешности

$$\int_0^3 w_3''(x)x^m dx = \int_0^2 w_b''(x)x^m dx = 0, \quad m = 0, 1.$$

## 2.1. Построение определяющей системы уравнений

Для дальнейшего удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки  $\varphi^L(\cdot) = [\varphi_b(\cdot), \varphi_3(\cdot), \varphi_3(\cdot-1), \dots, \varphi_3(\cdot-2^L+4), \varphi_b(2^L-\cdot)]$  и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора  $C^L = [C_{-1}, C_0, \dots, C_{2^L-3}]^T$ . Тогда уравнение (3) переписывается в виде  $S^L(x) = \varphi^L(v)C^L$ , где  $v = (x-a)/h$ . Аналогично запишем базисные вейвлет-функции в виде матрицы-строки как

$$\psi^L(\cdot) = [w_b(\cdot), w_3(\cdot), w_3(\cdot-1), \dots, w_3(\cdot-2^L+3), w_b(2^L-\cdot)].$$

Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения на уровне  $L$  будем собирать в вектор  $D^L = [D_{-1}, D_0, \dots, D_{2^L-2}]^\top$ . Тогда для уровня разложения  $L - 1$  можно записать функции  $\varphi^{L-1}(\cdot)$  и  $\psi^{L-1}(\cdot)$  в виде линейных комбинаций функций  $\varphi^L(\cdot)$ :

$$\varphi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot)P^L \text{ и } \psi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot)Q^L,$$

где блоки матрицы  $P^L$  составлены из коэффициентов соотношений (1) и (2), так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из пяти, а по краям интервала — из четырех узких базисных функций, тогда как элементы столбцов матрицы  $Q^L$  — из коэффициентов соотношений (4).

Следовательно, справедливы равенства

$$\varphi^L(\cdot)C^L = \varphi^{L-1}(\cdot)C^{L-1} + \psi^{L-1}(\cdot)D^{L-1} = \varphi^L(\cdot)P^L C^{L-1} + \varphi^L(\cdot)Q^L D^{L-1}. \quad (5)$$

Таким образом, процесс получения  $C^L$  из  $C^{L-1}$  и  $D^{L-1}$  может быть записан как

$$C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$$

или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L = [P^L \mid Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Следующий пример показывает, как можно получить три базисные сплайн-функции из  $V_2$  и четыре базисных вейвлета из  $W_2$ , используя семь базисных функций из  $V_3$ :

$$[P^2 \mid Q^2] = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{24}{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{16} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{6}{13} & -\frac{3}{7} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{12}{7} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{13} \end{array} \right].$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов  $C^L$  на более грубую версию  $C^{L-1}$  и уточняющие коэффициенты  $D^{L-1}$  состоит в решении системы линейных уравнений (6). Разрешимость полученной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций. Для облегчения численного решения системы линейных уравнений (6), следуя [2], матрицу  $[P^L \mid Q^L]$  можно сделать пятидиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц  $P^L$  и  $Q^L$  перемежались. Однако, как видно из приведенного выше примера, полученная система уравнений не имеет диагонального преобладания, что может затруднить вейвлет-анализ данных большого размера.





**Доказательство.** Доказательство выполняется непосредственной проверкой схемы расщепления (7), (8). Например, умножим вторую строку матрицы  $[P^L | Q^L]$  на первые три столбца матрицы  $R^L$ , составленной из построенных выше матриц:

$$\frac{11}{16} \cdot 2 - \frac{6}{13} \cdot \frac{117}{4 \cdot 12} - \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{12} = 0, \quad \frac{6}{13} \cdot \frac{26}{12} = 1, \quad \frac{11}{16} \cdot 2 - \frac{6}{13} \cdot \frac{13}{4 \cdot 12} - \frac{3}{7} \cdot \frac{42}{12} = 0.$$

Полученные равенства означают, что в ходе преобразования  $G^L C^L := C^L$  с матрицей  $G^L$ , полученной по формуле (7), коэффициент сплайна  $C_0$  не изменяется. Такие же манипуляции с первой строкой матрицы  $[P^L | Q^L]$  приводят к значениям:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{24}{13} \cdot \frac{117}{4 \cdot 12} = 5, \quad -\frac{24}{13} \cdot \frac{26}{12} = -4, \quad \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{24}{13} \cdot \frac{13}{4 \cdot 12} = 1.$$

Переносим неизменяемое значение  $C_0$  в правую часть полученного уравнения, получаем первое уравнение системы (9) относительно изменяемых нечетных коэффициентов сплайна на густой сетке. Аналогичные вычисления с четвертой строкой матрицы  $[P^L | Q^L]$  приводят к обоснованию того, что коэффициент сплайна  $C_2$  в ходе модификации с матрицей  $G^L$  также остается неизменным. Такие же манипуляции с третьей строкой матрицы  $[P^L | Q^L]$  приводят к значениям:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{12} = 2, \quad 0, \quad \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{12}{7} \cdot \frac{42}{12} = 8, \quad \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{12} = 2, \quad \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{12} = 2.$$

Переносим неизменяемое значение  $C_2$  в правую часть полученного уравнения, получаем второе уравнение системы (9) относительно изменяемых нечетных коэффициентов сплайна на густой сетке и т. д. Таким образом, действительно, условия теоремы могут быть записаны в матричном виде как (8). А, значит, они дают решение системы уравнений (6).  $\square$

Количество арифметических операций, требуемых для решения системы (9) методом прогонки, составляет  $3 \cdot (2^{L-1} - 1)$  сложений,  $3 \cdot (2^{L-1} - 1)$  умножений,  $2 \cdot (2^{L-1} - 1) + 1$  делений [19, с. 337]. На вычисление правых частей уравнений затрачивается  $2 \cdot (2^{L-1} - 2)$  “коротких” сдвиговых умножений и  $2 \cdot (2^{L-1} - 2)$  сложений, и на получение сплайн-коэффициентов в узлах прореженной сетки —  $2 \cdot (2^{L-1} - 1)$  сложений. Затратную часть алгоритма составляет вычисление вейвлет-коэффициентов:  $5 \cdot (2^{L-1} - 4) + 14$  умножений и  $4 \cdot (2^{L-1} - 4) + 10$  сложений. Если не делать различия между арифметическими операциями, то общее их число для одного шага вейвлет-разложения равно  $23 \cdot 2^{L-1} - 29$ . Учитывая, что на последнем шаге децимации (укрупнения сетки) имеем  $L = 3$ , всего получаем для вычисления полного набора вейвлет-коэффициентов  $23 \cdot 2^L - 29L - 34$  арифметических операций. По сравнению с известным ранее быстрым алгоритмом [11–13] дискретного вейвлет-преобразования, основанном на решении последовательности интерполяционных задач, данный алгоритм позволяет получить коэффициенты вейвлет-разложения иным способом за сравнимое количество операций. Преимущество нового алгоритма заключается в его устойчивости и возможности распараллеливания, поскольку на каждом шаге решается одна система линейных уравнений (вместо двух в известном алгоритме) с матрицей, имеющей строгое диагональное преобладание.



### 3. Примеры

Рассмотрим в качестве тестовой функции функцию Хартена [17], заданную на отрезке  $[0, 1]$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Это кусочно-гладкая функция, равная нулю в точках  $x = 0$  и  $1$ . Она имеет разрывы первого рода в точках  $x = 1/3$  и  $2/3$  и излом (разрыв первой производной) в точке  $x = 1/2$ . Ее первая и вторая производные — также кусочно-гладкие функции. Задача состоит в попытке вычисления второй производной функции Хартена, используя изученные в работе сплайн-вейвлеты третьей степени, полуортогональные с производными второго порядка.

#### 3.1. Пример сплайн-вейвлетов первой степени, полуортогональных с производными первого порядка

Положим:

$$\begin{aligned} \psi_1^L(x) &= \frac{1}{2} 2^{-L/2} w_1(2^L x + 1), \\ \psi_i^L(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4} 2^{-L/2} w_1(2^L x + 2 - i), \quad i = 2, 3, \dots, 2^L. \end{aligned}$$

Тогда  $\psi_i^L(x)$  нормированы так, что  $\left\| \frac{d}{dx} \psi_i^L(x) \right\|_{L_2(0,1)} = 1$  для  $i = 1, 2, \dots, 2^L$ . Из соображения дополнительности размерностей будем удалять из пространств сплайнов и вейвлетов базисные функции в последнем узле. В данном случае этому способствует свойство обнуления аппроксимируемой функции на правом конце интервала. Иная ситуация обсуждалась в [21].

Начиная с верхнего уровня разрешения  $L = 5$ , т. е. при числе разбиений  $2^L = 32$ , на интервале  $0 \leq x \leq 1$  с длиной шага  $h = 2^{-L} = 0.031$ , находим коэффициенты нормированного вейвлет-базиса при

$$L = 5 : D^4 = [-8.373, -11.77, -11.58, -11.34, -11.13, -11.01, -6.767, -5.971, -5.642, -5.312, -4.516, 0.8311, 0.7162, 0.5014, 0.259, 0.07071]^\top;$$

$$L = 4 : D^3 = [3.314, 5.061, 5.722, 1.088, 2.745, 4.402, 1.036, 0.3745]^\top;$$

$$L = 3 : D^2 = [-8, -9.701, -5.044, 1.613]^\top;$$

$$L = 2 : D^1 = [3.14 \cdot 10^{-16}, 1.414]^\top;$$

$L = 1$ : на последнем, самом грубом уровне, остается один вейвлет-коэффициент  $D^0 = -4.898 \cdot 10^{-16}$  и один коэффициент сплайн-разложения  $C^0 = 0$  на левом конце интервала.

На рис. 1 кружочками представлены результаты реконструкции первой производной сплайна 1-й степени  $(S^5)'(x_i + h/2) = (C_{i+1}^5 - C_i^5)/h$  при условии обнуления 10 вейвлет-коэффициентов, по модулю меньших 1.414. Здесь сплошной линией обозначается первая производная исходной функции. При этом достигается коэффициент сжатия  $K = 32/22 \approx 1.455$ . Не показанная на рисунке конечно-разностная аппроксимация

первой производной совпадает на участках гладкости с линией, мало отличаясь от кружочков в точках разрыва функции.

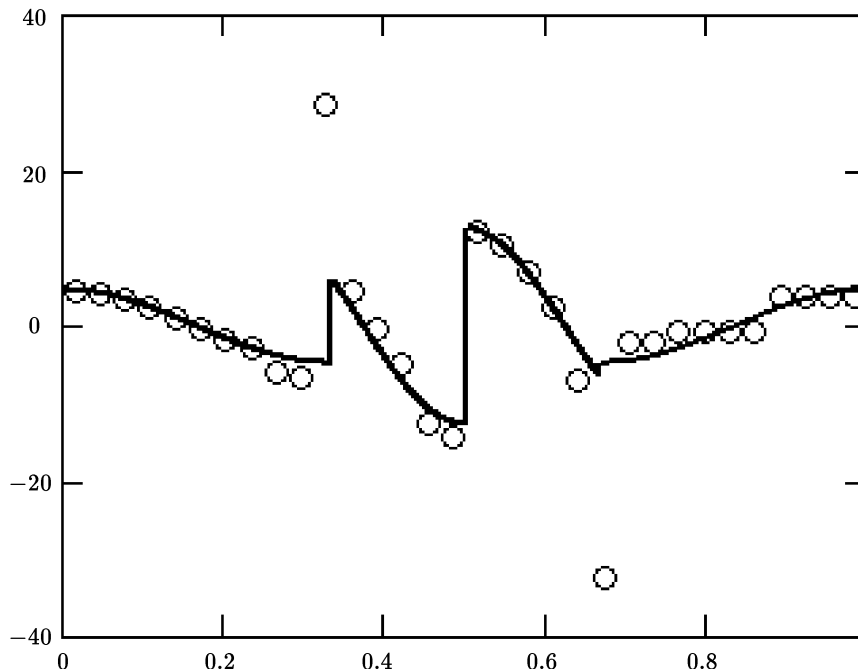


Рис. 1. График вейвлет-реконструкции первой производной сплайна 1-й степени

### 3.2. Пример сплайн-вейвлетов третьей степени, полуортогональных с производными второго порядка

Для случая кубических сплайнов нормированные вейвлеты имеют вид:

$$\psi_1^L(x) = 0.083 \cdot 8^{-L/2} w_b(2^L x), \quad \psi_{2^L}^L(x) = 0.083 \cdot 8^{-L/2} w_b(1 - 2^L x),$$

$$\psi_i^L(x) = 0.097 \cdot 8^{-L/2} w_3(2^L x + 1 - i), \quad i = 2, 3, \dots, 2^L - 1,$$

где  $\left\| \frac{d^2}{dx^2} \psi_i^L(x) \right\|_{L_2(0,1)} = 1$  для  $i = 1, 2, \dots, 2^L$ .

Поскольку первая производная функции Хартена в точках  $x = 0$  и  $1$  не равна нулю, вычтем значения кубического интерполяционного многочлена  $f'(0)x(1-x)^2 - f'(1)(1-x)x^2$  с последующим добавлением данного многочлена к результатам вейвлет-синтеза. Кроме того, будем использовать вместо исходных коэффициентов разложения по базису  $B$ -сплайнов, мало отличающиеся от них значения функции. В мировой литературе этот прием весьма популярен и называется “Wavelet Crime” [22, 23].

Начиная с верхнего уровня разрешения  $L = 5$  находим коэффициенты нормированного вейвлет-базиса при

$$L = 5 : D^4 = [0.8956, -0.4546, 1.546, -5.021, 19.17, 115.5, -37.04, 36.8, 38.49, -42.12, 134.1, 9.012, -2.529, 0.4743, -0.07706, -0.7798]^\top;$$

$$L = 4 : D^3 = [-50, 248.7, -1151, 387, 234.4, -915.1, 201.3, -54.04]^\top;$$

$L = 3$ : на самом грубом уровне разложения остается четыре вейвлет-коэффициента  $D^2 = [1849, 6881, 1.009 \cdot 10^4, -184.5]^\top$  и три сплайн-коэффициента  $C^2 = [-239.1, 242.9, 100.3]^\top$ .

На рис. 2 представлены результаты реконструкции второй производной сплайна 3-й степени  $(S^5)''(x_i) = (C_{i+1}^5 - 2C_i^5 + C_{i-1}^5)/h^2$  при условии обнуления 19 вейвлет-коэффициентов, по модулю меньших 185. При этом достигается коэффициент сжатия  $K = 31/12 \approx 2.583$ . Кружочками отчетливо показано альтернансное поведение второй производной сплайна, на участках гладкости функции похожее на поведение ломаной наилучшего среднеквадратического приближения второй производной (сплошная линия) с изломами в оставшихся после реконструкции узлах сплайна. Не показанная на рисунке конечно-разностная аппроксимация второй производной мало отличается от линии, демонстрируя выбросы до  $\pm 10^3$  в точках разрыва функции и ее первой производной.

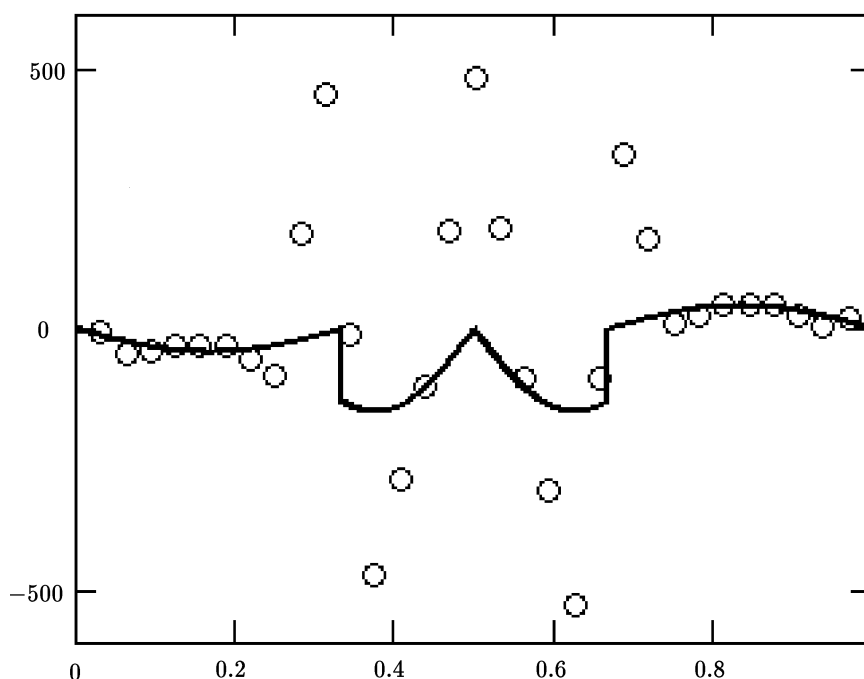


Рис. 2. График вейвлет-реконструкции второй производной сплайна 3-й степени

## 4. Заключение

В статье рассмотрено первое применение предложенного автором для случая эрмитовых вейвлетов четно-нечетного расщепления определяющих систем вейвлет-разложений для практически важного случая приближения функций, не требующего задания значений производных, на основе  $B$ -сплайнов третьей степени. Приведены примеры и расчеты, демонстрирующие среднеквадратическое приближение второй производной заданной функции с помощью второй производной сплайна на прореженной сетке. Преимущество в сравнении с другими методами вычисления производных состоит в возможности адаптивного выбора узлов аппроксимационного сплайна по коэффициентам его вейвлет-разложения. Распространение предложенного метода на сплайны более высокой степени

и гладкости может предоставить новые возможности для создания устойчивых алгоритмов построения и использования сплайн-вейвлетов.

*Благодарности.* Автор благодарит рецензентов за внимательное и доброе отношение к его статье.

## Литература

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. — М.: Мир, 2001.
2. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
3. **Lyuhe T., Mórken K., and Quak E.** Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets // *Multivariate Approximation and Applications / N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, and A. Pinkus.* — Cambridge: Cambridge University Press. — 2001. — P. 152–187.
4. **Cohen A., Daubechies I., and Feauveau J.C.** Biorthogonal bases of compactly supported wavelets // *Comm. Pure and Appl. Math.* — 1992. — Vol. 45. — P. 485–560.
5. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 2001. — Vol. 25. — P. 149–164.
6. **Bittner K.** A new view on biorthogonal spline wavelets. — Ulm, 2005. — (Preprint / Universität Ulm; Series: 2005-03).
7. **Černá D., Finěk V.** Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval // *Adv. Comput. Math.* — 2011. — Vol. 34. — P. 219–252.
8. **Černá D., Finěk V.** Cubic spline wavelets with complementary boundary conditions // *Appl. Math. and Comput.* — 2012. — Vol. 219. — P. 1853–1865.
9. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985.
10. **Cohen A., Daubechies I.** A new technique to estimate the regularity of refinable functions // *Rev. Math. Iberoamericana.* — 1996. — Vol. 12, iss. 2. — P. 527–591.
11. **Wang J.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation // *Appl. and Computational Harmonic Analysis.* — 1996. — Vol. 3, iss. 2. — P. 154–163.
12. **Cai W., Wang J.** Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDEs // *SIAM J. on Numerical Analysis.* — 1996. — Vol. 33, iss. 3. — P. 937–970.
13. **Kumar V., Mehra M.** Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems. // *Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.* — 2007. — Vol. 5. — iss. 2. — P. 317–331.
14. **Mehra M., Goyal K.** Algorithm 929: A suite on wavelet differentiation algorithms // *ACM Transactions on Mathematical Software.* — 2013. — Vol. 39, iss. 4. — (Article number 27).
15. **Jia R.Q., Liu S.T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // *Adv. Comput. Math.* — 2006. — Vol. 25. — P. 23–39.
16. **Шумилов Б.М.** Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // *Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика.* — 2010. — № 4. — С. 45–55.
17. **Arandiga F., Baeza A., and Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2004. — Vol. 9. — P. 263–273.
18. **Černá D., Finěk V.** Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems // *Appl. Math. and Comput.* — 2014. — Vol. 243. — P. 44–56.

19. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
20. **Шумилов Б.М.** Кубические мультвейвлеты, ортогональные многочленам, и алгоритм с расщеплением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 283–297.
21. **Шумилов Б.М.** Алгоритмы с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 7. — С. 39–50.
22. **Bultheel A., Huybrechs D.** Wavelets with Applications in Signal and Image Processing. — 2011. — <http://people.cs.kuleuven.be/adhemar.bultheel/WWW/WAVE/wavelets2011.pdf>. — (Ch. 6, p. 6.5: The wavelet crime).
23. **Strang G., Nguyen T.** Wavelets and Filter Banks. — Cambridge: Wellesley-Cambridge Press, 1996.

*Поступила в редакцию 27 апреля 2016 г.,  
в окончательном варианте 20 августа 2016 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Chui Ch.** Vvedenie v veyvlety: Per. s angl. — М.: Mir, 2001.
2. **Stolnits E., DeRouz T., Salezin D.** Veyvlety v komp'yuternoy grafike: Per. s angl. — Izhevsk: NITS “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2002.
3. **Lychе T., Mørken K., and Quak E.** Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets // Multivariate Approximation and Applications / N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, and A. Pinkus. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2001. — P. 152–187.
4. **Cohen A., Daubechies I., and Feauveau J.C.** Biorthogonal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure and Appl. Math. — 1992. — Vol. 45. — P. 485–560.
5. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2001. — Vol. 25. — P. 149–164.
6. **Bittner K.** A new view on biorthogonal spline wavelets. — Ulm, 2005. — (Preprint / Universität Ulm; Series: 2005-03).
7. **Černá D., Finěk V.** Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval // Adv. Comput. Math. — 2011. — Vol. 34. — P. 219–252.
8. **Černá D., Finěk V.** Cubic spline wavelets with complementary boundary conditions // Appl. Math. and Comput. — 2012. — Vol. 219. — P. 1853–1865.
9. **De Bor K.** Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam. — М.: Radio i svyaz', 1985.
10. **Cohen A., Daubechies I.** A new technique to estimate the regularity of refinable functions // Rev. Math. Iberoamericana. — 1996. — Vol. 12, iss. 2. — P. 527–591.
11. **Wang J.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation // Appl. and Computational Harmonic Analysis. — 1996. — Vol. 3, iss. 2. — P. 154–163.
12. **Cai W., Wang J.** Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDEs // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1996. — Vol. 33, iss. 3. — P. 937–970.
13. **Kumar V., Mehra M.** Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems. // Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. — 2007. — Vol. 5. — iss. 2. — P. 317–331.

14. **Mehra M., Goyal K.** Algorithm 929: A suite on wavelet differentiation algorithms // *ACM Transactions on Mathematical Software*. — 2013. — Vol. 39, iss. 4. — (Article number 27).
15. **Jia R.Q., Liu S.T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // *Adv. Comput. Math.* — 2006. — Vol. 25. — P. 23–39.
16. **Shumilov B.M.** Algoritm s rasshchepleniem veyvlet-preobrazovaniya ermitovykh kubicheskikh splaynov // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika.* — 2010. — № 4. — S. 45–55.
17. **Arandiga F., Baeza A., and Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2004. — Vol. 9. — P. 263–273.
18. **Černá D., Finěk V.** Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems // *Appl. Math. and Comput.* — 2014. — Vol. 243. — P. 44–56.
19. **Zav'yalov YU.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** *Metody splayn-funktsiy.* — M.: Nauka, 1980.
20. **Shumilov B.M.** Kubicheskie mul'tiveyvlety, ortogonal'nye mnogochlenam, i algoritm s rasshchepleniem // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.* — Novosibirsk, 2013. — T. 16, № 3. — S. 283–297.
21. **Shumilov B.M.** Algoritmy s rasshchepleniem veyvlet-preobrazovaniya splaynov pervoy stepeni na neravnomernykh setkakh // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2016. — T. 56, № 7. — S. 39–50.
22. **Bultheel A., Huybrechs D.** *Wavelets with Applications in Signal and Image Processing.* — 2011. — <http://people.cs.kuleuven.be/adhemar.bultheel/WWW/WAVE/wavelets2011.pdf>. — (Ch. 6, p. 6.5: The wavelet crime).
23. **Strang G., Nguyen T.** *Wavelets and Filter Banks.* — Cambridge: Wellesley-Cambridge Press, 1996.