

свыше 20 %. Резкие перепады параметров внутри этого слоя свидетельствуют о том, что в нем образуется структура, которую интерпретируем как висячий скачок, идущий вдоль стенки на всем протяжении сопла.

Анализ полученных результатов подводит к выводу, который касается методической стороны проблемы. Упрощенные уравнения Навье — Стокса, которые здесь используются для расчета течения, получены из полных уравнений в предположении малости отношения v/u . Но мы, применяя упрощенную модель, получили, что это отношение не так уж мало в сопле с большими углами полураствора. И так как толщина вытеснения мала, то, казалось бы, для такого сопла более приемлем подход, заключающийся в последовательном расчете невязкого ядра и пограничного слоя. Но с помощью этого традиционного способа нельзя получить образование скачка уплотнения внутри пограничного слоя, что, по-видимому, сумел «ухватить» используемый метод. Нам кажется, что модель упрощенных уравнений Навье — Стокса, хотя и не без погрешностей, все же адекватно передает картину течения.

В заключение отметим, что алгоритм допускает расширение для проведения расчетов течения других составов смесей в рамках модели много-температурной релаксации.

Авторы выражают признательность В. Н. Ветлוצкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мучная М. И. Исследование течений в гиперзвуковых соплах в рамках упрощенных уравнений Навье — Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 6.
2. Mitra N. K., Fiebig M. Effect of vibrational wall accommodation on small signal gain in $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-H}_2\text{O}$ gasdynamic laser (GDL) // 10th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, 1976: Proc.— Princeton, 1977.— (Progress in Astronaut. and Aeronaut.; V. 51, pt II).
3. Лунькин Ю. П., Колешко С. Б. Колебательно-диссоциационная релаксация в многокомпонентной смеси вязких теплопроводных газов // Тр./ЛГУ.— 1967.— № 280.
4. Тирский Г. А. Полуфеноменологический вывод уравнений гидродинамики многокомпонентных смесей газов с возбужденными внутренними степенями свободы // Механика. Современные проблемы.— М.: Ин-т механики МГУ, 1987.
5. Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры.— М.: Наука, 1980.
6. Доррене У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа.— М.: Мир, 1966.
7. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
8. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.— М.: Наука, 1972.
9. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике.— М.: Машиностроение, 1972.
10. Ачасов О. В., Рагозин Д. С. Константы колебательного энергообмена в лазерно-активных средах CO_2 -ГДЛ с добавками O_2 , H_2 , H_2O и CO .— Минск, 1986.— (Препр./АН БССР, Ин-т тепло- и массообмена; № 16).
11. Британ А. Б., Левин В. А., Старик А. М., Хмелевский А. Н. К выбору расчетной модели течения в соплах высокотемпературных ГДЛ на продуктах горения // Квантовая электрон.— 1986.— Т. 13, № 1.

г. Новосибирск

Поступила 1/VIII 1991 г.

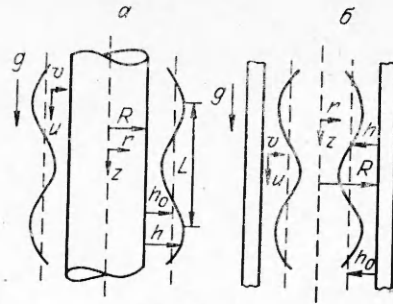
УДК 532.516

Ю. Я. Трифонов

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ СТЕНОК ПРИ ВОЛНОВОМ СТЕКАНИИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются различные волновые режимы стекания тонкого слоя вязкой жидкости вдоль внешней и внутренней поверхностей вертикального цилиндра. На основе интегрального метода из уравнений Навье — Стокса выведена более простая система эволюционных уравне-

ний и исследована линейная устойчивость ее тривиального решения. В глубине области неустойчивости с помощью численных методов рассчитаны различные нелинейные решения полученной системы. В отличие от случая стекания вдоль вертикальной плоскости, где в качестве единственного внешнего параметра было $Z^{-1} = (\text{Re}^{11}/81\text{Fi})^{1/6}$ (Re — число Рейнольдса, $\text{Fi} = (\sigma/\rho)^3/g\nu^4$ — пленочное число), при учете кривизны стенок дополнительно появляются еще параметры: кривизна стенок R^{-1} и Fi . Проанализировано влияние всех параметров на характеристики нелинейных волн. Продемонстрировано, что увеличение кривизны стенок R^{-1} всегда интенсифицирует волновые процессы, и при течении вдоль внутренней стенки цилиндра достаточно малого радиуса в расчетах обнаружен «катастрофический» рост амплитуды волн при движении внутрь области линейной неустойчивости.



Р и с. 1

1. Рассматривается двумерное стекание слоя вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1) вдоль внешней (а) и внутренней (б) поверхностей вертикального цилиндра. В дальнейшем ограничимся исследованием эволюции только длинноволновых возмущений свободной поверхности слоя, для которых введем малый параметр $\varepsilon = h_*/L$, где h_* — масштаб толщины пленки (например, средняя толщина), L — продольный масштаб возмущений (например, длина волны). Учитывая разный масштаб движений вдоль координат r и z и проведя обезразмеривание уравнений Навье — Стокса и граничных условий, после отбрасывания членов $O(\varepsilon)$ в диапазоне $\varepsilon \ll \text{Re} \leq 1/\varepsilon$ получим

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial(ur)}{\partial z} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0, \quad u = v = 0, \quad r = R, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ r = R \pm h(z, t),$$

$$p = p_0 - \sigma \left(\mp \frac{1}{R \pm h} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right).$$

Здесь u — скорость вдоль оси z ; v — скорость в направлении оси r ; p — давление; p_0 — атмосферное давление; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость; R — радиус цилиндра; h — мгновенная толщина пленки; σ — коэффициент поверхностного натяжения. Верхний или нижний знаки в (1.1) и далее относятся к случаю стекания вдоль внешней стенки цилиндра (течение по проволоке) или внутренней (течение в трубке) соответственно.

Отметим, что сохранение в граничном условии члена с капиллярным давлением $\sim \partial^2 h / \partial z^2$ корректно, если исследуются жидкости с большим $\text{Fi} \sim \text{Re}^5 / \varepsilon^6$, это выполняется для большинства рассматриваемых в экспериментах жидкостей [1].

Легко выписать решение уравнений (1.1), существующее при любых расходах жидкости и отвечающее безволновому стеканию:

$$u = \frac{gR^2}{4\nu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left(1 \pm \frac{h_0}{R} \right)^2 \ln \frac{r}{R} \right], \quad v = 0,$$

$$p = p_0 - \sigma \left(\mp \frac{1}{R \pm h_0} \right), \quad h = h_0 = \text{const}.$$

Поиск других решений уравнений (1.1) требует привлечения больших вычислительных средств, и в данной работе в целях упрощения используется предположение об автомодельности продольного профиля

скорости:

$$(1.2) \quad u(r, z, t) = \pm \frac{q(z, t)}{R f_{\pm}(h(z, t)/R)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left(1 \pm \frac{h(z, t)}{R} \right)^2 \ln \frac{r}{R} \right],$$

$$q(z, t) = \pm \frac{i}{R} \int_R^{R+h} ur dr,$$

$$f_{\pm}(h/R) = 1/4 - (1 \pm h/R)^2 + (1 \pm h/R)^4 (3/4 - \ln(1 \pm h/R)).$$

Этот профиль удовлетворяет условиям прилипания на стенке и равенства нулю касательного напряжения на свободной границе. Кроме того, для течения с гладкой свободной границей (1.2) переходит в точное решение уравнений Навье — Стокса. В пределе $R \rightarrow \infty$ (течение вдоль вертикальной стенки) из (1.2) следует

$$u(\delta, z, t) = \frac{3q(z, t)}{h(z, t)} \left(\frac{\delta}{h(z, t)} - \frac{\delta^2}{2h^2(z, t)} \right)$$

(δ — поперечная координата, отсчитываемая от стенки).

Для течения вдоль вертикальной плоскости имеются как экспериментальные [2], так и теоретические [3] работы, демонстрирующие справедливость допущения об автомодельности продольного профиля скорости. Справедливость интегрального подхода убедительно доказывают также работы [4—6], где на его основе рассчитаны различные нелинейные волны, количественно согласующиеся с наблюдаемыми в экспериментах [1, 7].

Для длинных волн в случае течения вдоль вертикального цилиндра допущение (1.2) также достаточно разумно. С физической точки зрения справедливость соотношения (1.2) может быть установлена сравнением вычисленных с его помощью результатов с экспериментальными или расчетными, найденными на основе уравнений Навье — Стокса.

Из (1.1) и (1.2) интегрированием вдоль оси r (от R до $R \pm h(z, t)$) нетрудно получить

$$(1.3) \quad \pm \frac{\partial q}{\partial t} \pm 1,2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{h} f_1 \left(\pm \frac{h}{R} \right) \right) = \left(g + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{(R \pm h)^2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3vq}{h^3 f(\pm h/R)} \right) \left(\pm h + \frac{h^2}{2R} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{R}{R \pm h} \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$f = 3(1/4 - y^2 + y^4(3/4 - \ln(y)))/4(y - 1)^3, \quad y = 1 \pm h/R,$$

$$f_1 = (y - 1) \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} y^2 - \frac{5}{2} y^4 + \frac{17}{12} y^6 + 2y^4 \ln(y) - 3y^6 \ln(y) + \right. \\ \left. + 2y^6 \ln^2(y) \right) / \left(1,2 \left(\frac{1}{4} - y^2 + y^4 \left(\frac{3}{4} - \ln(y) \right) \right)^2 \right).$$

При выводе (1.3) использовано также кинематическое условие на свободной поверхности

$$\pm v = \partial h / \partial t + u \partial h / \partial z, \quad r = R \pm h(z, t).$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ ($f_1 \rightarrow 1$, $f \rightarrow -1$) система (1.3) переходит в систему уравнений Шкадова [8].

Отметим, что аналогичный интегральный подход был применен в [9] при изучении стекания магнитной жидкости вдоль внешней поверхности вертикального цилиндра. В отсутствие магнитного поля система уравнений, приведенная в [9], является частным случаем системы (1.3).

В данной работе расчет устойчивости тривиального решения и расчеты различных нелинейных волновых режимов проведены на основе уравнений (1.3), решение которых, соответствующее безволновому сте-

канию, записывается в виде

$$h = h_N, q = q_N = -\frac{gh_N^3}{3\nu} f(\pm h_N/R).$$

Для стекания вдоль вертикальной плоскости это известное соотношение Нуссельта. Для исследования устойчивости безволнового стекания подставим в систему (1.3) соотношения

$$h = h_N + h', q = q_N + q', (h', q') \sim \exp[i\alpha(z - \gamma t)]$$

($\alpha = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны возмущения). Линеаризуя ее относительно h' , q' , нетрудно найти

$$(1.4) \quad -\gamma^2 y_N + \gamma \left(2,4 \frac{q_N}{h_N} y_N f_1(y_N) \mp \frac{3\nu y_N R (y_N^2 - 1)}{2i\alpha h_N^3 f(y_N)} \right) \pm \\ \pm \frac{\sigma R (y_N^2 - 1)}{2\rho} \alpha^2 - \left(1,2 \frac{q_N^2}{h_N^2} f_1(y_N) \mp 1,2 \frac{q_N^2}{h_N R} \frac{df_1}{dy} \Big|_{y=y_N} \pm \frac{\sigma}{\rho R} \frac{y_N^2 - 1}{2y_N^2} \right) \pm \\ \pm \frac{3\nu q_N R (y_N^2 - 1)}{2i\alpha h_N^3 f^2} \left(3f(y_N) \pm \frac{1}{R} \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_N} \right) = 0, y_N = 1 \pm h_N/R.$$

Далее параметр α полагается вещественным и (1.4) служит для определения комплексного инкремента γ . Если $\text{Im}(\gamma) > 0$, то соответствующее возмущение нарастает со временем, если $\text{Im}(\gamma) < 0$, то безволновое течение устойчиво.

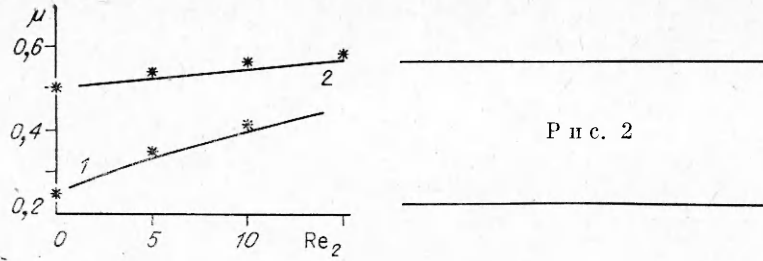
В безразмерных переменных характеристики нейтральных возмущений ($\text{Im}(\gamma) = 0$, $c_{\text{neut}} = \text{Re}(\gamma)$), полученных из (1.4), можно записать в виде

$$(1.5) \quad (\alpha_{\text{neut}}^*)^2 = \pm \frac{2}{\text{We} R^* (y_N^2 - 1)} \left(y_N c_{\text{neut}}^{*2} - 2,4 \frac{1}{h_N^*} y_N f_1 c_{\text{neut}}^* + 1,2 \frac{f_1}{h_N^{*2}} \mp \right. \\ \left. \mp \frac{1,2}{h_N^* R^*} \frac{df_1}{dy} \Big|_{y=y_N} \pm \text{We} \frac{y_N^2 - 1}{2y_N^2 R^*} \right), \\ c_{\text{neut}}^* = \frac{1}{y_N f(y_N) h_N^*} \left(3f(y_N) \pm \frac{h_N^*}{R^*} \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_N} \right), 1 + h_N^{*2} f(y_N) = 0.$$

Здесь $h_N^* = h_N/h^*$; $c^* = \gamma h^*/q_N$; $R^* = R/h^*$; $\text{Re} = q_N/\nu$; $\text{We} = (\sigma/\rho) h^*/q_N^2 = = (3\text{Fi}/\text{Re}^5)^{1/3}$; $\text{Fi} = (\sigma/\rho)^3/g\nu^4$; $\alpha^* = \alpha h^*$; $h^* = (3\nu q_N/g)^{1/3}$. Возмущения с $\alpha^* < \alpha_{\text{neut}}^*$ нарастают со временем, а с $\alpha^* > \alpha_{\text{neut}}^*$ затухают.

Численный анализ уравнений (1.5) показал, что при любых значениях параметров We и R^* существуют нейтральное возмущение и нарастающие моды. При $R^{*-1} = 0$ (стекание по вертикальной плоскости) из (1.5) следует, что $\alpha_{\text{neut}}^* = \sqrt{3/\text{We}}$, $c_{\text{neut}}^* = 3$, $h_N^* = 1$. С увеличением кривизны стенок для стекания как по проволочке, так и по внутренней поверхности цилиндра происходит расширение области линейной неустойчивости (т. е. становятся нарастающими все более коротковолновые моды), и чем выше We (малые Re для фиксированной жидкости), тем существеннее отклонение от зависимости $\sqrt{3/\text{We}}$. Для одного и того же значения R^* при любых We область нарастающих возмущений для течения по внутренней стенке цилиндра шире, чем аналогичная область для течения по проволочке. В отличие от стекания по вертикальной плоскости для течения по цилиндрической поверхности нейтральные кривые при $\text{Re} \rightarrow 0$ стремятся к конечному значению.

Для оценки справедливости длинноволнового приближения, использованного выше, в качестве масштаба продольного движения можно взять длину волны нейтрального возмущения, тогда легко видеть, что $\varepsilon \approx \approx \alpha_{\text{neut}}^*/2\pi$. В диапазоне $0 \leq R^{*-1} \leq 0,2$, $5 \leq \text{We} < \infty$ величина ε , как показал расчет, не превышает 0,1.



Р и с. 2

Толщина безволновой пленки h_N^* и фазовая скорость нейтральных возмущений c_{neut}^* , как следует из (1.5), — функции только безразмерного радиуса цилиндра R^* . В диапазоне $0 \leq R^{*-1} \leq 0,2$ зависимости $h_N^*(R^{*-1})$ и $c_{\text{neut}}^*(R^{*-1})$ являются практически линейными функциями и для стекания по проволочке убывают с увеличением кривизны стенок ($h_N^*(R^{*-1}) \leq 1$, $c_{\text{neut}}^*(R^{*-1}) \leq 3$), а для течения по внутренней поверхности цилиндра возрастают ($h_N^*(R^{*-1}) \geq 1$, $c_{\text{neut}}^*(R^{*-1}) \geq 3$).

На рис. 2 приведено сопоставление рассчитанных по формулам (1.5) (линии) кривых нейтральной устойчивости с данными [10] (обозначены звездочками), где эти зависимости рассчитывались посредством асимптотического разложения решения уравнений Навье — Стокса по параметру длинноволновости. На рис. 2 переменные обезразмерены аналогично [10] и $\mu = 2\pi h_N/\lambda$, $\text{Re}_2 = u_{\text{max}} h_N/\nu$ (u_{max} — скорость свободной поверхности), $R_2 = R/h_N$. Линия 1 отвечает стеканию по проволочке при $R_2 = 3$, $\text{We}_2 = \sigma/(\rho g h_N^2) = 100$, 2 — стеканию внутри трубки при $R_2 = 3$, $\text{We}_2 = 100$. Сопоставление демонстрирует хорошее количественное согласие, что в определенной мере подтверждает справедливость использования интегрального подхода.

Для расчета периодических стационарно бегущих решений уравнения (1.3) ($q = q(z - ct)$, $h = h(z - ct)$, c — фазовая скорость) конечной амплитуды удобно его переписать в безразмерном виде

$$(1.6) \quad -c^* \frac{d^2 q^*}{d\xi^{*2}} + 1,2 \frac{d}{d\xi^*} \left(\frac{q^{*2}}{h^*} f_1(y) \right) = \left(\pm \text{We} \left(\frac{1}{(R^* \pm h^*)^2} \frac{dh^*}{d\xi^*} + \frac{3}{\text{We}} \frac{d^3 h^*}{d\xi^{*3}} \right) + \right. \\ \left. + Z \left(\pm 1 \pm \frac{q^*}{h^{*3} f(y)} \right) \right) \left(\pm h^* + \frac{h^{*2}}{2R^*} \right), \\ q^* = 1 + c^* \left(\pm h^* + \frac{h^{*2}}{2R^*} - \left\langle \pm h^* + \frac{h^{*2}}{2R^*} \right\rangle \right), \quad y = 1 \pm \frac{h^*}{R^*}.$$

Здесь $\xi^* = \sqrt{3/\text{We}}(\xi/h_s)$; $\xi = z - ct$; $h^* = h/h_s$; $R^* = R/h_s$; $q^* = q/q_0$; $c^* = ch_s/q_0$; $h_s = (3\nu q_0/g)^{1/3}$; $\text{We} = (3\text{Fi}/\text{Re}^5)^{1/3}$; $Z = (81\text{Fi}/\text{Re}^{11})^{1/6}$; $\text{Re} = q_0/\nu$; $q_0 = \langle q \rangle = (1/\lambda) \int_0^\lambda q(\xi) d\xi$; λ — длина волны.

Исключая $q(\xi)$ (здесь и далее знак обезразмеривания опускаем) из первого уравнения (1.6), для определения $h(\xi)$ и c находим единственное уравнение. Для расчета $h(\xi)$ используем разложение в фурье-ряд:

$$(1.7) \quad h(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n \exp[i\alpha n \xi], \quad \bar{H}_{-n} = H_n$$

(черта означает комплексное сопряжение).

Учитывая первые $N/2$ гармоник в (1.7) и подставляя в уравнение, нетрудно получить систему $N + 1$ нелинейных алгебраических уравнений для определения двух вещественных (H_0 , c) и $N/2$ комплексных ($H_1, \dots, H_{N/2}$) неизвестных. В силу инвариантности уравнения (1.6) относительно преобразования $\xi^* \rightarrow \xi^* + \text{const}$ фаза одной из гармоник в (1.7) может считаться известной, например $\text{Image}(H_1) = 0$.

Для численного расчета алгебраической системы использован метод Ньютона. Для расчета фурье-гармоник нелинейных членов в (1.6) применялись псевдоспектральный метод и процедура быстрого фурье-преобразования.

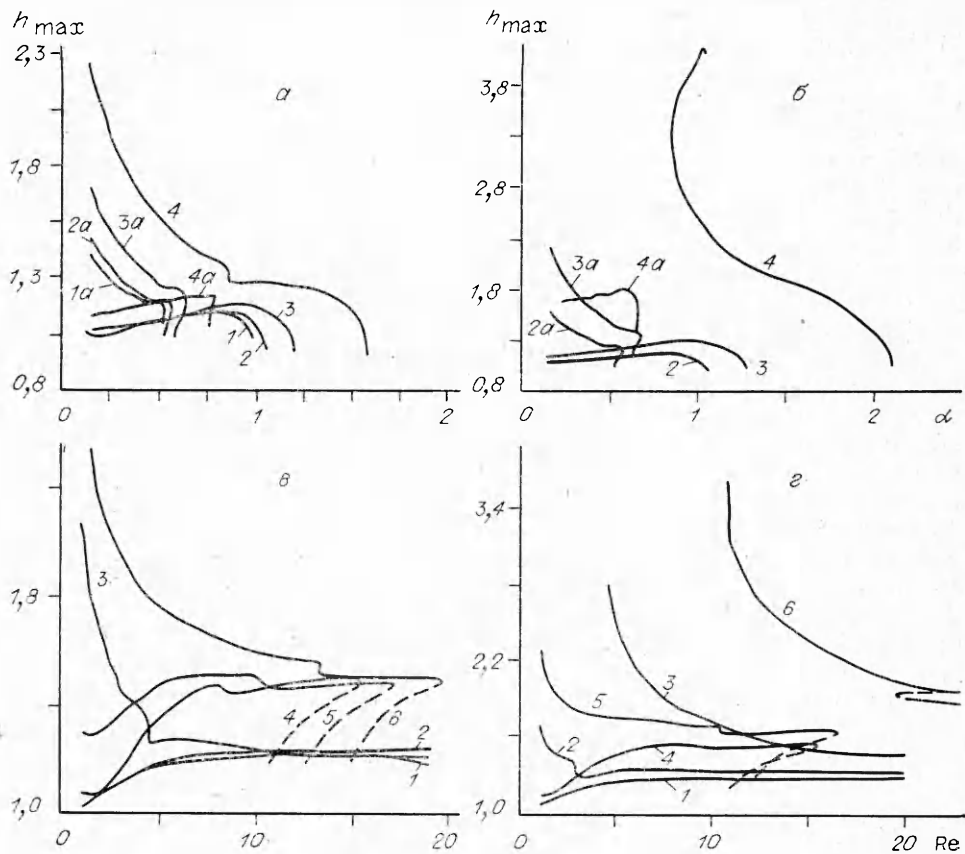
При обрывании ряда (1.7) в расчетах требовалось удовлетворение условия $|H_{N/2}|/\sup|H_n| < 10^{-3}$. Для этого значение N в зависимости от α , Re и Fi менялось в пределах от 16 до 128.

2. В уравнение (1.6) входят три внешних параметра: R , Z , We или R , Fi , Re . Отметим, что для стекания по вертикальной плоскости ($R \rightarrow \infty$) в (1.6) остается только один параметр Z . Кроме внешних параметров в задаче есть еще один внутренний — волновое число α . Внешние параметры имеют ясный физический смысл. Для интерпретации внутреннего параметра обратимся к экспериментам [1, 11]. Как в [11], так и в [1, 7] без специальной организации течения поверхность пленки была покрыта нерегулярными как в пространстве, так и во времени трехмерными волнами. При наложении малых по амплитуде импульсов на расход жидкости во входном сечении потока и при тщательном устранении пространственных шероховатостей стенки наблюдался участок регулярных в пространстве и стационарно бегущих во времени кольцевых волн. Периодичность волн определялась частотой наложенных пульсаций, но амплитуда не зависела от амплитуды наложенных колебаний. Меняя частоту ω ($\omega = c/\lambda = \alpha c/2\pi$), можно видеть различные волновые режимы для данного расхода жидкости. В [11] наблюдаемые волны авторы разделили на два класса — периодические и уединенные волны.

В теории главная трудность при нахождении решений уравнения (1.6) методом Ньютона заключается в определении хорошего начального приближения. Используя результаты расчета волн для вертикальной стенки [4, 5] и двигаясь по параметрам α , R , Fi , Re , мы рассчитали волновые режимы в широком диапазоне внешних параметров вплоть до самых малых значений α ($\sim 0,1$). Результаты расчета представлены на рис. 3—5. Так как в задаче много параметров, то детальное исследование провести трудно и основное внимание уделено качественным различиям между волновым стеканием вдоль вертикальной плоскости и вдоль внутренней или внешней стенок вертикального цилиндра.

Зависимости максимальной толщины волновой пленки h_{\max} от волнового числа α для стекания по проволочке и вдоль внутренней стенки цилиндра представлены на рис. 3, *a*, *b* соответственно. Здесь значения Re и Fi фиксированы: $Re = 4$, $Fi^{1/11} = 6,8$. Линии *1*, *1a*—*4*, *4a* отвечают $R^{-1} = 0; 0,05; 0,1; 0,2$. Линии *1*, *1a* на рис. 3, *a* отвечают стеканию вдоль вертикальной плоскости. Волновые решения в этом случае ответвляются от тривиального решения $h = 1$ в точке $\alpha = 1$ и продолжают в область линейной неустойчивости безволнового течения ($\alpha < 1$) [8]. Вплоть до $\alpha \approx 0,55$ волновой профиль толщины близок к синусоидальному и при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в последовательность уединенных волн — отрицательных солитонов [12]. Проведенное в [5, 6] сопоставление с экспериментальными результатами показало, что волны данного семейства (в дальнейшем 1-е семейство волн) количественно соответствуют наблюдаемым в экспериментах периодическим режимам. Длинные волны этого семейства неустойчивы [5] и качественно отличаются от наблюдаемых в экспериментах длинных волн.

В [13, 14] отмечено, что кроме 1-го семейства волн существуют еще множество различных однопараметрических семейств решений, появляющихся как от 1-го семейства, так и друг от друга в результате различных бифуркаций. Среди новых семейств выделенным в смысле устойчивости оказывается только одно семейство [14] (в дальнейшем 2-е), ответвляющееся от 1-го в результате бифуркации удвоения периода. Линия *1a* на рис. 3, *a* отвечает 2-му семейству, и, как показано в [4—6], режимы этого семейства количественно описывают наблюдаемые в экспериментах длинные волны, близкие к последовательности уединенных.



Р и с. 3

При стекании по внешней поверхности цилиндра конечного радиуса аналогично стеканию по вертикальной плоскости существуют как минимум два семейства волновых решений, имеющих пределом при $\alpha \rightarrow 0$ отрицательные уединенные волны ($|h_{\max} - \langle h \rangle| < |h_{\min} - \langle h \rangle|$, $\langle h \rangle$ — средняя по длине волны толщина) и положительные ($|h_{\max} - \langle h \rangle| > |h_{\min} - \langle h \rangle|$). Первая ветвь ответвляется от тривиального решения (линии 2—4 рис. 3, а), а вторая (линии 2а—4а рис. 3, а) — от соответствующего решения 1-го семейства с удвоением пространственного периода. Асимптотическое поведение волновых характеристик решений этих двух ветвей существенно различное. Так, при малых α значения h_{\max} решений ветви, имеющей пределом при $\alpha \rightarrow 0$ положительные уединенные волны (линии 1а—3а, 4 рис. 3, а), возрастают с уменьшением α , а значения h_{\max} решений ветви, имеющей пределом «отрицательные» уединенные волны (линии 1—3, 4а рис. 3, а), уменьшаются. Отметим также, что значения h_{\max} и других волновых характеристик меняются в существенно меньшем диапазоне для ветви, имеющей пределом «отрицательные» уединенные волны, чем значения этих характеристик для ветви, имеющей пределом положительные уединенные волны.

Существует одно качественное отличие стекания по проволочке достаточно малого радиуса от стекания по плоскости. При учете кривизны ветвь, имеющая пределом положительную уединенную волну, может сразу ответвиться от тривиального решения (линия 4 рис. 3, а) в отличие от стекания по плоскости, где такая ветвь рождается от волны 1-го семейства.

При стекании по внутренней поверхности вертикального цилиндра также наблюдается некоторое качественное сходство со стеканием по плоскости, но имеющееся различие более существенно. Так, для значений $R^{-1} < R_{\text{сг}}^{-1}(Re, Fi)$ существуют две ветви решений, имеющих пределом

при $\alpha \rightarrow 0$ положительную уединенную волну (линии 2а, 3а рис. 3, б) и отрицательную (линии 2, 3, 4а рис. 3, б). Для $R^{-1} > R_{cr}^{-1}$ ветвь, отходящая от тривиального решения, перестает существовать для $\alpha < \alpha_{cr}$ (линия 4 рис. 3, б). Амплитуда волны при приближении к точке α_{cr} быстро нарастает, и приходится брать существенно большее число гармоник ряда (1.7) для удовлетворения условия обрывания. Дальнейшее продвижение вдоль линии 4 рис. 3, б ограничено вычислительными возможностями. Величина h_{max} при этом близка к значению радиуса трубки, а минимальное значение толщины близко к нулю.

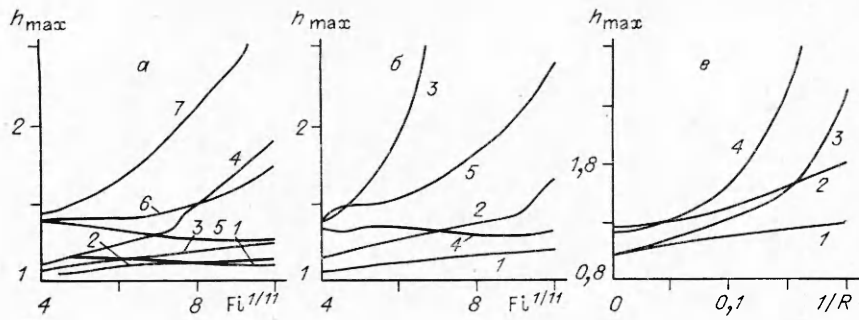
Таким образом, из результатов, представленных на рис. 3, а, б, можно сделать вывод, что для стекания пленки жидкости как по внешней поверхности вертикального цилиндра, так и по внутренней достаточно малой кривизны существуют как минимум две ветви, резко различающиеся по свойствам решений, области существования которых пересекаются при сравнительно малых волновых числах. Одна из ветвей в пределе $\alpha \rightarrow 0$ переходит в последовательность уединенных отрицательных волн, которые для течения вдоль вертикальной плоскости были неустойчивы [5]. Далее не будем рассматривать такие решения для цилиндра конечного радиуса ввиду их неустойчивости.

На рис. 3, в, г для некоторых волновых режимов с фиксированным α представлены зависимости максимальной толщины пленки h_{max} от Re для стекания по проволочке и по внутренней поверхности цилиндра соответственно. Здесь $Fi^{1/11} = 6,8$ и линии 1—3 отвечают волновым режимам с $\alpha = 0,8$, линии 4—6 — $\alpha = 0,3$ (длинные волны, имеющие пределом положительную уединенную волну). Линии 1, 4 рис. 3, в отвечают значению $R^{-1} = 0$; 1, 4 рис. 3, г — 0,05; 2, 5 рис. 3, в, г — 0,1; 3, 6 рис. 3, в, г — 0,2.

Отметим некоторые особенности в поведении представленных на рис. 3, в, г зависимостей для длинных волн (линии 4—6). Для них существуют точки возврата $Re_r(R^{-1})$ (зависимости на рис. 3 проведены после таких точек штриховыми линиями), после которых может произойти вырождение в соответствующую волну 1-го семейства утроенного периода (линии 4—6 рис. 3, в и 4, 5 рис. 3, г) либо существует вторая точка поворота (линия 6 рис. 3, г), отразившись от которой, зависимость вновь идет в область высоких чисел Рейнольдса. Аналогичные расчеты для длинных волн при других значениях α также показывают существование точек возврата. Для фиксированного значения R^{-1} на плоскости (α, Re) точки возврата формируют несколько линий $Re_*(\alpha)$. В зависимости от того, от какой линии происходит отражение, волна может вырождаться в соответствующее решение 1-го семейства удвоенного, утроенного и т. д. просторанственного периода. Численный расчет таких линий в достаточно широком диапазоне параметров Re, α является трудоемкой вычислительной задачей и в данной работе не проводится. Для стекания вдоль вертикальной плоскости линии возвратов представлены в [14].

Для достаточно малых значений R^{-1} (линии 1, 2, 4, 5 рис. 3, в, линии 1, 4 рис. 3, г) увеличение Re приводит к росту амплитуды волны, как это следует из рис. 3, в, г (участки штриховых линий не рассматриваются, так как режимы на них неустойчивы). Для значений R^{-1} , отвечающих линиям 3, 6 рис. 3, в и 3, 5, 6 рис. 3, г, увеличение Re приводит к обратному эффекту. При стекании по внутренней поверхности цилиндра достаточно малого радиуса с уменьшением Re происходит критический рост максимальной толщины пленки, как это следует из рис. 3, г.

На рис. 4, а, б представлены зависимости максимальной толщины пленки h_{max} от $Fi^{1/11}$ для стекания по проволочке и по внутренней поверхности цилиндра. Здесь $Re = 4$, линия 1 рис. 4, а отвечает волне с $\alpha = 0,9$ при $R^{-1} = 0$, линии 2—4 рис. 4, а и 1—3 рис. 4, б — волне с $\alpha = 1,0$ при $R^{-1} = 0,05; 0,1; 0,2$ соответственно. Линии 5—7 рис. 4, а и 4, 5 рис. 4, б отвечают волнам с $\alpha = 0,32$ и $0,4$ (длинные волны, имеющие пределом положительную уединенную волну) при $R^{-1} = 0,05; 0,1; 0,2$ соответственно.



Р и с. 4

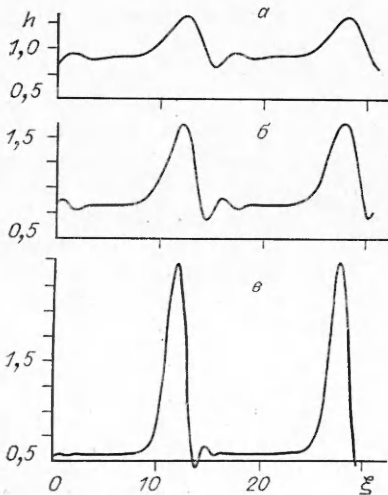
Из рис. 4, *a, б* видно, что в зависимости от кривизны стенок рост $Fi^{1/11}$ может вызывать как увеличение амплитуды волн (цилиндр малого радиуса), так и ее уменьшение. На рис. 4, *в* и 5 представлены максимальная толщина пленки h_{max} и некоторые характерные профили толщины как функции радиуса цилиндра. Здесь $Re = 4$ и $Fi^{1/11} = 6,8$, линии 1, 2 рис. 4, *в* отвечают волновым режимам с $\alpha = 1,0$ и $0,32$, стекающим по внешней поверхности цилиндра, линии 3, 4 рис. 4, *в* — режимам с $\alpha = 1,0$ и $0,4$, стекающим по внутренней поверхности цилиндра. На рис. 5, *a—в* режимы с $\alpha = 0,4$ отвечают стеканию по внутренней поверхности цилиндра при $R^{-1} = 0,05; 0,1; 0,15$ соответственно.

Из результатов, представленных на рис. 4, *в* и 5, следует, что увеличение кривизны стенок приводит к росту амплитуды волн. Для стекания по внутренней поверхности цилиндра для каждого α существует такое значение радиуса R_{cr} , что при приближении к нему происходит очень быстрый рост максимальной толщины.

Таким образом, рассмотрены различные волновые режимы стекания тонкого слоя вязкой жидкости вдоль внешней и внутренней поверхностей вертикального цилиндра. С использованием интегрального метода получена система уравнений, описывающая эволюцию длинноволновых возмущений. Показано, что в задаче имеются три внешних параметра: Re , Fi и R^{-1} . Исследована линейная устойчивость безволнового стекания и продемонстрировано количественное согласие с аналогичными результатами, найденными на основе асимптотического разложения решений уравнения Навье — Стокса. Безволновое стекание неустойчиво при всех значениях внешних параметров. Эволюция возмущений определяется гравитационной силой (накачка энергии), вязкими силами (сток энергии) и

силами поверхностного натяжения. Показано, что поверхностные силы, связанные с кривизной стенок, дестабилизируют и стремятся увеличить отклонение пленки от среднего значения в отличие от капиллярных сил, появляющихся при продольных вариациях толщины пленки. В результате эволюции могут формироваться стационарно бегущие режимы течения, которые и рассчитывались в работе. Основное внимание уделено качественным отличиям в поведении волновых характеристик режимов течения вдоль цилиндра от аналогичных зависимостей для течения вдоль вертикальной плоскости.

Расчеты показали, что для течения вдоль внешней поверхности вертикального цилиндра существуют, по крайней мере, два однопараметрических семейства



Р и с. 5

волн, для которых при фиксированных Re , Fi и R^{-1} параметром служит волновое число α . Волны этих семейств в пределе $\alpha \rightarrow 0$ переходят в последовательность либо отрицательных, либо положительных уединенных волн.

Для течения вдоль внутренней поверхности вертикального цилиндра семейство, имеющее пределом отрицательную уединенную волну, существует при всех значениях внешних параметров, а семейство, имеющее пределом положительную.— только при относительно малых значениях кривизны стенок. Для течения в трубке достаточно малого радиуса в расчетах обнаружен эффект «катастрофического» роста амплитуды установившихся волн при продвижении в область линейной неустойчивости гладкого решения.

Проанализировано влияние всех параметров на характеристики нелинейных волн и показано, что в зависимости от R^{-1} увеличение Re или уменьшение Fi могут вызывать как усиление волновых процессов, так и их уменьшение в отличие от стекания вдоль вертикальной плоскости, где это приводило к росту амплитуды волн. Увеличение R^{-1} всегда интенсифицирует волновые процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseenko S. V., Nakoryakov V. Ye., Pokusaev B. G. Wave formation on a vertical falling liquid film // *AIChE J.*— 1985.— V. 31, N 9.
2. Накоряков В. Е., Алексеев С. В., Покусаев Б. Г., Орлов В. В. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости // *ИФЖ.*— 1977.— Т. 33, № 3.
3. Vach P., Villadsen J. Simulation of the vertical flow of a thin wavy film using a finite-elements method // *Intern. J. Heat Mass Transf.*— 1984.— V. 27, N 5.
4. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке // *ПМТФ.*— 1985.— № 5.
5. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Стационарные двумерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости и их устойчивость // *ИФЖ.*— 1988.— Т. 54, № 1.
6. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1986.— № 3.
7. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеев С. В. Десорбция слаборастворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости // *Расчет тепломассообмена в энергетических процессах.*— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.
8. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1967.— № 1.
9. Демехин Е. А., Каплан М. А., Фойгель Р. А. Нелинейные волны в стекающем вязком слое магнитной жидкости // *Магнит. гидродинамика.*— 1988.— № 1.
10. Lin S. P., Liu W. C. Instability of film coating of wires and tubes // *AIChE J.*— 1975.— V. 21, N 4.
11. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // *ЖЭТФ.*— 1949.— Т. 19, № 2.
12. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1977.— № 1.
13. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых режимов в вязком слое // *ПММ.*— 1984.— Т. 48, № 4.
14. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О ветвлении стационарно бегущих волновых режимов вязкой пленки жидкости // *ПМТФ.*— 1988.— № 4.

г. Новосибирск

Поступила 26/VI 1991 г.

УДК 532.5 : 533.6

С. Е. Агеев

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ В СПУТНОМ ПОТОКЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

Расслоенные газожидкостные потоки благодаря широкой реализации в различных областях техники на протяжении многих лет являются предметом всестороннего изучения. Однако, несмотря на то что совместному перемещению жидкости и газа посвящено значительное число научных трудов [1—5], известные на сегодняшний день данные о взаимодействии

5 ПМТФ № 5, 1992 г.

65