

УДК 519.6, 551.46

Чувствительность функционалов к входным данным в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря*

В.П. Шутяев, Е.И. Пармузин

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119333

E-mails: victor.shutyaev@mail.ru (Шутяев В.П.), e.parmuzin@inm.ras.ru (Пармузин Е.И.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Шутяев В.П., Пармузин Е.И. Чувствительность функционалов к входным данным в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 97–112.

Рассматривается задача вариационного усвоения данных наблюдений для модели термодинамики моря с целью восстановления потоков тепла на поверхности с учетом ковариационных матриц ошибок входных данных. Исследована чувствительность функционалов от решения к входным данным в рассматриваемой задаче вариационного усвоения и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Балтийского моря.

DOI: 10.15372/SJNM20240108

EDN: DIFXSQ

Ключевые слова: *вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, чувствительность функционалов, модель термодинамики моря.*

Shutyaev V.P., Parmuzin E.I. Sensitivity of functionals to input data in a variational assimilation problem for the sea thermodynamics model // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 97–112.

A problem of variational data assimilation for a sea thermodynamics model is considered, with the aim to reconstruct sea surface heat fluxes taking into account the covariance matrices of input data errors. The sensitivity of some solution functionals to input data in this problem of variational assimilation is studied, and the results of numerical experiments for a model of dynamics of the Baltic Sea are presented.

Keywords: *variational data assimilation, optimal control, adjoint equations, sensitivity of functionals, sea thermodynamics model.*

1. Введение

В последние годы растущий интерес к проблемам усвоения данных наблюдений в математических моделях геофизической гидродинамики обусловлен значительным прогрессом в создании все более мощных вычислительных комплексов, развитием новых спутниковых и контактных измерительных технологий, а также новых методов и численных алгоритмов. Возможность анализа и обработки больших потоков информации

*Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20057, исследования в разделах 2–4), отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики ИВМ РАН (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2022-286).

и использования ее в моделях привела к постановке новых математических задач геофизической гидродинамики. Необходимость синтеза данных измерений и данных моделирования породила сложнейшие научные и технологические проблемы, связанные с усовершенствованием вычислительных методов моделирования и анализа природных явлений. Методы усвоения данных позволяют связать модельные расчеты с реальными данными для построения или уточнения неизвестных входных данных или параметров и повышения точности прогноза [1–9].

Наряду с исследованием разрешимости, разработкой и обоснованием алгоритмов численного решения задач вариационного усвоения данных наблюдений, важную роль играют свойства получаемых оценок (оптимальных решений). Чрезвычайно важным является вопрос устойчивости оценок и их функционалов (функций отклика) к неопределеностям входных данных (наблюдений, априорной информации, погрешностей моделей) [10–16]. В работе [16] проведено исследование чувствительности функционалов от оптимального решения задачи вариационного усвоения данных с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря при использовании ковариационных матриц ошибок данных наблюдений. Настоящая работа обобщает результаты работы [16] на случай исследования чувствительности функционалов от оптимального решения одновременно к данным наблюдений и к входным данным о потоке тепла в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря с использованием ковариационных матриц ошибок начального приближения. Входными данными о потоке тепла в данном случае является начальное приближение для неизвестного потока тепла (так называемый “фоновый” поток, или бэкграунд). С использованием свойств гессиана функции стоимости доказана теорема о представлении градиента функционала по отношению к данным наблюдений и данным начального приближения, сформулирован алгоритм вычисления градиента функционала и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН.

2. Задача вариационного усвоения данных для модели термодинамики моря

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде [17, 18]

$$\begin{aligned} T_t + (\bar{U}, \operatorname{grad})T - \operatorname{Div}(\hat{a}_T \operatorname{grad} T) &= f_T \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}), \\ T = T_0 &\quad \text{при } t = 0 \quad \text{в } D, \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q &\quad \text{на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\ \bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} &= \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \quad \text{на } \Gamma_{w,\text{op}} \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $T = T(x, y, z, t)$ — неизвестная функция температуры, $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset R^2$, $H = H(x, y)$ — функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ — суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T = \operatorname{diag}((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = \nu_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ — заданные функции. Скорости u , v , w зависят в общем случае от пространства и времени, а коэффициенты μ_T , ν_T предполагаются зависящими только от пространственных переменных на рассматриваемом интервале по времени. Граница

области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей Γ_S , $\Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,c}$, Γ_H , где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ — жидккая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ — твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H — дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [19, 20].

Задачу (2.1) можно записать в форме операторного уравнения в $(W_2^1(D))^*$

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ \quad \text{для п.в. } t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где равенство понимается в обобщенном смысле:

$$(T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) = F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}) \quad \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \tag{2.3}$$

а L , F , B определяются интегральными соотношениями:

$$\begin{aligned} (T_t, \hat{T}) &= \int_D T_t \hat{T} dD, \\ (LT, \hat{T}) &\equiv \int_D (-T \operatorname{Div}(\bar{U} \hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w,op}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \int_D \hat{a}_T \operatorname{grad} T \operatorname{grad} \hat{T} dD, \\ F(\hat{T}) &= \int_{\Gamma_{w,op}} \left(Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T \right) \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD, \\ (BQ, \hat{T}) &= \int_{\Omega} Q \hat{T} |_{z=0} d\Omega, \end{aligned}$$

при этом функции \hat{a}_T , Q_T , f_T , Q предполагаются достаточно гладкими, чтобы равенство (2.3) имело смысл.

Рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [16, 20]. Предположим, что в задаче (2.1) функция потока тепла $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ не известна. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{\text{obs}}(x, y, t)$ на $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ при $t \in (0, \bar{t})$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω , т. е. к $T|_{z=0}$. Считаем, что $T_{\text{obs}} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ и допускается случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega \times (0, \bar{t})$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0 . Вне этого подмножества для определенности считаем T_{obs} нулевой.

Будем предполагать, что данные наблюдений T_{obs} заданы с ошибками, а именно

$$T_{\text{obs}} = m_0 T^t |_{z=0} + \xi_{\text{obs}}, \tag{2.4}$$

где T^t — точное решение задачи (2.1) при некотором $Q = Q^t$:

$$\begin{aligned} T_t^t + LT^t &= F + BQ^t, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T^t &= T_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

а $\xi_{\text{obs}} \in Y_{\text{obs}} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ рассматривается как ошибка наблюдений. Предполагается, что ошибки ξ_{obs} случайны и распределены по нормальному закону (Гаусса) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $R \cdot = E[(\cdot, \xi_{\text{obs}})\xi_{\text{obs}}]$,

$R : Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$, где E — математическое ожидание. Ковариационные матрицы ошибок наблюдений играют важную роль при вариационном усвоении данных: обратные к ним матрицы включаются в качестве весовых операторов в исходный функционал стоимости [8]. В дальнейшем мы будем предполагать, что R положительно определен и, значит, обратим.

Рассмотрим следующую задачу вариационного усвоения данных: найти T и Q , такие что

$$\begin{cases} T_t + LT = F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T = T_0 \quad \text{при } t = 0, \\ J(Q) = \inf_Q J(Q), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} J(Q) = & \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (Q - Q^{(0)}) \mathcal{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) d\Omega dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt, \end{aligned}$$

$Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$ — заданная функция, $\mathcal{B} : Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$ — ковариационный оператор ошибок начального приближения. Функция $Q^{(0)}$ обычно выбирается в качестве начального приближения (бэкграунда) для неизвестного потока Q .

Далее будем предполагать, что функция $Q^{(0)}$ также задана с ошибками:

$$Q^{(0)} = Q^t + \xi_b,$$

где Q^t удовлетворяет точной задаче (2.5), а $\xi_b \in Y_b = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ рассматривается как ошибка бэкграунда. Предполагается, что ошибки ξ_b случайны и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $\mathcal{B}_b = E[(\cdot, \xi_b)\xi_b]$. Слагаемое с весовым оператором \mathcal{B}^{-1} в функционале $J(Q)$ играет роль регуляризации по Тихонову [21]. Если оператор \mathcal{B} положительно определен, то поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач [2], так как можно показать, что решение задачи (2.2) непрерывно зависит от потока Q (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

Необходимое условие оптимальности $\text{grad } J = 0$, которое определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных, приводит к системе оптимальности [2, 20]:

$$\begin{aligned} T_t + LT = & F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T = & T_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -(T^*)_t + L^* T^* = & BR^{-1} m_0 (B^* T - T_{\text{obs}}), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T^* = & 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{B}^{-1}(Q - Q^{(0)}) + B^* T^* = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (2.9)$$

где L^*, B^* — операторы, сопряженные к L и B , соответственно.

Схема аппроксимации исходной задачи минимизации J последовательностью задач минимизаций на временных подинтервалах была предложена в [4], см. также [20].

Входными данными в системе оптимальности (2.7)–(2.9) являются данные наблюдений T_{obs} и данные о начальном приближении для потока тепла $Q^{(0)}$. Нас будет интересовать чувствительность функционалов от оптимального решения к этим входным данным.

3. Чувствительность функционалов к входным данным

Введем обозначение $U = (Q^{(0)}, T_{\text{obs}})^\top$. Рассмотрим функцию $G(T)$, зависящую от T , которая предполагается вещественноненесущей и может рассматриваться как функционал на $X = L_2(D \times (0, \bar{t}))$. Нас интересует чувствительность функционала $G(T)$ к входным данным U при условии, что T получена после вариационного усвоения из системы оптимальности (2.7)–(2.9). Как известно [1, 22], чувствительность функционала к U определяется его градиентом по U , который связан с производной Гато:

$$\frac{dG}{dU} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial U}. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\delta U = (\delta Q^{(0)}, \delta T_{\text{obs}})^\top$ вариацию вектор-функции U , где $\delta Q^{(0)}, \delta T_{\text{obs}}$ — вариации функций T_{obs} и $Q^{(0)}$ соответственно. Из (2.7)–(2.9) получаем систему оптимальности для вариаций:

$$\begin{aligned} \delta T_t + L\delta T &= B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} -(\delta T^*)_t + L^*\delta T^* &= BR^{-1}m_0(B^*\delta T - \delta T_{\text{obs}}), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{B}^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^*\delta T^* = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (3.4)$$

Система (3.2)–(3.4) эквивалентна следующей задаче оптимального управления для определения $\delta T, \delta Q$:

$$\begin{cases} \delta T_t + L\delta T = B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T = 0 \quad \text{при } t = 0, \\ S(\delta Q) = \inf_Q S(Q), \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} S(\delta Q) &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} \left(\delta Q - \delta Q^{(0)} \right) \mathcal{B}^{-1} \left(\delta Q - \delta Q^{(0)} \right) d\Omega dt + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} \left(m_0 \delta T |_{z=0} - \delta T_{\text{obs}} \right) R^{-1} \left(m_0 \delta T |_{z=0} - \delta T_{\text{obs}} \right) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Справедлива следующая

Лемма. Гессиан \mathcal{H} функционала (3.6) определяется на $q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ последовательным решением задач

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= Bq, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* &= BR^{-1}m_0B^*\psi, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\mathcal{H}q = \mathcal{B}^{-1}q + B^*\psi^*. \tag{3.9}$$

Доказательство. Согласно системе оптимальности (3.2)–(3.4), градиент функционала (3.6) определяется по формуле

$$\operatorname{grad} S = \mathcal{B}^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^*\delta T^*, \tag{3.10}$$

где δT^* — решение сопряженной задачи (3.3). Продифференцируем последнюю формулу еще раз по δQ , чтобы получить гессиан

$$\mathcal{H}q = \mathcal{B}^{-1}q + B^*\psi^*,$$

где q — вариация δQ , а ψ^* — решение сопряженной задачи (3.8), которая есть не что иное, как продифференцированная задача (3.3). При этом ψ — решение задачи (3.7), которая получена из (3.2) дифференцированием по δQ . Лемма доказана. \square

Определим оператор $\mathcal{C} : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, действующий на функции $g \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле

$$\mathcal{C}g = B^*\theta^*, \tag{3.11}$$

где θ^* — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\theta^*)_t + L^*\theta^* &= BR^{-1}m_0g, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \theta^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Используя (3.7)–(3.12), нетрудно видеть [23], что система (3.2)–(3.4) эквивалентна уравнению для вариации оптимального решения δQ

$$\mathcal{H}\delta Q = P\delta U, \tag{3.13}$$

где $P = (\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{C})$. Гессиан \mathcal{H} действует в $L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ с областью определения $D(\mathcal{H}) = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, он ограничен, самосопряжен и неотрицательно определен. Из (3.7)–(3.9) следует, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}q, q) &= (\mathcal{B}^{-1}q + B^*\psi^*, q) = (\mathcal{B}^{-1}q, q) + (\psi^*, Bq) \\ &= (\mathcal{B}^{-1}q, q) + (BR^{-1}m_0B^*\psi, \psi) = (\mathcal{B}^{-1}q, q) + (R^{-1}m_0B^*\psi, B^*\psi) \geq (\mathcal{B}^{-1}q, q). \end{aligned}$$

Таким образом, если \mathcal{B}^{-1} — положительно определен, то и \mathcal{H} положительно определен. В последнем случае уравнение (3.13) имеет единственное решение

$$\delta Q = \mathcal{H}^{-1}P\delta U. \tag{3.14}$$

Формула (3.14) дает в явном виде выражение для вариаций оптимального решения δQ через вариации вектор-функции входных данных $\delta U = (\delta Q^{(0)}, \delta T_{\text{obs}})^\top$. Поскольку $\mathcal{H}^{-1}P\delta U = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}^{-1}\delta Q^{(0)} + \mathcal{H}^{-1}\mathcal{C}\delta T_{\text{obs}}$, то уравнение вида (3.14) может быть положено в основу исследования чувствительности оптимального решения и его функционалов к ошибкам входных данных $U = (Q^{(0)}, T_{\text{obs}})^\top$.

Справедлива

Теорема 3.1. Градиент функционала $G(T)$ по $U = (Q^{(0)}, T_{\text{obs}})^\top$ имеет вид

$$\nabla_U G = \left(\frac{\partial G}{\partial Q^{(0)}}, \frac{\partial G}{\partial T_{\text{obs}}} \right)^\top, \quad (3.15)$$

где

$$\frac{\partial G}{\partial Q^{(0)}} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \quad \frac{\partial G}{\partial T_{\text{obs}}} = \mathcal{C}^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = B^* \phi^*, \quad (3.16)$$

\mathcal{C}^* — оператор, сопряженный к \mathcal{C} , \mathcal{H} — гессиан, определенный формулами (3.7)–(3.9), а ϕ^* — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Доказательство. Рассмотрим значение градиента $\nabla_U G$ на вариации $\delta U = (\delta Q^{(0)}, \delta T_{\text{obs}})^\top$:

$$(\nabla_U G, \delta U) = \left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y, \quad (3.18)$$

где $\delta Q^{(0)}$ — вариация функции $Q^{(0)}$, δT_{obs} — вариация функции T_{obs} , $\delta T = \frac{\partial T}{\partial T} \delta U$ — решение системы (3.2)–(3.4).

Кроме того, заметим, что

$$(\nabla_U G, \delta U) = \left(\frac{\partial G}{\partial Q^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}} + \left(\frac{\partial G}{\partial T_{\text{obs}}}, \delta T_{\text{obs}} \right)_{Y_{\text{obs}}}. \quad (3.19)$$

Задача (3.17) является сопряженной по отношению к (3.2), поэтому, в силу соотношения сопряженности,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (\phi^*, B \delta Q)_Y = (B^* \phi^*, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}}. \quad (3.20)$$

Из (3.18), (3.20) получаем

$$(\nabla_U G, \delta U) = (B^* \phi^*, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}} = (\mathcal{F}, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}}, \quad (3.21)$$

где \mathcal{F} определяется по формуле (3.16).

Уравнение для δQ определяется формулой (3.14), отсюда

$$(\mathcal{F}, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}} = (\mathcal{F}, \mathcal{H}^{-1} P \delta U)_{Y_{\text{obs}}} = (P^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta U). \quad (3.22)$$

Таким образом, из (3.21), (3.22) имеем

$$(\nabla_U G, \delta U) = (P^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta U), \quad (3.23)$$

или

$$\nabla_U G = P^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}. \quad (3.24)$$

Поскольку $P^* = (\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{C}^*)^\top$, то из (3.19) и (3.24) получаем

$$\nabla_U G = \left(\frac{\partial G}{\partial Q^{(0)}}, \frac{\partial G}{\partial T_{\text{obs}}} \right)^\top = (\mathcal{B}^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \mathcal{C}^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F})^\top,$$

откуда следует утверждение теоремы. \square

4. Алгоритм вычисления градиента функционала

Пусть q — решение уравнения $\mathcal{H}q = \mathcal{F}$, тогда $q = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{F}$, а из (3.15) имеем

$$\nabla_U G = (\mathcal{B}^{-1}q, \mathcal{C}^*q)^\top. \quad (4.1)$$

Нетрудно убедиться в том [16], что сопряженный оператор $\mathcal{C}^* : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ определяется на $u \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле

$$\mathcal{C}^*q = m_0 R^{-1} B^* \phi, \quad (4.2)$$

где ϕ — решение задачи

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bq, & t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 & \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда, согласно (3.24), градиент $\nabla_U G$ имеет вид

$$\nabla_U G = (\mathcal{B}^{-1}q, m_0 R^{-1} B^* \phi)^\top. \quad (4.4)$$

Из (4.1)–(4.4) и (3.15)–(3.17) заключаем, что тем самым доказана

Теорема 4.1. Градиент $\nabla_U G$ функционала $G(T)$ по $U = (Q^{(0)}, T_{\text{obs}})^\top$ определяется последовательным выполнением следующих шагов:

1) решить сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, & t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 & \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

полагая

$$\mathcal{F} = B^* \phi^*;$$

2) найти q как решение уравнения с гессианом:

$$\mathcal{H}q = \mathcal{F}; \quad (4.6)$$

3) решить прямую задачу

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bq, & t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 & \text{при } t = 0; \end{aligned} \quad (4.7)$$

4) вычислить градиент функционала по формуле

$$\nabla_U G = (\mathcal{B}^{-1}q, m_0 R^{-1} B^* \phi)^\top. \quad (4.8)$$

Отметим, что в процессе отыскания градиента функционала нет необходимости вычислять обратный гессиан \mathcal{H}^{-1} , который фигурирует в (3.16), достаточно просто решить задачу $\mathcal{H}u = \mathcal{F}$ вида (4.6), например, итерационным методом.

Алгоритм (4.5)–(4.8) с учетом конкретного вида производных $\frac{\partial G}{\partial T}$ использовался при численных расчетах для оценки чувствительности функций отклика, связанных с температурой после усвоения данных наблюдений.

В численных примерах, следуя [16], рассматривались функции отклика как функционалы вида

$$G(T) = \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} F^*(x, y, t) T(x, y, 0, t) d\Omega, \quad (4.9)$$

где $F^*(x, y, t)$ — некая весовая функция, связанная с полем температуры на поверхности $z = 0$. Так, для определения средней температуры в избранной акватории океана ω при $z = 0$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ в качестве F^* выбирается функция

$$F^*(x, y, t) = \begin{cases} 1/(\tau \text{mes } \omega), & \text{если } (x, y) \in \omega, \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.10)$$

где $\text{mes } \omega$ означает площадь района ω . В этом случае функционал (4.9) представляется в виде

$$G(T) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_{\omega} T(x, y, 0, t) d\Omega \right). \quad (4.11)$$

С использованием обозначений, введенных выше, функционал (4.9) записывается в виде скалярного произведения:

$$G(T) = \int_0^{\bar{t}} (BF^*, T) dt = (BF^*, T)_Y, \quad Y = L_2(D \times (0, \bar{t})).$$

В силу того, что

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (BF^*, \delta T)_Y,$$

производная от G по T определяется по формуле

$$\frac{\partial G}{\partial T} = BF^*. \quad (4.12)$$

Таким образом, при реализации сформулированного выше алгоритма исследования чувствительности на первом шаге решается сопряженная задача

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= BF^*, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

которая в классической форме записи имеет вид

$$\begin{aligned} -\phi_t^* - \text{Div}(\bar{U} \phi^*) - \text{Div}(\hat{a}_T \text{grad } \phi^*) &= 0 \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при } t = T \quad \text{в } D, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$-\nu_T \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = F^* \quad \text{на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \Gamma_S \times (0, \bar{t}),$$

где функция F^* входит в граничное условие на поверхности моря Γ_S .

5. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились с использованием трехмерной численной модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН [24] на основе метода расщепления [25] и дополненной процедурой усвоения температуры поверхности моря (ТПМ) для восстановления тепловых потоков Q с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений и ошибок начального приближения. При проведении численных экспериментов были выбраны модификации граничных условий, согласно [25].

Модельная область Балтийского моря расположена от 9.375 в. д. до 30.375 в. д. и от 53.625 с. ш. до 65.9375 с. ш. Пространственное разрешение модели составляет $1/16 \times 1/32^\circ \times 25$ по долготе, широте и вертикали. Сеточная область в горизонтальной плоскости содержит 336×394 узлов, σ -уровни неравномерно распределены по глубине. Шаг по времени равен 5 мин.

В качестве T_{obs} использовались среднесуточные данные температуры поверхности Балтийского моря, полученные с портала океанографических данных Copernicus (<http://data.marine.copernicus.eu>). Среднесуточные поля ТПМ, обработанные в Датском метеорологическом институте на основе спутниковых данных инфракрасных радиометров [26], были проинтерполированы на расчетную сетку численной модели [27]. Данные наблюдений на 1 мая 2018 года, используемые в численном эксперименте, представлены на рисунке 1а. По многолетним данным наблюдений ТПМ с 1982 г. по 2017 г. были рассчитаны статистические характеристики ТПМ (математическое ожидание и дисперсии) отдельно для каждого года, согласно формулам, представленным в [28]. Полученные дисперсии брались в качестве диагональных элементов ковариационной матрицы ошибок наблюдений \mathcal{R} , которая используется в функционале стоимости. На рис. 2 а представлены результаты расчета диагональных элементов \mathcal{R} для 1 мая 2018 года.

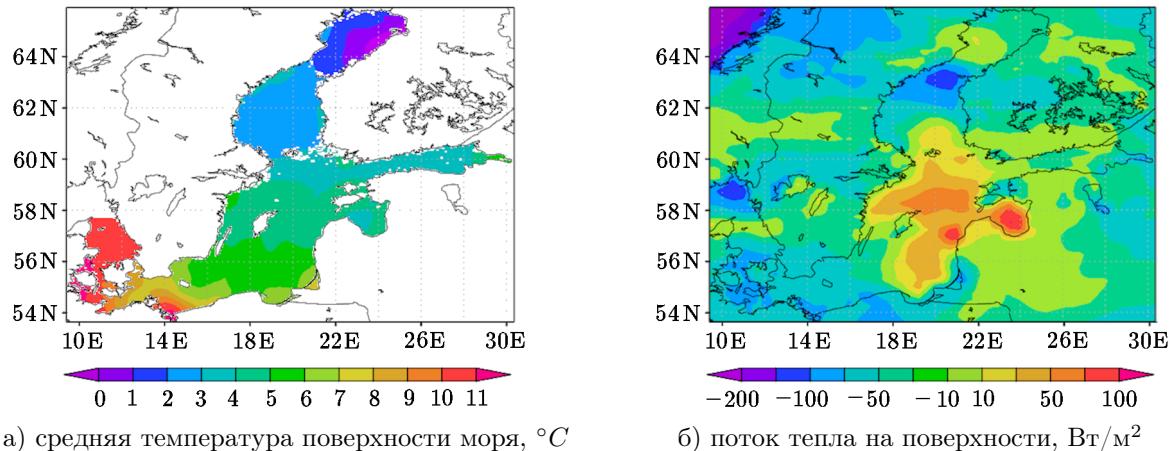


Рис. 1. Данные, используемые при расчетах

Для расчета атмосферного воздействия в модели использовались метеорологические характеристики, в том числе эмпирические формулы (так называемые “балк-формулы” [29]) для расчета турбулентных течений на поверхности моря. Рассчитанные таким же образом значения среднего климатического теплового потока $Q^{(0)}$ использовались в процедуре усвоения данных в качестве начального приближения (бэкграунда). Пример рассчитанного потока тепла на 1 мая 2018 года приведен на рис. 1б. Статистические характеристики ковариационных матриц ошибок начального приближения \mathcal{B} были по-

лучены на основе данных о потоках тепла на поверхности моря за период с 1979 г. по 2020 г. в соответствии с реанализом ERA5 [30], аналогично вычислениям для \mathcal{R} . На рис. 2б представлены результаты расчета диагональных элементов \mathcal{B} для 1 мая 2018 года.

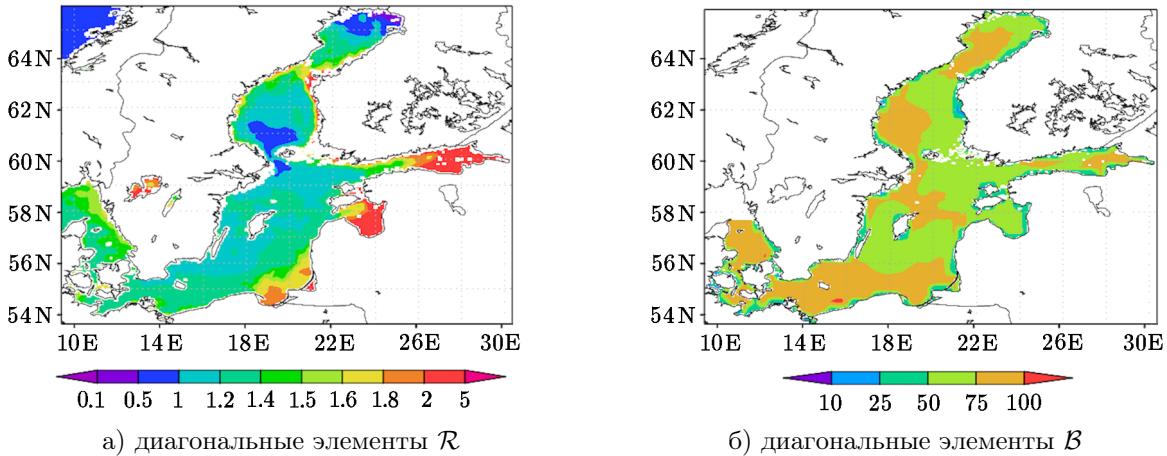


Рис. 2. Значения диагональных элементов ковариационных матриц

Используя модель гидротермодинамики Балтийского моря, дополненную процедурой усвоения температуры поверхности T_{obs} , были проведены численные расчеты на исследуемой акватории. Алгоритм усвоения работал лишь в некоторые моменты времени t_k , при этом $t_{k+1} = \bar{t} = t_k + \Delta t$. При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени (t_k, t_{k+1}) рассматривалась система вида (2.7)–(2.9) с диагональными ковариационными матрицами \mathcal{B} и \mathcal{R} .

Разработанный алгоритм (4.5)–(4.8) позволяет определять области наибольшего градиента функции отклика как средней по интервалу температуры поверхности океана для избранного района, полученной в результате процедуры усвоения. На основе представленного алгоритма была рассчитана чувствительность функционала к ошибкам входных данных с использованием ковариационных матриц ошибок данных наблюдений и ошибок бэкграунда. Результаты расчета градиента функционала по отношению к ошибкам данных наблюдений для 1 мая 2018 года представлены на рис. 3а. Согласно этим результатам, можно заключить, что северная часть Ботнического залива наиболее чувствительна к данным ошибкам с максимальным значением 5.0×10^{-2} . Отметим, что южная часть Ботнического залива и значительная область западного побережья Балтийского моря также чувствительны к ошибкам данных наблюдений. Интервал значений функции чувствительности здесь от 0.5×10^{-2} до 1.0×10^{-2} . Финский залив и юго-восточная часть Балтийского моря, согласно проведенным расчетам, является, наоборот, наименее чувствительной областью. Здесь значения градиента функции отклика около 1.0×10^{-3} , т. е. на порядок меньше, чем в областях с большей чувствительностью.

На рис. 3б аналогичным образом рассчитана чувствительность рассматриваемого функционала к ошибкам бэкграунда на 1 мая 2018 года. Заметим, что в данном случае чувствительность на 4 порядка меньше, чем в предыдущем случае, с максимальными значениями около 3.0×10^{-6} . Легко заметить из рисунка, что наибольшая чувствительность функционала к ошибкам бэкграунда прослеживается у побережья Балтийского моря, особенно в южной и восточной частях моря. Наименьшая чувствительность к ошибкам бэкграунда наблюдается в южной части Ботнического залива, здесь она составляет 5.0×10^{-8} , что на 2 порядка меньше максимального значения.

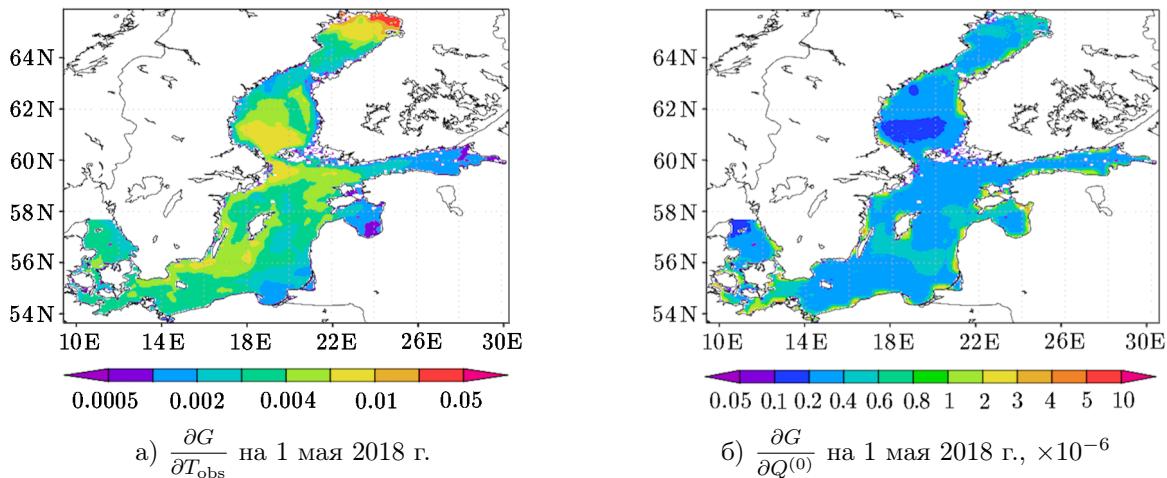


Рис. 3. Градиент функционала $G(T)$

Из рисунков 3 а и 3 б следует, что в целом чувствительность рассматриваемого функционала к данным бэкграунда намного меньше, чем чувствительность к данным наблюдений.

Эти результаты подтверждаются прямыми вычислениями функционала $G(T)$, в соответствии с (4.11), полученного после вариационного усвоения, путем введения возмущений в данные наблюдений T_{obs} и в начальное приближение $Q^{(0)}$, следя за работе [16].

Таким образом, сформулированный алгоритм (4.5)–(4.8) позволяет оценивать чувствительность функционалов, связанных с температурой поверхности моря после усвоения, по отношению к ошибкам данных наблюдений и ошибкам начального приближения в случае, когда значения этих ошибок заранее не известны.

6. Заключение

В настоящей работе проведено исследование чувствительности функционалов от решения задачи вариационного усвоения к входным данным для модели термодинамики моря с целью восстановления потоков тепла на поверхности. Разработанный алгоритм позволяет вычислять градиенты функционалов от оптимального решения, полученного в ходе усвоения, одновременно по отношению к данным наблюдений и к данным начального приближения для потока тепла. Вычисление полного градиента функционала требует однократного решения уравнения с гессианом функции стоимости и решения прямой и сопряженной задач, при этом вычисления обратного гессиана не требуется. В результате применения данного алгоритма можно определять области наибольшего градиента функции отклика как средней по интервалу температуры поверхности океана для избранного района, полученной в результате процедуры усвоения. Численные эксперименты для модели динамики Балтийского моря подтверждают работоспособность предложенного алгоритма. Проведенные исследования могут быть полезны для определения районов моря, в которых функционалы от оптимального решения наиболее чувствительны к произвольным возмущениям во входных данных при использовании процедуры вариационного усвоения, в том числе в случаях, когда значения этих возмущений заранее не известны. Методология оценки градиентов функций отклика может быть использована в проблеме оптимального размещения сенсоров и станций наблюдений для решения практических задач вариационного усвоения данных.

Благодарности. Авторы глубоко благодарны рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить представление результатов и изложение материала в статье.

Литература

1. **Marchuk G.I.** Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems.— Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. **Lions J.L.** Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles.— Paris: Dunod, 1968.
3. **Sasaki Y.K.** An objective analysis based on the variational method // J. Meteorol. Soc. Japan. Ser. II.— 1958.— Vol. 36.— P. 77–88.
4. **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
5. **Пененко В.В., Образцов Н.Н.** Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // Метеорология и гидрология.— 1976.— № 11.— С. 1–11.
6. **Le Dimet F.-X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus.— 1986.— Vol. 38A, № 2.— P. 97–110.
7. **Агошков В.И.** Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики.— М.: ИВМ РАН, 2003.
8. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., Vidard A.** NEMOVAR: A variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Technical Memorandum.— 2009.— № 120.— P. 17–21.
9. **Пененко А.В.** Математическое моделирование процессов адvection–диффузии–реакции с усвоением данных наблюдений и решением обратных задач: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук: 05.13.18.— Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2021.
10. **Le Dimet F.-X., Ngodock H.E., Luong B., Verron J.** Sensitivity analysis in variational data assimilation // J. Meteorol. Soc. Japan. Ser. II.— 1997.— Vol. 75, iss. 1B.— P. 245–255.
11. **Le Dimet F.-X., Navon I.M., Daescu D.N.** Second-order information in data assimilation // Month. Wea. Rev.— 2002.— Vol. 130, № 3.— P. 629–648.
12. **Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics.— 2005.— Vol. 12.— P. 481–490.
13. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput.— 2008.— Vol. 30, № 4.— P. 1847–1874.
14. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys.— 2010.— Vol. 229.— P. 2159–2178.
15. **Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Quartely J. Royal Meterological Society.— 2013.— Vol. 139, iss. 676.— P. 1826–1841.
16. **Шутяев В.П., Пармузин Е.И.** Чувствительность функционалов к данным наблюдений в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2019.— Т. 22, № 2.— С. 229–242.
17. **Алексеев В.В., Залесный В.Б.** Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы.— М.: Наука, 1993.— С. 232–253.
18. **Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.** Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
19. **Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., Oleinikov R.V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.— 2007.— Vol. 22, № 2.— P. 133–161.

20. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Численный алгоритм вариационной асимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Журн. вычисл. матем и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1371–1391.
21. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
22. Cacuci D.G. Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. — 1981. — Vol. 22. — P. 2803–2812.
23. Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. — М.: Наука, 2001.
24. Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., Aps R. Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 85–100.
25. Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I. et al. Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2010. — Vol. 25, № 6. — P. 581–609.
26. Hoyer J.L., Karagali I. Sea surface temperature climate data record for the North Sea and Baltic Sea // J. Climate. — 2016. — Vol. 29. — P. 2529–2541.
27. Zakharova N.B. Verification of the sea surface temperature observation data // Current Problems in Remote Sensing of the Earth from Space. — 2016. — Vol. 13. — P. 106–113.
28. Шутяев В.П., Пармузин Е.И. Устойчивость оптимального решения задачи вариационного усвоения с ковариационными матрицами ошибок данных наблюдений для модели термодинамики моря // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 221–236.
29. Дианский Н.А. Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. — М.: Физматлит, 2013.
30. Hersbach H., Bell B., Berrisford P. et al. The ERA5 global reanalysis // Quartely J. Royal Meterological Society. — 2020. — Vol. 146, iss. 730. — P. 1999–2049. — DOI: 10.1002/qj.3803.

Поступила в редакцию 5 июня 2023 г.
После исправления 12 сентября 2023 г.
Принята к печати 27 октября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. Marchuk G.I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. Lions J.L. Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles. — Paris: Dunod, 1968.
3. Sasaki Y.K. An objective analysis based on the variational method // J. Meteorol. Soc. Japan. Ser. II. — 1958. — Vol. 36. — P. 77–88.
4. Penenko V.V. Metody chislennogo modelirovaniya atmosfernykh processov. — L.: Gidrometeoizdat, 1981.
5. Penenko V.V., Obrazcov N.N. Variacionnyi metod soglasovaniya polei meteorologicheskikh elementov // Meteorologiya i gidrologiya. — 1976. — № 11. — S. 1–11.
6. Le Dimet F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus. — 1986. — Vol. 38A, № 2. — P. 97–110.
7. Agoshkov V.I. Metody optimal'nogo upravleniya i sopryazhennykh uravnenii v zadachakh matematicheskoi fiziki. — M.: IVM RAN, 2003.

8. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., Vidard A.** NEMOVAR: A variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Technical Memorandum. — 2009. — № 120. — P. 17–21.
9. **Penenko A.V.** Matematicheskoe modelirovaniye processov advektsii–diffuzii–reakcii s usvoeniem dannykh nablyudenii i resheniem obratnykh zadach: Diss. ... dokt. fiz.-matem. nauk: 05.13.18. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2021.
10. **Le Dimet F.-X., Ngodock H.E., Luong B., Verron J.** Sensitivity analysis in variational data assimilation // J. Meteorol. Soc. Japan. Ser. II. — 1997. — Vol. 75, iss. 1B. — P. 245–255.
11. **Le Dimet F.-X., Navon I.M., Daescu D.N.** Second-order information in data assimilation // Month. Wea. Rev. — 2002. — Vol. 130, № 3. — P. 629–648.
12. **Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2005. — Vol. 12. — P. 481–490.
13. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput. — 2008. — Vol. 30, № 4. — P. 1847–1874.
14. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys. — 2010. — Vol. 229. — P. 2159–2178.
15. **Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Quartely J. Royal Meterological Society. — 2013. — Vol. 139, iss. 676. — P. 1826–1841.
16. **Shutyaev V.P., Parmuzin E.I.** Chuvstvitel'nost' funkcionalov k dannym nablyudenii v zadache variacionnogo usvoeniya dlya modeli termodinamiki morya // Sib. zhurn. vychisl. matem. / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2019. — T. 22, № 2. — S. 229–242.
17. **Alekseev V.V., Zalesnyi V.B.** Chislenaya model' krupnomasshtabnoi dinamiki okeana // Vychislitel'nye processy i sistemy. — M.: Nauka, 1993. — S. 232–253.
18. **Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesnyi V.B.** Matematicheskie modeli v geofizicheskoi gidrodinamike i chislenyye metody ikh realizacii. — L.: Gidrometeoizdat, 1987.
19. **Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., Oleinikov R.V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2007. — Vol. 22, № 2. — P. 133–161.
20. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** CHislennyi algoritm variacionnoi assimiliyacii dannykh nablyudenii o temperature poverkhnosti okeana // Zhurn. vychisl. matem i mat. fiziki. — 2008. — T. 48, № 8. — S. 1371–1391.
21. **Tikhonov A.N.** O reshenii nekorrektno postavленных задач и методе регуляризации // DAN SSSR. — 1963. — T. 151, № 3. — S. 501–504.
22. **Cacuci D.G.** Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. — 1981. — Vol. 22. — P. 2803–2812.
23. **Shutyaev V.P.** Operatory upravleniya i iteracionnye algoritmy v zadachakh variacionnogo usvoeniya dannykh. — M.: Nauka, 2001.
24. **Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., Aps R.** Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 85–100.
25. **Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I. et al.** Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2010. — Vol. 25, № 6. — P. 581–609.
26. **Hoyer J.L., Karagali I.** Sea surface temperature climate data record for the North Sea and Baltic Sea // J. Climate. — 2016. — Vol. 29. — P. 2529–2541.
27. **Zakharova N.B.** Verification of the sea surface temperature observation data // Current Problems in Remote Sensing of the Earth from Space. — 2016. — Vol. 13. — P. 106–113.

28. **Shutyaev V.P., Parmuzin E.I.** Ustoichivost' optimal'nogo resheniya zadachi variacionnogo usvoeniya s kovariacionnymi matricami oshibok dannykh nablyudenii dlya modeli termodinamiki morya // Sib. zhurn. vychisl. matem. / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — T. 21, № 2. — S. 221–236.
29. **Diansky N.A.** Modelirovaniye cirkulyacii okeana i issledovaniye ego reakcii na korotkoperiodnye i dolgoperiodnye atmosfernye vozdeistviya. — M.: Fizmatlit, 2013.
30. **Hersbach H., Bell B., Berrisford P. et al.** The ERA5 global reanalysis // Quartely J. Royal Meterological Society. — 2020. — Vol. 146, iss. 730. — P. 1999–2049. — DOI: 10.1002/qj.3803.