

УДК 532.517.43

Движение вихрей в двумерной ограниченной области

П.И. Гешев^{1,2}, А.И. Черных^{1,3}

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

³Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск

E-mail: geshev@itp.nsc.ru

Методами теории функций комплексной переменной получены гамильтоновы уравнения движения системы N точечных идеальных вихрей в односвязной двумерной области. Показано, что движение двух вихрей в круге интегрируется точно; определены периоды этого движения. Методом секущих плоскостей в фазовом пространстве исследовано движение двух вихрей в области, ограниченной лемнискатой. Здесь обнаружены стохастические траектории, имеющие сплошные спектры мощности. Предполагаемая причина стохастичности — блуждание фазовой точки по гомоклинической структуре.

Ключевые слова: идеальная жидкость, точечный вихрь, гамильтониан, точное интегрирование, стохастические траектории.

Введение

Двумерные идеальные вихри встречаются в разных областях физики: кроме гидродинамики идеальной жидкости [1, 2] можно привести в пример теорию сверхтекучести [3] и теорию замагниченной плазмы [4]. Реальное движение сплошной среды всегда сопровождается диссипацией энергии. Однако существуют ситуации, когда диссипацией можно пренебречь. Это справедливо для любой системы вихрей, рассматриваемой на достаточно коротких интервалах времени. Для квантованной же системы вихрей в жидком сверхтекучем гелии при температурах, близких к абсолютному нулю, диссипация становится исчезающе малой [3]. Следовательно, эти случаи должны хорошо описывать динамическая теория, основанная на уравнениях движения идеальной жидкости.

Сплошная среда имеет бесконечное число степеней свободы. Число интегралов сохранения для идеальной жидкости тоже бесконечно, так как кроме законов сохранения энергии, импульса и момента импульса в идеальной жидкости сохраняется, согласно теореме Кельвина, циркуляция скорости по любому жидкому контуру. Таких контуров существует бесконечно много, и формально бесконечное множество законов сохранения порождает надежду на точную интегрируемость движения идеальной жидкости.

Вопрос об интегрируемости уравнений движения идеальных вихрей был поднят в работах [5–7]. Было показано, что задача о трех вихрях в неограниченном пространстве интегрируется точно [5]. В системе из четырех вихрей при определенных начальных

условиях проявляется стохастичность [6]. Наличие непроницаемых для жидкости границ усложняет движение, и стохастичность в этом случае может проявиться уже для двух вихрей, как отмечалось в [7].

Гамильтоновы уравнения движения и интегралы сохранения для системы вихрей в неограниченном пространстве были получены в работе [8]. Ранее была предложена [9] теория, описывающая движение одного вихря в односвязной области. Автор работы [10], используя понятие обобщенной функции Грина, разработал общую теорию движения N вихрей в многосвязной области.

Работы [5–7], опубликованные в восьмидесятых годах прошлого столетия, привлекли внимание к вихревым системам. Вопросы точного интегрирования уравнений движения жидкости и проявления стохастичности в диссипативных системах (странные аттракторы) и в гамильтоновых моделях (КАМ-теория) активно разрабатывались и обсуждались в то время. Представляемые в настоящей работе результаты были опубликованы в виде препринта [11], малодоступного широкому кругу читателей.

Следует отметить первую работу, где было рассмотрено движение вихревой пары в круге. Это труднодоступная статья Гринхила 1878 года [12]. Подробные расчеты различных траекторий для вихревой пары в круге были приведены также в работе [13], где отмечалась полная интегрируемость и двоякопериодичность этого движения.

За прошедшее время появилось много работ по вопросам точного интегрирования. Предлагаем заинтересованному читателю обратиться к обзору [14], книгам [15, 16] и к тринадцатой главе из сборника трудов [15], где были весьма полно изложены последние работы по вихревым системам и подробно обсуждались случаи движения вихрей внутри и вне круга. В работах [12–17] при точном интегрировании использовались другие переменные и были рассчитаны случаи неравных интенсивностей вихрей, но общее заключение о том, что движение двух вихрей в круге имеет два периода, совпадает с заключением авторов, приведенном в работе [11]. Здесь дополнительно указан еще и физический смысл этих двух периодов движения: один период связан с угловой скоростью вращения всей системы вихрей, а другой — с относительным движением вихрей по замкнутым траекториям во вращающейся системе координат. Позднее вышли статьи, посвященные движению трех вихрей в круговой области [17], переходу к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости [18], динамике двух точечных вихрей в кольцевой области [19]. Отметим, что движение двух вихрей в кольцевой области было ранее рассмотрено на основе эллиптических θ -функций Якоби и опубликовано в малодоступной статье [20]. Похожий случай точно интегрируемого движения двух вихрей между параллельными стенками рассматривался в работе [21]. Хотелось бы отметить еще применение модели дискретных вихрей и метода конформных отображений к описанию отрывных течений [22]. Было также проведено моделирование двумерной турбулентности в плоском канале методом Кристиансена (вихри в ячейках) [23] и в круглой трубе методом изображений [24]. В указанных работах были выполнены расчеты турбулентного переноса в системе из большого числа вихрей: от ста [24] до тысячи вихрей [23] с нулевой суммарной циркуляцией. Цель этих исследований заключалась в моделировании турбулентного переноса в квазитрехмерной турбулентности и обнаружении логарифмических участков в профилях осредненной продольной скорости (и температуры) в пристенной зоне.

В настоящей работе выводятся общие гамильтоновы уравнения движения вихрей в замкнутой области и затем исследуется движение двух вихрей в круге и в деформированной области, ограниченной лемнискоидом. В случае, когда область вихревого движения ограничена непроницаемыми некруговыми стенками, трансляционные симметрии и связанные с ними интегралы движения разрушаются, и стохастичность может возникнуть уже в системе из двух вихрей. Показано, что движение двух вихрей в круге точно интегрируемое с двумя характерными периодами, а при деформации круговой области,

когда разрушается интеграл, связанный с моментом импульса жидкости, возникает стохастичность вихревых траекторий и спектры мощности координат вихрей становятся заполненными.

Уравнения движения и интегралы сохранения

Интересующий нас случай движения N вихрей в односвязной области можно исследовать методом конформных отображений. Пусть движение системы N вихрей происходит в односвязной области D с известной границей Γ . Вся гидродинамическая информация содержится в функции тока $\psi(x, y)$, являющейся по сути третьей компонентой векторного потенциала $\vec{A} = (0, 0, \psi)$ поля скорости $\vec{u} = \text{rot } \vec{A}$. С введением ψ -функции уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, а сама она определяется из уравнения

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (1)$$

где ω — завихренность поля скорости ($\omega = \text{rot } \vec{u}$). Для дискретных идеальных вихрей вся завихренность предполагается сосредоточенной в отдельных точках

$$\omega = \sum_{n=1}^N \gamma_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad (2)$$

где γ_n — циркуляция вокруг n -го вихря, $\delta(\vec{x} - \vec{x}_n)$ — дельта-функция, $\vec{x}_n(t)$ — мгновенное положение n -го вихря.

Решение уравнения (1) с правой частью (2) и граничным условием непротекания на границе Γ

$$\psi(\vec{x} \in \Gamma) = 0 \quad (3)$$

легко получить, если известна аналитическая функция $w(z)$, конформно отображающая область D плоскости $z = x + iy$ на каноническую область $|w| \leq 1$ — круг в плоскости w . Функция Грина задачи (1)–(3) определяется формулой [25, 26]

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{1 - w(z) \overline{w(z_0)}} \right|, \quad (4)$$

а полное решение имеет вид [25]

$$\psi(\vec{x}) = -\sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z_n)}{1 - w(z) \overline{w(z_n)}} \right|, \quad (5)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Функция тока и ее производные, определяющие скорость жидкости, устремляются в бесконечность при приближении к некоторому k -му точечному вихрю. Поэтому для нахождения скорости k -го вихря необходимо вычесть из (5) член $(\gamma_k / 2\pi) \ln |z - z_k|$ и затем, согласно определению скорости, взять производные от получившейся разности в точке $z = z_k$. Эта процедура использовалась Киргофом и Раусом и означает, что скорость в k -й вихрь приносят все остальные вихри и изображения вихрей (или граница Γ), но сам он прямого вклада в собственную скорость не дает. Комплексная скорость k -го вихря $\dot{q}_k = \dot{x}_k - i \dot{y}_k = d\bar{z}_k / dt$ будет определяться уравнением

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{\gamma_k}{4\pi i} \cdot \frac{w_k''}{w_k'} - \frac{\gamma_k}{2\pi i} \cdot \frac{w_k'}{(w_k - \bar{w}_k^{-1})} + w_k' \sum_{n \neq k}^N \frac{\gamma_n}{2\pi i} \left[\frac{1}{w_k - w_n} - \frac{1}{w_k - \bar{w}_n^{-1}} \right], \quad (6)$$

где $w_k = w(z_k)$, $w'_k = dw(z_k)/dz_k$, $w''_k = d^2w(z_k)/dz_k^2$. В правой части уравнения (6) все слагаемые, кроме первого, можно идентифицировать как соответствующие вклады в полную скорость от вихрей или их изображений, помещенных в инвертированные точки $w_k^* = 1/\bar{w}_k$ вспомогательной w -плоскости. Первый член такой простой интерпретации не имеет; его присутствие вызвано отклонением формы области D от круговой. Формулы (6) при $k=1, 2, \dots, N$ образуют систему динамических уравнений движения вихрей. Получим гамильтониан системы N идеальных вихрей. Полная кинетическая энергия жидкости определяется интегралом по области D (см. [27]):

$$\int_D \frac{\rho \bar{u}^2}{2} ds = \frac{\rho}{2} \int_D \psi \omega ds, \quad (7)$$

где ρ — плотность жидкости. При выводе (7) использовали тождество $(\bar{u} \cdot \text{rot } \bar{A}) = \text{div}[\bar{u} \times \bar{A}] + (\bar{A} \cdot \text{rot } \bar{u})$ и граничное условие (3), обращающее интеграл по границе Γ в ноль.

Прямая подстановка (2) и (5) в (7) приводит к логарифмической расходимости, так как собственная энергия каждого вихря бесконечна. Вследствие этого необходимо опять провести в (7) под интегралом вычитание расходящихся членов $(\gamma_k^2 / 4\pi) \ln|z - z_k|$. В результате получим конечную часть полной энергии, ответственную за взаимодействие вихрей, то есть гамильтониан взаимодействия

$$H\{z_k, \bar{z}_k\} = -\frac{\rho}{4\pi} \sum_{k=1}^N \left[\gamma_k^2 \ln \left| \frac{w'_k}{1 - w_k \bar{w}_k} \right| + \gamma_k \sum_{n \neq k}^N \gamma_n \ln \left| \frac{w_k - w_n}{1 - w_k \bar{w}_n} \right| \right]. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что систему уравнений (6) можно записать в комплексной гамильтоновой форме

$$\gamma_k \frac{d\bar{z}_k}{dt} = 2i \frac{\partial H\{z_k, \bar{z}_k\}}{\partial z_k}, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

которой эквивалентна следующая запись в действительной форме:

$$\gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H\{x_k, y_k\}}{\partial y_k}, \quad \gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H\{x_k, y_k\}}{\partial x_k}. \quad (10)$$

Таким образом, две координаты вихря являются каноническими сопряженными переменными (например, $q_k = x_k$, $p_k = \gamma_k y_k$). Движение системы происходит так, что сохраняется энергия взаимодействия: $H = \text{const}$. Интересно отметить, что для вихрей имеет смысл только потенциальная энергия H их взаимного расположения (8) и отсутствует понятие кинетической энергии, в то время как из формулы (7) видно, что изначально полная энергия жидкости — это только кинетическая энергия. Уравнения (8)–(10) могут быть использованы для построения статистической механики вихревых систем.

В случае, если «физическая» область движения D есть круг ($w \equiv z$), то в силу инвариантности гамильтониана (8) относительно вращений существует дополнительный интеграл движения — «момент», который нетрудно получить из вариации гамильтониана по углу. При повороте системы координат на угол $\delta\varphi$ координаты вихрей изменяются на $\delta z_k = iz_k \delta\varphi$. Вычисляя при помощи уравнения (9) вариацию гамильтониана и приравнявая ее к нулю, получим

$$\delta H = \sum_{n=1}^N \gamma_n (z_n \dot{\bar{z}}_n + \dot{z}_n \bar{z}_n) \delta\varphi / 2 = 0,$$

откуда видно, что сохраняется величина момента

$$M = \sum_{n=1}^N \gamma_n |z_n|^2. \quad (11)$$

Установим связь этой величины с полным моментом импульса жидкости в круге. Так как никакие моменты сил на жидкость не действуют, величина $\rho \int [\vec{r} \times \vec{u}] ds$ должна сохраняться. Используя векторное тождество $2[\vec{r} \times \vec{u}] = \text{rot}(\vec{r}^2 \vec{u}) - \vec{r}^2 \text{rot} \vec{u}$ и преобразуя интеграл от первого слагаемого по площади в интеграл по границе круга, а второй интеграл вычисляя при помощи уравнения (2), получаем

$$2\rho \int_D [\vec{r} \times \vec{u}] ds = \rho \left(R^2 \sum_{n=1}^N \gamma_n - \sum_{n=1}^N \gamma_n r_n^2 \right), \quad (12)$$

где R — радиус круга, r_n — радиальная координата n -го вихря. Вторая сумма в уравнении (12) совпадает с «моментом» M . Таким образом, постоянство M действительно связано с законом сохранения полного момента импульса жидкости в круговой области. В дальнейшем ρ и R всюду опускаются ($\rho = 1$, $R = 1$) и все переменные предполагаются безразмерными.

Движение двух вихрей в круге

Изучение движения вихрей в ограниченных областях естественно начинать в области в форме круга, как наиболее простой и симметричной. Известно [2], что один вихрь в круге движется по окружности радиуса r со скоростью $u = \gamma r / [2\pi(1-r^2)]$. Для двух вихрей внутри или вне круга известны решения с симметричным расположением вихрей противоположной интенсивности [1]. Фактически это задачи об одном вихре в полукруговой области, поскольку второй вихрь может рассматриваться как симметричное изображение первого.

Движение трех вихрей в круге в общем случае точно не интегрируется [7, 18], так как в шестимерном фазовом пространстве присутствуют лишь две гиперповерхности (интегралы энергии и момента импульса), пересечение которых образует многообразие размерности, равное четырем, по которому и движется изображающая систему точка. Для двух же вихрей результирующее многообразие в фазовом пространстве двумерно и систему уравнений можно полностью проинтегрировать, что показано далее.

Гамильтоновы уравнения (10) в полярных координатах имеют вид

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r_2 \sin \Delta}{2\pi} \left[\frac{1}{1+r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta} - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta} \right], \quad (13)$$

$$r_1 \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi} \left[\frac{r_1 - r_2 \cos \Delta}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta} - \frac{r_1 r_2^2 - r_2 \cos \Delta}{1+r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta} \right] + \frac{\gamma_1 r_1}{2\pi(1-r_1^2)}, \quad (14)$$

где $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ — угол между вихрями, определяемый относительно центра круга. Здесь приведены уравнения лишь для первого вихря, для второго два аналогичных уравнения получаются из (13), (14) взаимной перестановкой индексов и заменой Δ на $-\Delta$.

Гамильтониан системы определяется выражением:

$$H\{r_n, \theta_n\} = \frac{\gamma_1^2}{4\pi} \ln(1-r_1^2) + \frac{\gamma_2^2}{4\pi} \ln(1-r_2^2) - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{4\pi} \ln \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta}{1+r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta}. \quad (15)$$

Введем обозначение $Q(r_1, r_2) = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\gamma_1 \gamma_2}\right) (1-r_1^2)^\nu (1-r_2^2)^{1/\nu}$, где $\nu = \gamma_1 / \gamma_2$, E — энергия взаимодействия вихрей. Тогда уравнение (15) переписывается в виде

$$Q(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta}, \quad (16)$$

откуда найдем

$$\cos \Delta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - (1 + r_1^2 r_2^2) Q}{2r_1 r_2 (1 - Q)}, \quad (17)$$

$$\sin \Delta = \frac{\sqrt{[(1 - r_1 r_2)^2 Q - (r_1 - r_2)^2] [(r_1 + r_2)^2 - (1 + r_1 r_2)^2 Q]}}{2r_1 r_2 (1 - Q)}. \quad (18)$$

После подстановки (17), (18) в исходную систему уравнений получим

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\gamma_2 (1 - Q)}{4\pi r_1 Q} \sqrt{\frac{(f_+^2 - Q)(Q - f_-^2)}{(1 - f_+^2)(1 - f_-^2)}}, \quad (19)$$

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi(1 - r_1^2)} + \frac{\gamma_2 (1 - Q)(Q + f_+ f_-)}{4\pi r_1^2 Q \sqrt{(1 - f_+^2)(1 - f_-^2)}}, \quad (20)$$

где введены функции

$$f_+ = \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2}, \quad f_- = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2}.$$

Переменная r_2 связана с r_1 соотношением

$$r_1^2 \frac{\gamma_1}{M} + r_2^2 \frac{\gamma_2}{M} = 1, \quad (21)$$

вытекающим из формулы (11). Уравнение (21) описывает в координатах (r_1, r_2) эллипс или гиперболу в зависимости от знака циркуляций, то есть от знака величины $\nu = \gamma_1 / \gamma_2$.

Подставляя $r_2(r_1)$ в (19), разделяя переменные и интегрируя по r_1 , можно получить решение $r_1(t)$ в неявном виде. Период относительного движения определяется выражением

$$T = 2 \int_{r_1^*}^{r_1^{**}} \frac{4\pi r_1 Q}{\gamma_2 (1 - Q) \sqrt{\frac{(1 - f_+^2)(1 - f_-^2)}{(f_+^2 - Q)(Q - f_-^2)}}} dr_1, \quad (22)$$

где координаты r_1^* и r_1^{**} определяются из условия обращения в нуль знаменателя подкоренного выражения в (22).

На рис. 1 изображены поверхности функций f_+^2 и f_-^2 . Интегрирование в (22) возможно только в области, где $f_-^2 \leq Q \leq f_+^2$; пределы интегрирования — это точки пересечения с поверхностями f_+^2 и (или) f_-^2 кривой $Q(r_1, r_2(r_1))$. Данная кривая образована пересечением поверхностей $Q(r_1, r_2)$ и $S(r_1, r_2)$, где $S(r_1, r_2)$ описывается уравнением (21) эллиптического ($\nu > 0$) или гиперболического ($\nu < 0$) цилиндра. Форма поверхности $Q(r_1, r_2)$

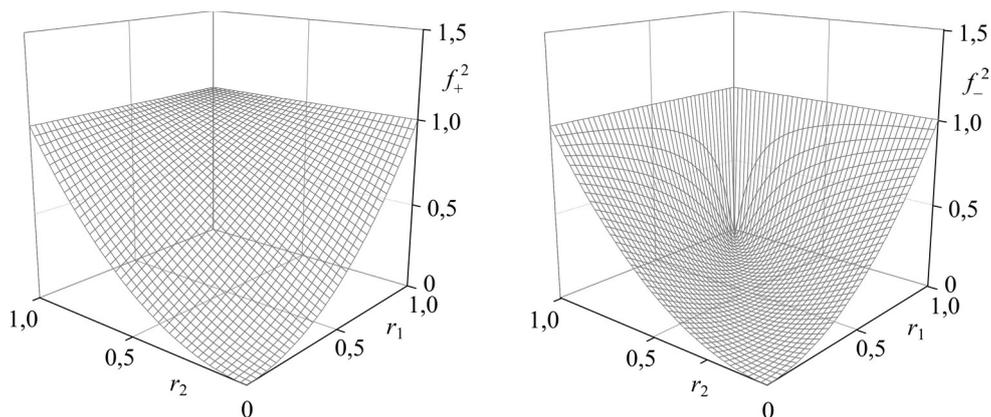


Рис. 1. Поверхности функций f_+^2 и f_-^2 , определяющие пределы интегрирования.

также зависит от знака ν : если r_1 или r_2 устремить к единице, то $Q \rightarrow 0$ при $\nu > 0$ и $Q \rightarrow \infty$ при $\nu < 0$.

Из (16) видно, что в точках, лежащих на поверхности f_-^2 , $\cos \Delta = 1$, $\Delta = 0$ и вихри располагаются на радиусах, направленных из центра круга в одном направлении. В точках, лежащих на поверхности f_+^2 , $\cos \Delta = -1$ и $\Delta = \pi$, то есть вихри располагаются на радиусах, противоположно направленных из центра круга. Возможные случаи теперь можно классифицировать следующим образом.

1. Линия интегрирования Q начинается и заканчивается на поверхности f_-^2 ($0 \leq \Delta \leq \Delta_{\max} < \pi$).
2. Линия Q начинается на f_-^2 и заканчивается на f_+^2 ($0 < \Delta < \pi$).
3. Начало и конец линии Q лежат на f_+^2 ($0 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta \leq \pi$).

Существует еще четвертый пограничный случай, когда траектории одного или двух вихрей проходят через центр круга.

Отметим следующий интересный факт. Во втором случае, когда начало и конец отрезка интегрирования кривой Q лежат на различных поверхностях, возможно двукратное вырождение движения: для одних и тех же значений E и M могут существовать два отрезка кривой Q , заключенных между поверхностями f_-^2 и f_+^2 . При $\nu = 1$ это очевидно, так как в силу тождественности вихрей оба отрезка интегрирования должны располагаться симметрично относительно вертикальной плоскости, построенной на биссектрисе $r_1 = r_2$. При $\nu \neq 1$ эти отрезки уже не симметричны и дают различные траектории при одинаковых интегралах движения.

Уравнение (22) определяет период T относительного движения вихрей. Через время T вихри оказываются на тех же расстояниях от центра, что и в начале движения. Но угловые координаты вихрей за это время получают приращение $\Delta\Theta$, которое можно определить, интегрируя уравнение (20) в пределах от 0 до T . Очевидно, что в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \Delta\Theta/T$, останется только относительное движение вихрей по замкнутым траекториям. Следовательно, полное движение является двойкопериодическим с периодами T и $2\pi/\Omega$.

Для проверки полученных выводов была составлена программа численного счета, позволяющая решать по методу Рунге–Кутты систему уравнений движения (6), находить по заданным начальным положениям вихрей значения E и M , методом Ньютона определять

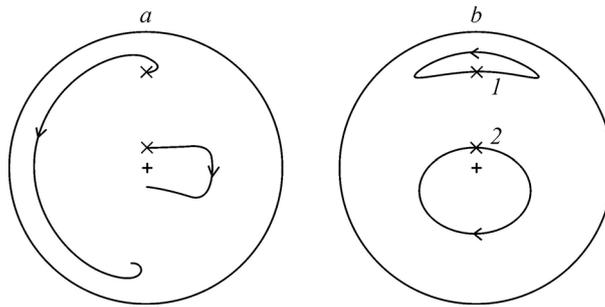


Рис. 2. Вихревые траектории в покоящейся (а) и вращающейся (b) системах координат для $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1, E = -0,131, M = 0,48, T = 12,49$.
 $\Omega = 0$ (а), 0,24 (b).

границы интегрирования r_1^* и r_1^{**} , вычислять периоды движения и угловую скорость Ω системы координат, в которой траектории замкнуты. Интегрирование в уравнениях (22) и (20) выполнялось по методу Симпсона с учетом особенностей на верхнем и нижнем пределах.

На рис. 2 приведены траектории вихрей в покоящейся (рис. 2а) и вращающейся (рис. 2b) системах координат. На рис. 3 для $\nu = 1$ во вращающейся системе координат показаны две различные траектории с одинаковыми интегралами движения E и M , но разными угловыми скоростями Ω систем отсчета, в которых траектории замкнуты. Следует подчеркнуть, что форма траекторий зависит только от начальных положений вихрей и от отношения циркуляций ν . Значения циркуляций определяют темп движения (T), а их знаки — направление вращения. Замена знаков у циркуляций γ_1 и γ_2 на противоположные соответствует движению «вспять» по времени по тем же траекториям. Обратимость движения системы вихрей вытекает из уравнения (6).

Таким образом, хотя уравнения (19), (20) не удастся проинтегрировать в простом аналитическом виде, тем не менее, все характеристики движения двух вихрей могут быть определены с любой степенью точности численными методами. В этом смысле движение двух вихрей в круге является точно интегрируемым.

Движение двух вихрей в некруговой области

Момент системы вихрей M при движении в некруговой области не сохраняется. В четырехмерном фазовом пространстве системы изображающая точка движется по трехмерному многообразию энергии. В общем случае этой трехмерности достаточно для появления чрезвычайно сложных, стохастических траекторий [29].

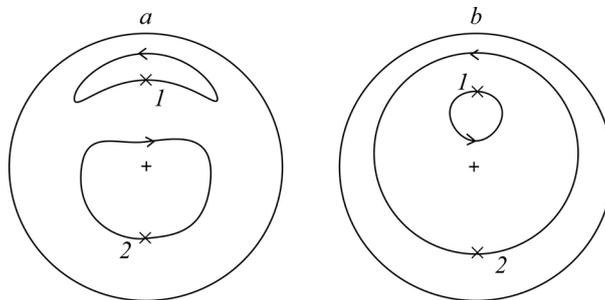


Рис. 3. Две траектории с одинаковыми интегралами движения и разными Ω для $\gamma_1 = \gamma_2, E = -0,05, M = 0,71, T = 38,64$.
 $\Omega = 0,46$ (а), 0,3 (b).

Рис. 4. Деформированная область D -лемниската.

Удобным аппаратом для исследования характера траекторий динамических систем является предложенный Пуанкаре метод секущих поверхностей в фазовом пространстве. Суть его в том, что траектория системы в фазовом пространстве многократно «прокалывает» некоторую заданную гиперповерхность (на единицу меньшей размерности, чем размерность фазового пространства). Затем координаты последовательных «проколов» проектируются на определенные двумерные плоскости. По распределению точек на двумерных плоскостях можно судить о типе движения. В случае полной интегрируемости точки должны укладываться на некоторые, так называемые, инвариантные кривые [29]. Однако для стохастических траекторий характерно случайное распределение точек на плоскости.

Область движения вихрей D показана на рис. 4. Эта каплевидная область отображается на единичный круг функцией

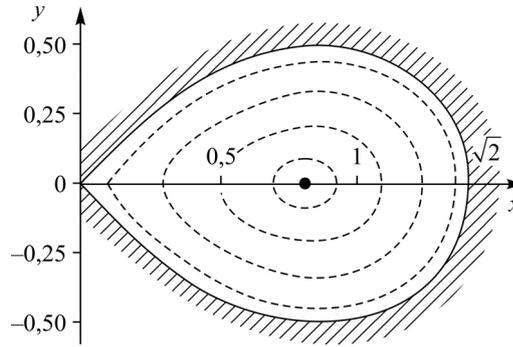
$$w = 1 - z^2. \quad (23)$$

Кривая, ограничивающая область D , называется лемнискатой и описывается формулой

$$y = \pm \left[(1 + 4x^2)^{1/2} - 1 - x^2 \right]^{1/2},$$

получающейся из (23) при $|w|^2 = 1$. Такой выбор обусловлен относительной простотой отображающей функции (23) и желанием исследовать движение в области, не слишком отличающейся от круга.

На рис. 4 штриховыми линиями изображены траектории одного вихря, определенные по методу Рауса [9] из уравнения $H(x, y) = E$. Для двух вихрей естественно исследовать сразу некоторое семейство траекторий с заданным значением энергии и сравнить картины инвариантных кривых, возникающие при движении в различных областях. Были построены сечения для вихрей единичной интенсивности $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ при значениях энергии 0,05, 0, -0,05 для круга и -0,05, -0,1, -0,15 для D -области. Сечением Пуанкаре во всех случаях являлась гиперплоскость $y_2 = 0$. Начальные координаты в фазовом пространстве выбирались следующим образом: x_1 и y_1 задавались произвольно (в пределах некоторой области); $y_2 = 0$; x_2 определялись методом Ньютона из уравнения энергии при заданном значении E . В результате находилась начальная точка траектории, лежащая на секущей гиперплоскости $y_2 = 0$ и одновременно на поверхности заданной энергии. Далее методом Рунге–Кутты решались динамические уравнения и на каждом шаге контролировалось условие смены знака величины y_2 . Чтобы повысить точность определения координат пересечения, интервал времени, на котором происходила смена знака y_2 , просчитывался заново с десятикратно уменьшенным шагом. Координаты точки пересечения получались из линейной аппроксимации отрезка траектории, соединяющего две последовательно рассчитанные точки, лежащие по разные стороны от секущей гиперплоскости. Погрешность вычислений контролировалась сохранением интеграла энергии. Относительное отклонение $\Delta E/E$ для всех рассчитанных траекторий не превышало 10^{-5} . Траектории, подозреваемые в стохастичности, просчитывались повторно с еще большей точностью ($\Delta E/E \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$).



На рис. 5 приведены три сечения $y_2 = 0$ с различными энергиями для круга (рис. 5a) и D -области (рис. 5b). Было обнаружено два типа инвариантных кривых: замкнутые и состоящие из отрезков, расположенные слева и справа от группы замкнутых кривых.

Для построения каждой кривой требовалось не более 30 точек на сечениях Пуанкаре. Этого количества было достаточно, чтобы определить, укладываются ли точки на кривую, и является ли она гладкой. На самом деле количество точек было в два раза больше, так как каждой рассчитанной точке (x_1, y_1) соответствует симметричная $(x_1, -y_1)$. Счет обычно начинался из точек, лежащих на оси x_1 , поэтому симметричные точки могли быть получены расчетом с обращением времени и, следовательно, принадлежат той же траектории, что и рассчитанные.

Почти все инвариантные кривые получились гладкими, поэтому точки на них не нанесены. Исключение составляют точки на сечении Пуанкаре для стохастической траектории с энергией $E = -0,15$ (рис. 5b), не укладывающиеся на гладкую кривую. Ограничивающая стохастическую область инвариантная кривая получилась негладкой. Эта траектория, по-видимому, является сложным длиннопериодическим циклом. Интересно отметить, что две другие пограничные со стохастической областью инвариантные кривые

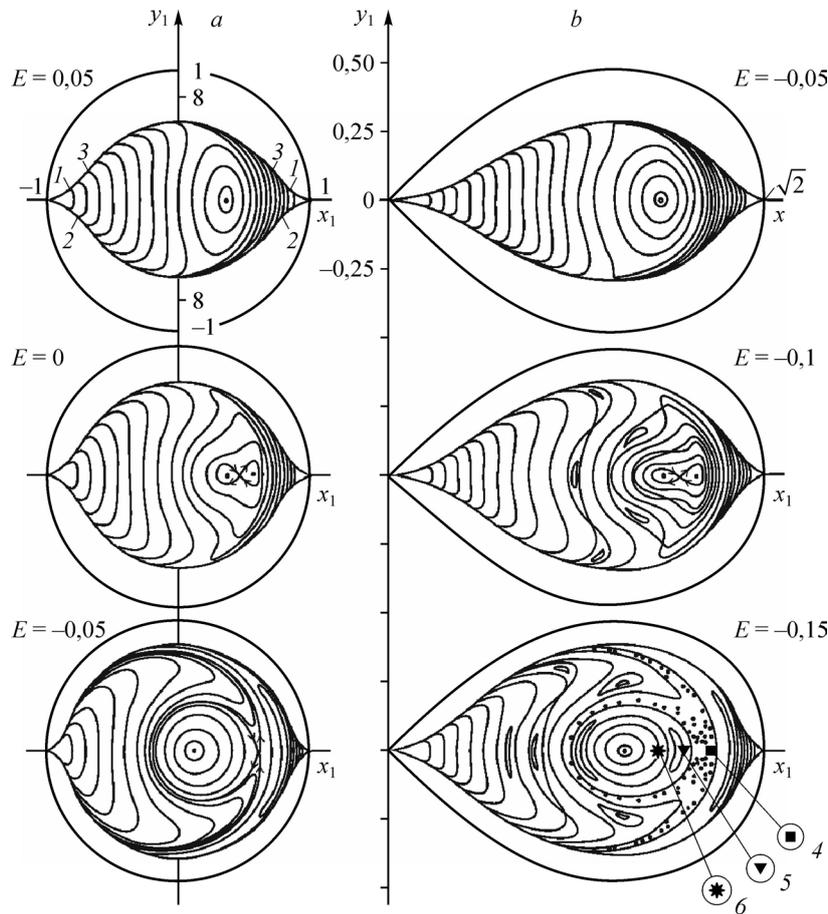


Рис. 5. Сечения Пуанкаре для круга (a) и лемнискаты (b).

На фрагменте для значения энергии $E = 0,05$ цифрами 1, 1; 2, 2; 3, 3 отмечены левые и правые отрезки трех инвариантных кривых, принадлежащие трем разным траекториям в фазовом пространстве.

получились весьма гладкими, несмотря на то, что они подходят к стохастической области очень близко. Это характерное свойство инвариантных кривых — давать иногда резкую границу со стохастической областью точек — еще не нашло объяснения в теории динамических систем.

При анализе картины сечений было замечено, что точки укладываются внутри определенной области с границей, являющейся огибающей семейства инвариантных кривых. Причем размеры этой области монотонно увеличиваются с изменением величины E в сторону отрицательных значений. Граница этой области вычислялась следующим образом: уравнение $H(x_1, y_1, x_2, 0) = E$ дает в плоскости x_1, y_1 семейство кривых, зависящее от x_2 как от параметра, и уравнение огибающей этого семейства имеет вид

$$\partial H(x_1, y_1, x_2, 0) / \partial x_2 = 0.$$

Это уравнение вместе с уравнением $H = E$ решалось численно методом Ньютона. В результате определялась линия $y_1(x_1)$, ограничивающая область с инвариантными кривыми (рис. 5). Отметим, что ни одна точка «проколов» на сечениях не вышла за рассчитанные таким образом границы.

Увеличение энергии соответствует уменьшению расстояния между вихрями. При больших значениях энергии инвариантные кривые сосредотачиваются в узкой веретенообразной области вблизи оси x . Это объясняется тем, что при больших E вихри, расположенные на малом расстоянии друг от друга, быстро вращаются вокруг общего центра тяжести и движутся вместе, никогда не распадаясь. Фактически такое движение эквивалентно движению одного вихря суммарной интенсивности. В пределе $E \rightarrow \infty$ область инвариантных кривых вырождается в отрезок оси x . В пределе $E \rightarrow -\infty$ область, содержащая инвариантные кривые, расширяется и занимает все доступное пространство. Большие отрицательные энергии получаются в результате размещения одного из вихрей очень близко у стенки. При этом вихри движутся почти независимо друг от друга: один направляется вдоль границы на малом расстоянии от нее, другой перемещается внутри области по траекториям одиночного вихря (рис. 4). Влияние пристенного вихря на второй вихрь мало, так как он экранируется своим изображением в стенке. Серия сечений (рис. 5) позволяет увидеть, как меняется картина кривых в фазовом пространстве и понять причину возникающей стохастичности.

Периодическое движение на сечениях изображается точкой. Для случая круга это движение интерпретируется особенно просто: два одинаковых вихря, помещенные симметрично относительно центра, движутся с постоянной скоростью по окружности постоянного радиуса. Если расстояние между ними мало, то энергия положительна и велика и движение устойчиво. При малых возмущениях этого движения на сечениях возникают эллиптические инвариантные кривые, охватывающие периодическую точку. Однако с увеличением расстояния между вихрями возрастает влияние стенок. При достижении некоторого критического расстояния симметричное движение теряет устойчивость и происходит бифуркация. Из эллиптической периодической точки рождаются три новые: одна гиперболическая и две эллиптические по бокам (рис. 5, средние значения энергии E). Гиперболическая точка соответствует уже описанному прежде симметричному движению вихрей (теперь, однако, неустойчивому). Она изображается точкой самопересечения инвариантной кривой. Стрелки на рис. 5 показывают направление «движения» точек сечения в окрестности гиперболической периодической точки. Характерно, что энергия, при которой происходит бифуркация, близка к нулю. Это означает, что положительная часть энергии взаимодействия между вихрями почти полностью компенсируется отрицательной энергией взаимодействия вихрей со стенками.

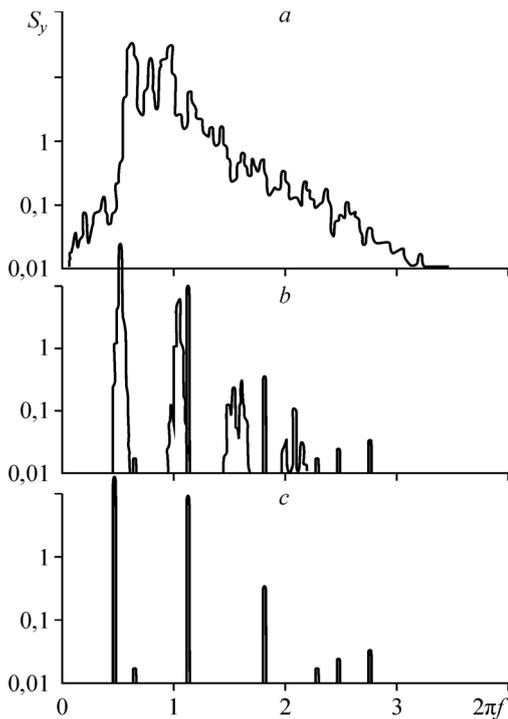


Рис. 6. Спектры мощности координаты y_1 для трех начальных положений вихрей, заданных на рис. 5b при $E = -0,15$ символами 4 (a), 5 (b), 6 (c).

Подобие картин сечений (рис. 5a и 5b) позволяет заключить, что с уменьшением энергии эволюция системы из двух вихрей в некруговой области вначале качественно протекает также, как и для круговой. Естественно, что для D -области указанная выше бифуркация возникает при других значениях энергии $E \approx -0,097$ и картины сечений сложнее в деталях. На рис. 5b при $E = -0,1$ можно видеть распавшиеся «резонансные торы» — пятикратный и трехкратный «резонансы». Их появление характерно для возмущенных гамильтоновых систем и объясняется в теории Колмогорова–Арнольда–Мозера [29, 30].

Существенное отличие между интегрируемым и неинтегрируемым случаями демонстрируют сечения на рис. 5 для наименьших энергий. Для некоторого множества начальных условий получаются стохастические траектории при движении двух вихрей в D -области. Как показывает серия сечений на рис. 5b, стохастическая область точек образуется в результате расщепления самопересекающейся сепаратрисной поверхности («восьмерки» в сечении с $E = -0,1$ на рис. 5). Явление расщепления сепаратрисных поверхностей изучал Пуанкаре, и структура, образующаяся при этом, была названа им гомоклинической [29, 30]. Чтобы убедиться в том, что фазовая точка действительно случайным образом блуждает по гомоклинической структуре, был проведен спектральный анализ некоторых траекторий. Удобно определять спектр мощности для y -координаты одного из вихрей, так как в силу симметрии ее среднее значение равно нулю.

На рис. 6 показаны спектры мощности S_y трех траекторий с энергией $E = -0,15$ как функции безразмерной частоты f . Соответствующие спектрам рис. 6a–6c инвариантные кривые отмечены на сечении с $E = -0,15$ рис. 5 символами 4–6. Чем ближе к стохастической области располагается траектория, тем шире пики в ее спектре. Спектр стохастической траектории является сплошным (рис. 6a), а соответствующие ей точки на сечении Пуанкаре не укладываются на какие-либо гладкие кривые.

Полученные сплошные спектры координат вихрей и случайное поведение точек на сечениях Пуанкаре позволяют заключить, что уже в минимальной системе из двух вихрей, помещенных в замкнутую некруговую область, появляются стохастические вихревые траектории.

Заключение

Вопрос об интегрируемости двумерной гидродинамики идеальной жидкости возникает в связи с известной теоремой Кельвина о циркуляции скорости по любому жидкому контуру, согласно которой эти циркуляции постоянны во времени. Так как число

таких контуров бесконечно велико, появляется надежда на точную интегрируемость уравнений двумерной гидродинамики. Исследование интегрируемости вихревого движения представляется разумным начинать с конечномерных систем с небольшим числом вихрей. В работе методами теории функции комплексных переменных выведен гамильтониан системы вихрей в односвязной области. Для случая круговой области получен дополнительный интеграл системы вихрей, связанный с моментом сохранения импульса. Показана естественная связь этих интегралов сохранения системы вихрей с физической энергией и моментом импульса жидкости в круге. Наличие дополнительного интеграла для круговой области приводит к движению по двумерному многообразию в 4-х мерном фазовом пространстве системы двух вихрей. Движение по двумерному многообразию всегда регулярно. При деформации области движения и отклонении ее формы от круговой (что можно рассматривать как некоторое возмущение) картины инвариантных кривых в фазовом пространстве системы перестраиваются сложным образом. Наиболее чувствительна к возмущению окрестность периодического гиперболического движения. Из него под действием возмущения возникает гомоклиническая структура. Движение фазовой точки по этой структуре обладает признаками стохастического процесса: случайным распределением точек на сечениях Пуанкаре и сплошным спектром мощности. Таким образом, численный эксперимент выявляет неинтегрируемость двумерных уравнений гидродинамики идеальной жидкости и демонстрирует появление стохастичности уже в системе из двух вихрей, движущихся в ограниченной некруговой области.

Список литературы

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 938 с.
2. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
3. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978. 520 с.
4. Edwards S.F., Taylor J.B. Negative temperature states of two-dimensional plasmas and vortex fluids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1974. Vol. 336. P. 257–271.
5. Новиков Е.А. Динамика и статистика системы вихрей // Журнал эксперим. и теорет. физики. 1975. Т. 68, вып. 5. С. 1868–1882.
6. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей // Журнал эксперим. и теорет. физики. 1978. Т. 75, вып. 3. С. 868–876.
7. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. Стохастизация вихрей // Письма в Журнал эксперим. и теорет. физики. 1979. Т. 29, № 12. С. 737–740.
8. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд. АН СССР, 1962. 218 с.
9. Routh S. Some applications of conjugate functions // Proc. Lond. Math. Soc. 1881. Vol. 12. P. 73–80.
10. Lin C.C. On the motion of vortices in two dimension // Toronto Univ. App. Math. Series, No. 5. Press. 1943.
11. Гешев П.И., Черных А.И. Движение вихрей в двумерной односвязной области. Новосибирск, 1980. 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т теплофизики; № 65–80).
12. Greenhill A.G. Plane vortex motion // Quart. J. Pure Appl. Math. 1878. Vol. 15, No. 58. P. 10–29.
13. Kimura Y. Motion of two point vortices in a circular domain // J. Phys. Soc. Japan. 1988. Vol. 57, No. 5. P. 1641–1649.
14. Aref H. Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. Vol. 15. P. 345–389.
15. Килин А.А., Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / Под ред. А.В. Борисова, И.С. Мамаева, М.А. Соколовского. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 414–440.
16. Борисов А.В., Мамаев И.С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. С. 148–173.
17. Борисов А.В., Мамаев И.С., Васькина А.В. Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 1. С. 119–138.
18. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Переход к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 1. С. 49–54.
19. Васькин В.В., Ермакова Н.Н. Динамика двух точечных вихрей в кольцевой области // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 3. С. 531–547.

20. **Ездин Б.С.** Движение вихревой пары в кольцевой области // Гидродинамика и акустика одно- и двухфазных потоков: сб. науч. тр. Новосибирск, 1983. С. 31–35.
21. **Гешев П.И., Ездин Б.С.** Движение вихревой пары между параллельными стенками // Прикл. механика и техн. физика. 1983. № 5. С. 62–67.
22. **Веретенцев А.Н., Гешев П.И., Куйбин П.А., Рудяк В.Я.** О развитии метода вихревых частиц применительно к описанию отрывных течений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1989. Т. 29, № 6. С. 878–887.
23. **Гешев П.И., Ездин Б.С.** Моделирование турбулентного переноса в канале точечными вихрями // Прикл. механика и техн. физика. 1986. № 2. С. 79–84.
24. **Гешев П.И., Кроковный П.П.** Двумерная вихревая модель переноса импульса для турбулентного течения в круглой трубе // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 4. С. 505–510.
25. **Свешников А.Г., Тихонов А.Н.** Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967. 304 с.
26. **Волковьский Л.И., Луц Г.Л., Араманович И.Г.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970. 320 с.
27. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 792 с.
28. **Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.** Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
29. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.

*Статья поступила в редакцию 15 марта 2018 г.,
после доработки — 22 мая 2018 г.*