

УДК 517.956.3:62-621.2

Уравнения состояния в математических моделях систем добычи и транспорта природного газа

Э.А. Бондарев¹, А.Ф. Воеводин², К.К. Аргунова¹, И.И. Рожин¹

¹Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Октябрьская, 1, Якутск, 677980

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090

E-mails: voevodin@hydro.nsc.ru (Воеводин А.Ф.), akk@ipng.ysn.ru (Аргунова К.К.), rozhin@ipng.ysn.ru (Рожин И.И.)

Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Аргунова К.К., Рожин И.И. Уравнения состояния в математических моделях систем добычи и транспорта природного газа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 309–313.

Для уравнения состояния реального газа Редлиха–Квонга, которое широко используется при описании поведения углеводородных смесей, построена кривая инверсии, определяющая смену знака коэффициента дросселирования. Диапазон изменения приведенных значений давления и температуры соответствует характерным для систем добычи и транспорта природного газа величинам.

DOI: 10.15372/SJNM20200305

Ключевые слова: уравнение состояния, дросселирование, кривая инверсии, природный газ, математическое моделирование.

Bondarev E.A., Voevodin A.F., Argunova K.K., Rozhin I.I. Equations of state in mathematical models of production and transportation natural gas // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 309–313.

For one of cubic equations of state, the Redlich–Kwong, the inverse curve, which characterizes a change in a sign of the Joule–Thomson coefficient, has been constructed. The range of reduced pressure and temperature corresponds to the values intrinsic of technological changes in production and transport systems of natural gas.

Keywords: equation of state, inverse curve, natural gas, mathematical modeling.

1. Введение

В недавней публикации авторов [1] был выполнен анализ уравнения Редлиха–Квонга [2] и показана возможность его использования в математической модели нестационарного течения газа в магистральных газопроводах, так как оно не только обеспечивает достаточную точность вычисления коэффициента несовершенства и теплоемкостей природного газа, но и обеспечивает гиперболичность системы уравнений трубной гидравлики сжимаемых жидкостей. Это уравнение считается “наиболее удачным двухпараметрическим уравнением состояния” [2] и оно наиболее часто используется при расчетах поведения смесей углеводородов [3], а также — при расчетах условий термодинамического равновесия газовых гидратов [4].

В данной статье предлагается расширить число критериев отбора уравнения состояния для замыкания математических моделей систем добычи и транспорта природного газа, включив в них такую важную термодинамическую характеристику как инверсная

кривая [5]. Это дополнение необходимо для создания общей для всего комплекса добычи и транспорта газа (газоносный пласт, скважина, газопровод) методологии оценки уравнений состояния. Дело в том, что для описания фазовых превращений при добыче природного газа используются методы прикладной термодинамики, в том числе и для выбора уравнения состояния углеводородных смесей [3]. Такой подход позволяет правильно оценить процессы конденсации и испарения пластовых флюидов и плотности жидкой и газовой фаз и играет важную роль в выборе технологических режимов разработки месторождений.

Инверсная кривая в координатах температура — давление соответствует смене знака коэффициента Джоуля–Томсона [5]

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = \frac{1}{c_p} \left(T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right), \quad (1)$$

который определяется с помощью уравнения состояния

$$pV = zRT, \quad (2)$$

где p , T , V — давление, температура и удельный объем газа; i — энтальпия; c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; R — газовая постоянная, зависящая от компонентного состава природного газа; z — так называемый коэффициент несовершенства газа, определяемый обычно экспериментально в зависимости от отношения давления и температуры к их критическим значениям p_c и T_c , также зависящим от компонентного состава природного газа.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = \frac{RT^2}{c_p p} \frac{\partial z}{\partial T}. \quad (3)$$

2. Основные результаты и их обсуждение

Для удобства выкладок и общности выводов запишем уравнение Редлиха–Квонга для приведенных параметров $p_r = p/p_c$, $T_r = T/T_c$, $V_r = V/V_c$, где $V_c = RT_c/p_c$,

$$p = \frac{T}{V - m_2} - \frac{m_1}{\sqrt{T} V (V + m_2)}, \quad (4)$$

где коэффициенты $m_1 = 0.42748$, $m_2 = 0.08664$ [2], а нижний индекс приведенных параметров для удобства опущен.

Подставляя в уравнение (4) уравнение (2), получим следующее кубическое уравнение для коэффициента несовершенства:

$$z^3 - z^2 + (A - B(B - 1))z - AB = 0, \quad (5)$$

где $A = m_1 \frac{p}{T^{2.5}}$, $B = m_2 \frac{p}{T}$ — функции приведенных температуры и давления.

В диапазоне изменений давления и температуры, соответствующем технологическим параметрам отбора газа, уравнение (5) имеет один действительный корень

$$z(p, T) = a(p, T) + b(p, T) + \frac{1}{3}, \quad (6)$$

$$\text{где } a(p, T) = \sqrt[3]{-\frac{q(p, T)}{2} + \sqrt{Q(p, T)}}, \quad b(p, T) = \sqrt[3]{-\frac{q(p, T)}{2} - \sqrt{Q(p, T)}},$$

$$q(p, T) = \frac{r(p, T)}{3} + \frac{1}{27} - AB, \quad Q(p, T) = \left(\frac{r(p, T)}{3}\right)^3 + \left(\frac{q(p, T)}{2}\right)^2,$$

$$r(p, T) = A - B(B + 1) - \frac{1}{3}.$$

График частной производной $z(p, T)$ по температуре, вычисленной в соответствии с формулой (6), показан на рис. 1, где линия пересечения этой поверхности горизонтальной плоскостью — инверсная кривая, представленная на рис. 2 (кривая 1). В вычислениях использовались значения критических давления и температуры, соответствующих метану. Отметим, что здесь все операции (дифференцирование и нахождение корней трансцендентного уравнения $\partial z / \partial T = 0$) выполнялись численно, чтобы избежать громоздких выкладок.

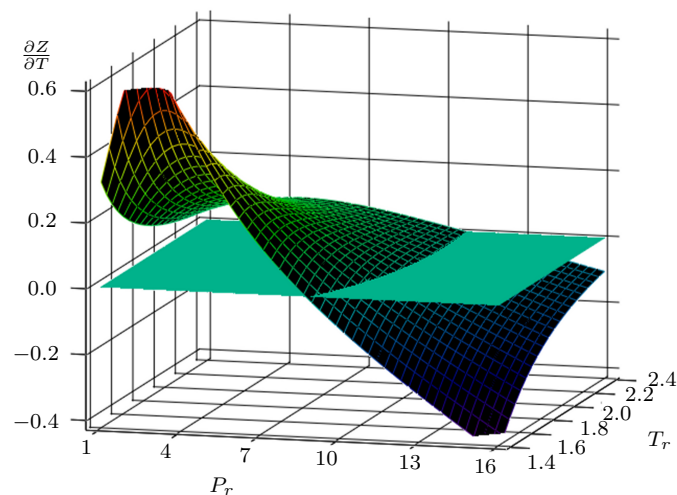


Рис. 1. Зависимость коэффициента Джоуля–Томсона от приведенных давления и температуры

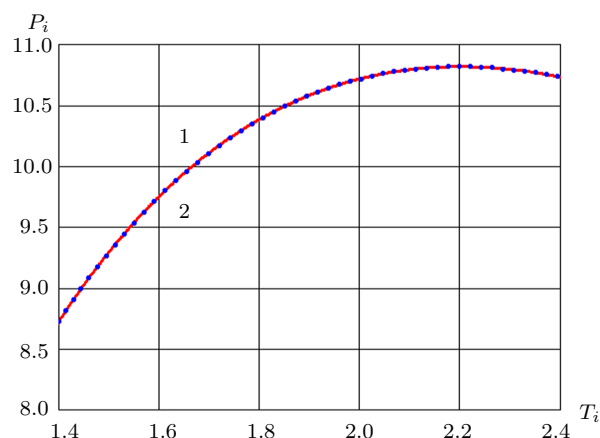


Рис. 2. Инверсная кривая уравнения Редлиха–Квонга (сплошная кривая вычислена с использованием коэффициента несовершенства; точки вычислены по уравнению (1), определяющему коэффициент дросселирования)

Для контроля полученных результатов авторы использовали следующий прием, подсказанный видом уравнения Редлиха–Квонга (4) и эквивалентностью соотношений (1) и (3). При этом частная производная удельного объема по температуре заменялась на выражение, которое вытекает из очевидного тождества

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{(\partial p/\partial T)_V}{(\partial p/\partial V)_T}. \quad (7)$$

Теперь, подставляя формулу (7) в (1) и выполняя несложные преобразования, получим явную связь между инверсной температурой и удельным объемом

$$T_i(V) = \left(\frac{(V - m_2)^2 (5V + 3m_2)}{2V(V + m_2)^2} \cdot \frac{m_1}{m_2} \right)^{2/3}. \quad (8)$$

Совместное использование формулы (8) и уравнения (4) позволяет построить инверсную кривую в традиционном виде (рис. 2). Из этого рисунка следует, что оба способа построения инверсной кривой дают абсолютно идентичные результаты (сравни кривые 1 и 2 на рис. 2). С точки зрения универсальности предпочтителен первый подход, так он применим и в тех случаях, когда явного выражения типа (8) построить не удастся. Такая ситуация возникает, например, при построении инверсной кривой для уравнения Пенга–Робинсона [6], которое также часто используется для описания поведения углеводородных смесей, особенно, при конденсации газовой фазы

$$p = \frac{T}{V - k_2} - \frac{k_1 \left(1.0085677 + 0.82154(1 - \sqrt{T}) \right)^2}{V(V + k_2) + k_2(V - k_2)}, \quad (9)$$

где k_1, k_2 — числовые константы [6].

Уравнение (9) также можно свести к кубическому уравнению относительно удельного объема или коэффициента несовершенства, однако в диапазоне изменения приведенных давления и температуры, характерных для систем добычи и транспорта газа, его дискриминант не всюду положителен. Здесь для выбора физически обоснованных решений и для построения инверсной кривой требуется дополнительный анализ.

3. Заключение

Вид уравнения состояния является ключевым для замыкания математических моделей добычи и транспорта природного газа на современном уровне развития соответствующих технологических процессов [7]. В статье показано, что уравнение Редлиха–Квонга, широко используемое для расчетов поведения смесей природных углеводородов, позволяет термодинамически адекватно построить кривую инверсии, соответствующую смене знака коэффициента Джоуля–Томсона.

Литература

1. **Bondarev E.A., Voevodin A.F., Argunova K.K., Rozhin I.I.** Choosing an equation of state in mathematical models of pipeline transportation of natural gases // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 3. — P. 198–206. Перевод: Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Аргунова К.К., Рожин И.И. Выбор уравнения состояния в математических моделях трубопроводного транспорта природного газа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 239–249.

2. **Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Пер. с англ. под ред. Б.И. Соколова. 3-е изд. — Л.: Химия, 1982.
3. **Брусиловский А.И.** Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. — М.: Грааль, 2002.
4. **Sloan E.D., Koh C.A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third ed. — Boca Raton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2008.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Статистическая физика. Часть 1. — М.: Наука, 1976.
6. **Juan Sebastian Lopez-Echeverry, Simon Reif-Acherman, Eduard Araujo-Lopez.** Peng–Robinson equation of state: 40 years through cubics // Fluid Phase Equilibria. — 2017. — Vol. 447. — P. 39–71.
7. **Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф.** Решение задач трубной гидравлики в системах добычи и транспорта природного газа. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2017.

Поступила в редакцию 2 марта 2018 г.

После исправления 18 января 2019 г.

Принята к печати 16 апреля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Bondarev E.A., Voevodin A.F., Argunova K.K., Rozhin I.I.** Choosing an equation of state in mathematical models of pipeline transportation of natural gases // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 3. — P. 198–206. Perevod: Bondarev E.A., Voevodin A.F., Argunova K.K., Rozhin I.I. Vybor uravneniya sostoyaniya v matematicheskikh modelyakh truboprovodnogo transporta prirodnogo gaza // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017. — T. 20, № 3. — S. 239–249.
2. **Rid R., Prausnitz Dzh., Shervud T.** Svoistva gazov i zhidkosti: Spravochnoe posobie / Per. s angl. pod red. B.I. Sokolova. 3-e izd. — L.: Himiya, 1982.
3. **Brusilovskii A.I.** Fazovye prevrascheniya pri razrabotke mestorozhdenii nefti i gaza. — M.: Graal', 2002.
4. **Sloan E.D., Koh C.A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third ed. — Boca Raton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2008.
5. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Statisticheskaya fizika. Chast' 1. — M.: Nauka, 1976.
6. **Juan Sebastian Lopez-Echeverry, Simon Reif-Acherman, Eduard Araujo-Lopez.** Peng–Robinson equation of state: 40 years through cubics // Fluid Phase Equilibria. — 2017. — Vol. 447. — P. 39–71.
7. **Bondarev E.A., Voevodin A.F.** Reshenie zadach trubnoi gidravliki v sistemah dobychi i transporta prirodnogo gaza. — Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, 2017.

