

УДК 539.3

## ВНЕДРЕНИЕ В ТОНКИЙ ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА С ПЛОСКИМ ШЕРОХОВАТЫМ ОСНОВАНИЕМ

И. Г. Горячева, А. А. Яковенко

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия  
E-mails: goryache@ipmnet.ru, anastasiya.yakovenko@phystech.edu

Исследовано взаимодействие с тонким вязкоупругим слоем жесткого цилиндра, контактирующая торцевая поверхность которого номинально плоская, но обладающая микро-рельефом. Микро-рельеф моделируется периодической системой осесимметричных инденторов. Использование подхода, основанного на рассмотрении микро- и макромасштабных уровней, позволило получить аналитические выражения для глубины внедрения и фактической площади контакта. Исследовано влияние параметров микрогеометрии поверхности штампа и механических свойств слоя на зависимости глубины внедрения и фактической площади области контакта от времени.

Ключевые слова: микро-рельеф, индентирование, вязкоупругий слой, фактическая область контакта.

DOI: 10.15372/PMTF20210503

**Введение.** Предположение о гладкости поверхностей контактирующих тел, принимаемое в классической постановке контактных задач, на практике не реализуется. В действительности все тела обладают микро-рельефом, поэтому контакт происходит не во всей номинально плоской области взаимодействия, а в дискретных областях (фактической области контакта). Многие важные характеристики трибосопряжений, такие как сила трения, жесткость соединений, электро- и теплопроводность, скорость износа, зависят от фактической площади контактного взаимодействия. Поэтому учет поверхностного микро-рельефа имеет большое практическое значение.

В настоящее время для решения контактных задач для упругих тел с учетом микрогеометрии контактирующих поверхностей разработаны различные численные и аналитические подходы. При этом исследованию контактных задач для вязкоупругих тел с учетом шероховатости их поверхностей посвящено небольшое количество работ, несмотря на то что учет релаксационных свойств, которыми обладают различные материалы, является существенным. Одним из широко распространенных методов расчета контактных характеристик взаимодействия шероховатых упругих и вязкоупругих тел является численное моделирование [1–3]. При этом учитываются не только форма взаимодействующих поверхностей и взаимное влияние пятен контакта, но и такие эффекты, как адгезия и относительное проскальзывание в области контакта [3]. Однако результаты, полученные

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-19-00574-П).

© Горячева И. Г., Яковенко А. А., 2021

численными методами, сложно использовать для оценки влияния параметров микрогеометрии поверхностей на характеристики контактного взаимодействия. Поэтому помимо численных методов актуальными остаются аналитические подходы, основанные на различных предположениях и допущениях. В работе [4] для учета влияния микрогеометрии поверхности контактирующих тел на контактные характеристики на макроуровне предложено ввести в уравнение для определения контактных давлений дополнительную функцию, описывающую податливость шероховатого слоя. В модели Гринвуда — Вильямсона [5] шероховатость моделируется набором сферических выступов, упругие деформации которых определяются теорией Герца. Для вязкоупругих материалов аналогичный подход применен в [6]. В работе [7] с использованием теории осреднения исследована задача о контакте с упругим полупространством штампа, контактирующая поверхность которого имеет мелкозернистую форму. Моделирование номинально плоской области контакта шероховатых вязкоупругих тел с использованием методов фрактальной геометрии проведено в [8]. В [9] разработан подход к изучению контакта вязкоупругих шероховатых тел на различных масштабных уровнях, основанный на использовании вероятностных методов.

В данной работе исследуется внедрение жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием в вязкоупругий слой с использованием метода изучения взаимодействия упругих шероховатых тел на двух масштабных уровнях [10]. При этом рассматривается как задача о дискретном контакте (микроуровень), так и задача о взаимодействии тел на макроуровне с учетом микрорельефа контактирующих поверхностей.

**1. Постановка задачи.** Исследуется внедрение жесткого шероховатого цилиндра с плоским основанием радиусом  $R$  в вязкоупругий слой малой толщины  $h$  (при малых значениях параметра  $\lambda = h/R$ ), лежащий на жестком основании, при действии ступенчатой нагрузки  $P(t) = P_0H(t)$ , где  $H(t)$  — функция Хевисайда. Шероховатость моделируется системой одинаковых неровностей, форма поверхности которых описывается функцией  $f(r) = Cr^n/R_a^{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $R_a$  — величина, характеризующая размер выступа;  $C$  — безразмерная константа) и которые равномерно распределены с заданной плотностью на контактирующей поверхности цилиндра. Задача рассматривается в следующих двух масштабах (рис. 1):

- 1) масштаб микроуровня, соответствующий размеру отдельного пятна контакта, характеризуемого его радиусом  $a$ , при этом  $a \ll h$  и  $a \ll R$ ;
- 2) масштаб макроуровня, соответствующий радиусу  $R$  номинально плоской области контакта (радиусу цилиндра).

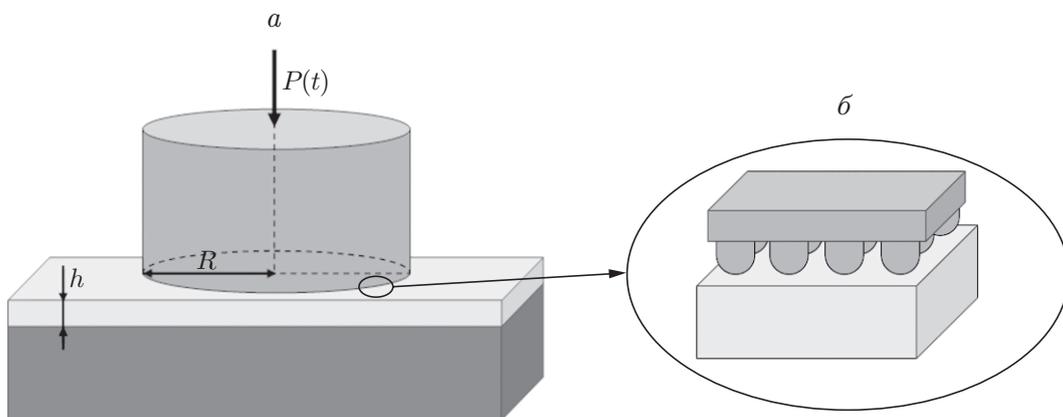


Рис. 1. Схема контактной задачи на макроуровне (а) и микроуровне (б)

Данный подход является обобщением разработанного в [10] метода решения задач о внедрении жестких шероховатых тел в упругий слой или упругое полупространство на случай вязкоупругих материалов.

**2. Решение контактной задачи на микроуровне.** Ниже решается на микроуровне задача о внедрении цилиндра с шероховатым основанием в вязкоупругое полупространство.

2.1. *Постановка задачи о дискретном контакте и сведение ее к соответствующей задаче для упругого полупространства.* С учетом принятых предположений о размере одиночного пятна контакта ( $a \ll R$  и  $a \ll h$ ) на микроуровне рассматривается периодическая контактная задача о внедрении бесконечной системы одинаковых инденторов, моделирующих микрогеометрию контактирующей поверхности цилиндра, в вязкоупругое полупространство. Считается, что коэффициент Пуассона материала полупространства не зависит от времени, т. е.  $\nu = \text{const}$ . На периодическую систему действует номинальное (осредненное по площади) давление  $\bar{p}(t)$ , которое связано с нагрузкой  $P_a(t)$ , приложенной к каждому индентору, соотношением

$$\bar{p}(t) = \bar{N}P_a(t), \quad (1)$$

где  $\bar{N}$  — среднее число выступов на единице площади. В системе координат, связанной с центром произвольного пятна контакта  $\omega_i(t)$ , условие контакта записывается следующим образом:

$$w(x, y, t) = D(t) - f(x, y)H(t), \quad (x, y) \in \omega_i(t). \quad (2)$$

Здесь  $w(x, y, t) = u_z(x, y, 0, t)$  — вертикальное смещение границы вязкоупругого полупространства;  $D(t)$  — глубина внедрения;  $f(x, y)$  — функция, описывающая форму контактирующей поверхности индентора.

Покажем, что данная задача сводится к аналогичной задаче в упругой постановке [11]. При внедрении в полупространство периодической системы инденторов давления  $p_i(x, y, t)$  на каждом пятне контакта  $\omega_i(t)$  одинаковы. С использованием выражения, определяющего вертикальные смещения границы вязкоупругого полупространства под действием заданного давления [12], и с учетом принципа суперпозиции функция перемещений  $w(x, y, t)$  принимает вид

$$w(x, y, t) = \frac{1 - \nu^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \iint_{\omega_i(\tau)} \frac{p_i(x', y', \tau) dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \right) d\tau, \quad (3)$$

где  $J(t)$  — функция ползучести материала полупространства. Контактная поверхность инденторов описывается гладкой функцией, поэтому контактное давление равно нулю на границе каждой контактной области  $\omega_i(t)$ . Если далее  $\omega_i(t)$  является неубывающей функцией времени и давление вне области контакта равно нулю, можно в (3) поменять местами знаки интегрирования по времени и координате. В результате получаем

$$w(x, y, t) = \frac{1 - \nu^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{\omega_i(t)} \frac{q_i(x, y, t) dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}, \quad (4)$$

где

$$q_i(x, y, t) = \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial p_i(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5)$$

Функции  $p_i(x, y, t)$  удовлетворяют также условию равновесия

$$P_a(t) = \iint_{\omega_i(t)} p_i(x, y, t) dx dy. \quad (6)$$

С учетом (1), (5), (6) введем величину среднего давления

$$\bar{q}(t) = \bar{N} \iint_{\omega_i(t)} q_i(x, y, t) dx dy = \bar{N} \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial P_a(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial \bar{p}(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (7)$$

Если рассматривать  $t$  в качестве параметра, то математическая формулировка периодической контактной задачи для вязкоупругого полупространства, включающая уравнения (4), (6) и граничное условие (2), совпадает с формулировкой аналогичной задачи в упругой постановке при замене контактного давления функцией (5).

**2.2. Решение задачи о дискретном контакте для упругого полупространства.** Для решения периодической контактной задачи для сферических инденторов и упругого полупространства используется метод локализации [10], основанный на решении задачи о внедрении в полупространство одиночного индентора при наличии дополнительной нагрузки вне области контакта, полученном в работе [13]. Аналогичным способом строится решение периодической контактной задачи для системы инденторов, которые внедряются в упругое полупространство и поверхность которых описывается степенной функцией вида  $f(r) = Cr^n/R_a^{n-1}$ .

Согласно методу локализации при исследовании взаимодействия с полупространством отдельного индентора учитывается распределение фактических давлений только на соседних инденторах, влияние остальных инденторов заменяется действием номинального давления, распределенного за пределами окружности определенного радиуса. Точность метода зависит как от количества инденторов, на которых учитываются реальные распределения давлений (заранее неизвестные), так и от плотности их расположения. Далее исследуется простейший случай, когда рассматривается только один индентор, а действие остальных инденторов заменяется номинальным давлением  $\bar{p}$ , равномерно распределенным в области  $r > A$ , что накладывает определенные ограничения на минимальные расстояния между инденторами, моделирующими неровности поверхности. Так как инденторы распределены на поверхности полупространства равномерно, радиус круговой области  $A$  определяется только количеством  $\bar{N}$  инденторов на единице площади:

$$A^2 = 1/(\pi\bar{N}). \quad (8)$$

Таким образом, граничное условие задачи в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} w(r) &= D - f(r), \quad r \leq a, \\ p(r) &= 0, \quad a \leq r \leq A, \quad p(r) = \bar{p}, \quad r > A, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a$  — радиус области контакта. Контактное давление  $p(r)$  удовлетворяет следующему условию равновесия:

$$P_a = 2\pi \int_0^a rp(r) dr. \quad (10)$$

С учетом известной зависимости вертикальных смещений  $w(r)$  границы упругого полупространства от действующих на нее давлений в осесимметричном случае [4] и граничных

условий (9) получаем

$$w(r) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left( \int_0^a p(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho} + \right. \\ \left. + \bar{p} \int_0^\infty K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho} - \bar{p} \int_0^A K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho} \right), \quad (11)$$

где  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл первого рода; второй интеграл в скобках определяет смещение границы полупространства, нагруженного по всей поверхности номинальным давлением; для третьего интеграла в скобках известно значение:

$$\int_0^A K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho} = AE\left(\frac{r}{A}\right), \quad r \leq A,$$

$E(x)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Из граничных условий (9) и выражения (11) для  $r \leq a$  получаем интегральное уравнение для определения контактного давления

$$d - h(r) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^a p(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho}, \quad r \leq a, \quad (12)$$

где функции  $d$  и  $h(r)$  определяются выражениями

$$d = D - \frac{4(1-\nu^2)\bar{p}}{\pi E} \int_0^\infty K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho d\rho}{r+\rho}; \quad (13)$$

$$h(r) = f(r) - \frac{4(1-\nu^2)A}{\pi E} E\left(\frac{r}{A}\right)\bar{p}. \quad (14)$$

Функция  $d$  зависит от номинального давления и определяет величину дополнительного смещения [10], т. е. разность перемещений границ тела с шероховатой поверхностью, характеризующейся формой отдельного выступа и плотностью расположения выступов, и тела с гладкой плоской поверхностью. Функция  $h(r)$  — величина зазора между индентором и искривленной поверхностью упругого полупространства, возникающей в результате действия номинального давления вне круга радиусом  $A$ .

Решение интегрального уравнения (12) в общем виде приведено в [4, 10]. Подставляя в это решение функцию  $h(r)$  (14), получаем выражения для контактного давления и глубины внедрения  $d$

$$p(r) = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \left( \frac{Cp_{k(m)}(r)}{R_a^{n-1}} + \frac{2(1-\nu^2)\bar{p}}{E} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{A^2-a^2}} \right) \right), \quad r \leq a; \quad (15)$$

$$d = \frac{2^{n-2}n\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n)} \frac{Ca^n}{R_a^{n-1}} - 2(1-\nu^2)\bar{p}\sqrt{A^2-a^2}, \quad (16)$$

где

$$p_k(r) = \left( \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \right)^2 r^{2k} \left( \operatorname{arch} \left( \frac{a}{r} \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2} \sum_{i=1}^k \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \left( \frac{a}{r} \right)^{2k} \right) \quad (17)$$

для нечетных степеней, т. е. для  $n = 2k + 1$  ( $k$  — целое число),

$$p_m(r) = \left( \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} \right)^2 a^{2m-1} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2} \sum_{i=1}^m \frac{(2i-3)!!}{(2i-2)!!} \left( \frac{r}{a} \right)^{2(m-i)} \quad (18)$$

для четных степеней, т. е. для  $n = 2m$  ( $m$  — натуральное число);  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Подставляя (15) в условие равновесия (10) и используя (1), (8), имеем следующее уравнение, связывающее радиус области контакта и номинальное давление:

$$\frac{(n+1)\Gamma(n)R_a^{n-1}}{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)C} \frac{(1-\nu^2)\bar{p}}{E} = \frac{a^{n+1}}{A^2 \arccos(a/A) + a\sqrt{A^2 - a^2}}. \quad (19)$$

**2.3. Решение задачи о дискретном контакте для вязкоупругого полупространства.** В случае вязкоупругого полупространства с мгновенным модулем упругости  $E_0$  из выражений (15)–(19) определяются значения радиуса пятна контакта, величины дополнительного смещения и распределения контактного давления в начальный момент времени  $t = 0$ . При подстановке в (15)–(19) длительного модуля  $E_\infty$  (если модель вязкоупругого материала имеет конечный длительный модуль упругости) получаем значения контактных характеристик на больших временах. Правая часть выражения (19) представляет собой монотонно возрастающую функцию радиуса области контакта. Поэтому в случае постоянного номинального давления, так как  $E_0 > E_\infty$ , мгновенный радиус пятна контакта будет меньше длительного:  $a(0) < a(\infty)$ . Отсюда следует, что при действии постоянного номинального давления радиус  $a(t)$  области контакта единичного индентора с вязкоупругим полупространством является возрастающей функцией времени. Поэтому для решения вязкоупругой задачи может быть применен принцип соответствия [14].

Таким образом, выражения (15)–(19) являются решением вязкоупругой задачи, если функцию  $p(r)/E$  заменить функцией  $q(r, t)$ , определяемой выражением (5), а функцию  $\bar{p}/E$  — функцией  $\bar{q}(t)$ , определяемой выражением (7). В результате получаем

$$\int_{0^-}^t J(t-\tau) \frac{\partial p(\rho, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left( \frac{Cp_k(m)(r, t)}{R_a^{n-1}} + 2(1-\nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t-\tau) \frac{d\bar{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a^2(t) - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2(t)}} \right) \right), \quad r \leq a(t); \quad (20)$$

$$d(t) = \frac{2^{n-2}n\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n)} \frac{Ca^n(t)}{R_a^{n-1}} - 2(1-\nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t-\tau) \frac{d\bar{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \sqrt{A^2 - a^2(t)}; \quad (21)$$

$$\frac{a^{n+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} = \frac{(n+1)\Gamma(n)R_a^{n-1}(1-\nu^2)}{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)C} \left( \int_{0^-}^t J(t-\tau) \frac{d\bar{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \right). \quad (22)$$

Используя известное соотношение между функциями ползучести  $J(t)$  и релаксации  $E(t)$  [14], из (20) находим следующее выражение для распределения контактного давления ( $r \leq a(\tau)$ ):

$$p(r, t) = \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \int_{0^-}^t E(t-\tau) \frac{\partial p_{k(m)}(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{2}{\pi} \int_{0^-}^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \left( \int_{0^-}^{\tau} J(\tau-s) \frac{d\bar{p}(s)}{ds} ds \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a^2(\tau) - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2(\tau)}} \right) \right) d\tau. \quad (23)$$

2.4. *Модель стандартного вязкоупругого тела.* Для исследования зависимости характеристик контактного взаимодействия (21)–(23) от времени рассмотрим модель стандартного вязкоупругого тела, для которой функции релаксации и ползучести имеют вид [14]

$$E(t) = E \left( 1 + \frac{T_\varepsilon - T_\sigma}{T_\sigma} e^{-t/T_\sigma} \right), \quad J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-t/T_\varepsilon} \right), \quad (24)$$

где  $E$  — длительный модуль упругости;  $T_\sigma, T_\varepsilon$  — времена релаксации и ползучести. Подставляя (24) в (21), (22) и учитывая, что  $\bar{p}(t) = p_0 H(t)$ , где  $p_0 = P_0/(\pi R^2)$ , получаем

$$d(t) = \frac{2^{n-2} n \Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n)} \frac{C a^n(t)}{R_a^{n-1}} - \frac{2(1-\nu^2)p_0}{E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-t/T_\varepsilon} \right) \sqrt{A^2 - a^2(t)}; \quad (25)$$

$$\frac{a^{n+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} = \frac{(n+1)\Gamma(n)R_a^{n-1}(1-\nu^2)p_0}{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)CE} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-t/T_\varepsilon} \right). \quad (26)$$

Поскольку функция  $a(t)$  является строго монотонной, существует обратная ей функция  $t(a)$ . Для обратной функции  $t(a)$  из выражения (26) получаем

$$t(a) = -T_\varepsilon \ln \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\varepsilon - T_\sigma} \left( 1 - \frac{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)CEa^{n+1}R_a^{1-n}(n+1)^{-1}}{\Gamma(n)(1-\nu^2)p_0(\arccos(a/A) + a\sqrt{A^2 - a^2}/A^2)} \right) \right). \quad (27)$$

Тогда, интегрируя по частям (23) и переходя к новой переменной  $a$ , для контактного давления имеем выражение ( $r \leq s, s \equiv a(\tau)$ )

$$p(r, a) = \frac{ET_\varepsilon C}{\pi(1-\nu^2)T_\sigma R_a^{n-1}} \left( p_{k(m)}(r, a) + 2\varphi_n(a) - \frac{T_\varepsilon - T_\sigma}{T_\sigma T_\varepsilon} e^{-t(a)/T_\sigma} \int_{a_0}^a (p_{k(m)}(r, s) + 2\varphi_n(s)) e^{t(s)/T_\sigma} \frac{dt(s)}{ds} ds \right), \quad (28)$$

где  $a_0 \equiv a(0)$ ; функция  $\varphi_n$  определяется следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)} \frac{x^{n+1} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - r^2}/\sqrt{A^2 - x^2})}{A^2 \arccos(x/A) + x\sqrt{1 - (x/A)^2}}. \quad (29)$$

Выражения (27), (28) позволяют определить распределение контактного давления в каждый момент времени, т. е. функцию  $p(r, a(t))$ . Зависимость от времени радиуса области контакта  $a(t)$  и функции дополнительного смещения  $d(t)$  определяются выражениями (25), (26).

2.5. *Результаты численных расчетов.* Из построенного в подп. 2.1–2.3 решения следует, что контактные характеристики на микроуровне зависят от формы отдельного выступа (параметры  $C$ ,  $R_a$  и  $n$ ), плотности расположения выступов (параметр  $A$ ), а также от механических характеристик вязкоупругого слоя (параметры  $E$ ,  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$ ). Рассмотрим случай, когда инденторы располагаются в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . Тогда  $A = \sqrt[4]{3}l/\sqrt{2\pi}$ .

Введем следующие безразмерные величины:

$$\tilde{p} = \frac{(1 - \nu^2)p}{E}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{R_a}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{R_a}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{R_a}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{R_a}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T_\varepsilon}, \quad T = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}.$$

Параметр  $T$  характеризует релаксационные свойства вязкоупругого полупространства, при этом для упругого полупространства  $T = 1$ . Константа  $C$  и величина  $R_a$  характеризуют форму и размеры отдельного выступа. Так, при  $n = 1$  (конический выступ)  $C = \text{ctg } \theta$ , где  $2\theta$  — угол раствора; при  $n = 2$  (выступ сферической формы)  $C/R_a = R_s/2$ , где  $R_s$  — радиус кривизны контактирующей поверхности выступа. Параметр  $\tilde{l}$  определяет безразмерное расстояние между инденторами, т. е. плотность расположения инденторов на границе полупространства.

Проанализируем безразмерную функцию  $\tilde{d}(\tilde{t})$  дополнительного смещения границы полупространства в случае дискретного характера взаимодействия при различных формах выступов (инденторов), характеризующихся параметром  $n$ , и различным безразмерном расстоянии  $\tilde{l}$  между ними. Из результатов расчетов следует, что дополнительное смещение является монотонно возрастающей функцией времени, которая стремится к предельному значению, соответствующему дополнительному смещению для упругого полупространства с длительным модулем упругости  $E$  (выражение (25) при  $T = 1$ ) (рис. 2). При этом чем плотнее расположены инденторы, тем меньше величина дополнительного смещения при одинаковом номинальном давлении (см. рис. 2, а). Для рассматриваемых значений параметров увеличение расстояния между неровностями в два раза приводит к росту вели-

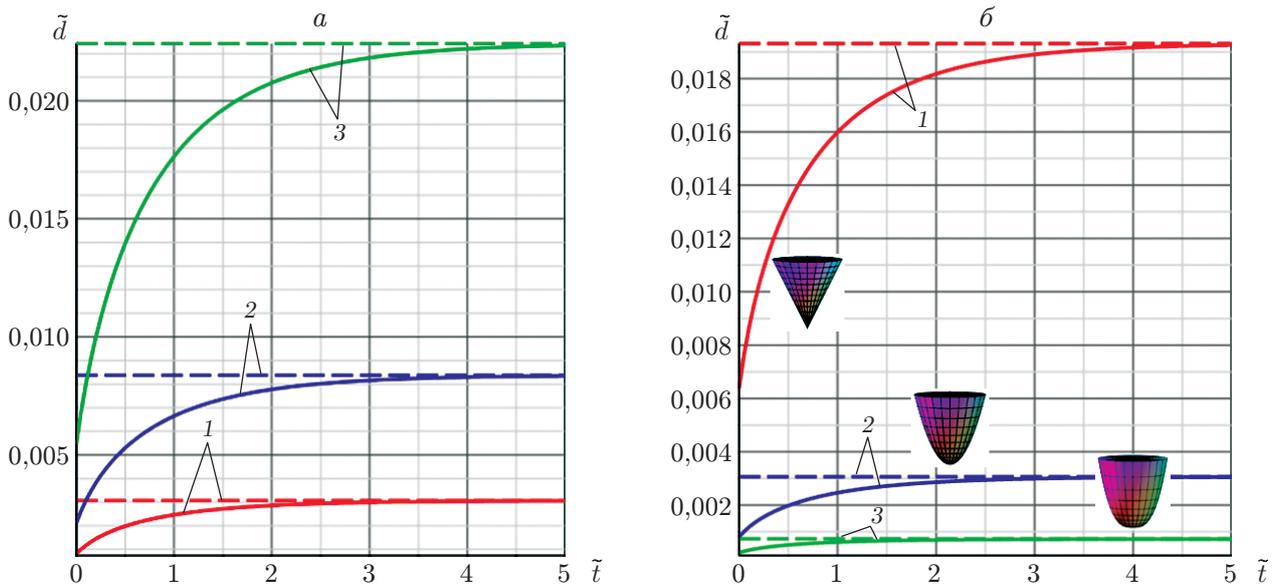


Рис. 2. Зависимость дополнительного смещения от времени  $\tilde{d}(\tilde{t})$  при  $\tilde{p}_0 = 0,005$ ,  $C = 1$ :  
 а —  $n = 2$  (1 —  $\tilde{l} = 0,25$ , 2 —  $\tilde{l} = 0,5$ , 3 —  $\tilde{l} = 1$ ), б —  $\tilde{l} = 0,25$  (1 —  $n = 1$ , 2 —  $n = 2$ , 3 —  $n = 3$ ); сплошные линии —  $T = 10$ , штриховые —  $T = 1$

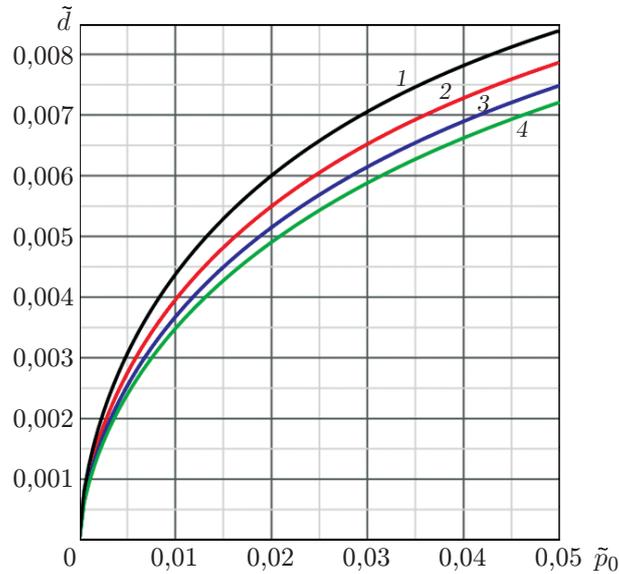


Рис. 3. Зависимость дополнительного смещения от номинального давления  $\tilde{d}(\tilde{p}_0)$  в момент  $\tilde{t} = 1$  при  $C = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\tilde{l} = 0,25$ :  
 1 —  $T = 1$ , 2 —  $T = 2$ , 3 —  $T = 5$ , 4 —  $T = 100$

чины дополнительного смещения более чем в 2,5 раза. Величина дополнительного смещения будет больше и для инденторов, форма поверхности которых описывается функцией с меньшим показателем степени (см. рис. 2,б). Форма выступа оказывает значительное влияние на функцию дополнительного смещения. Так, для системы инденторов с  $n = 2$  величина дополнительного смещения при рассматриваемых значениях параметров в шесть раз меньше, чем для системы с  $n = 1$ .

Для случая сферической формы неровностей и фиксированного расстояния между ними построены зависимости  $\tilde{d}(\tilde{p}_0)$  при различных значениях параметра  $T$  (рис. 3), что позволило исследовать влияние вязкоупругих свойств полупространства на значение функции дополнительного смещения в фиксированный момент времени. Из полученных результатов следует, что с увеличением номинального давления величина дополнительного смещения увеличивается, при этом возрастает различие величин дополнительных смещений для материалов с разной вязкостью. Анализ зависимости  $\tilde{d}(\tilde{t})$  при различных значениях параметра  $T$  показал, что чем больше значение параметра  $T$  при фиксированном длительном модуле упругости, тем меньше мгновенное значение величины дополнительного смещения и тем больше время выхода на его значение при длительном модуле упругости.

Представляет интерес исследование распределения на каждом пятне контакта давления, которое изменяется во времени и зависит от плотности расположения инденторов, их формы, значения номинального давления и вязкоупругих свойств полупространства. Из результатов численных расчетов следует, что со временем давление на пятне контакта перераспределяется: в начальный момент времени оно соответствует решению задачи для упругого полупространства (с учетом плотности расположения и взаимного влияния пятен контакта), а при больших временах — решению задачи о дискретном контакте для упругого полупространства с длительным модулем упругости. В центральной части области контакта с течением времени давление существенно уменьшается при любой форме индентора. Вследствие неравномерности релаксации давления и неодновременности вступления в контакт границы полупространства на краю области контакта со временем появляются дополнительные максимумы. При малых значениях номинального давления отношение

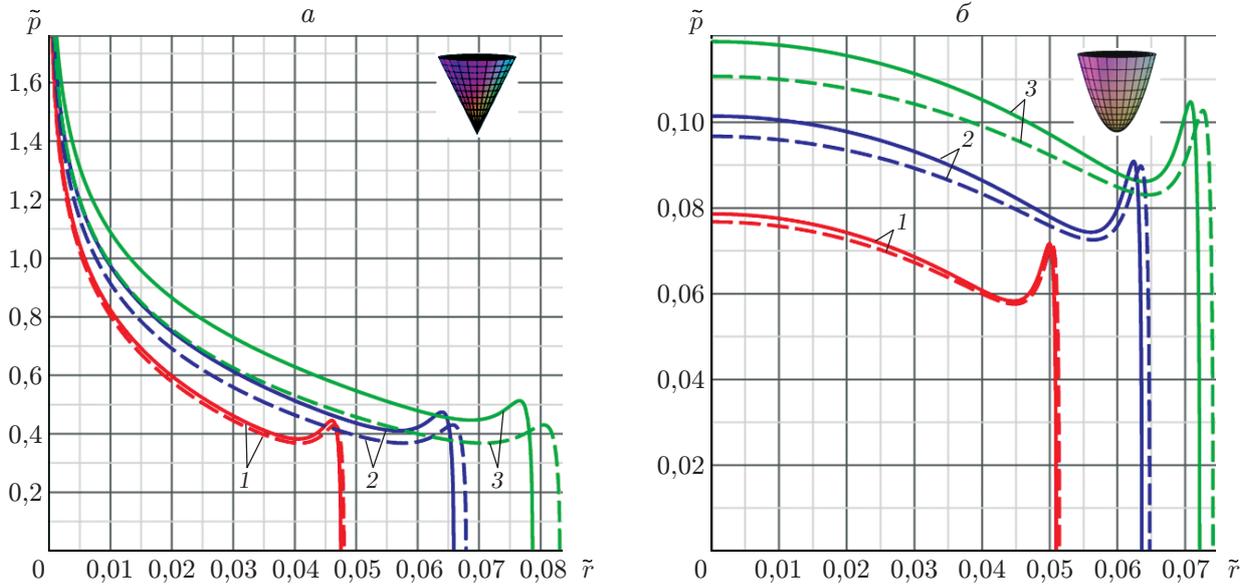


Рис. 4. Распределение контактного давления на отдельном пятне контакта  $\tilde{p}(\tilde{r}, 1)$  при  $C = 1$ ,  $\tilde{l} = 0,25$ ,  $T = 10$ :

$a$  —  $n = 1$  (1 —  $\tilde{p}_0 = 0,1$ , 2 —  $\tilde{p}_0 = 0,2$ , 3 —  $\tilde{p}_0 = 0,3$ ),  $b$  —  $n = 2$  (1 —  $\tilde{p}_0 = 0,01$ , 2 —  $\tilde{p}_0 = 0,02$ , 3 —  $\tilde{p}_0 = 0,03$ ); сплошные линии — система инденторов, штриховые — одиночный индентор

радиуса пятна контакта к расстоянию между пятнами мало, поэтому распределение давления практически такое же, как в случае внедрения в вязкоупругое полупространство одиночного индентора. На рис. 4 представлено распределение контактного давления под отдельным выступом конической и сферической формы в фиксированный момент времени при различных значениях номинального давления. Для сравнения приведены распределения, имеющие место при внедрении в вязкоупругое полупространство одиночного индентора. Из полученных результатов следует, что чем больше номинальное давление, т. е. плотность расположения пятен фактического контакта, тем больше взаимное влияние выступов, вследствие чего уменьшается радиус отдельного пятна контакта и увеличивается давление в центральной части области контакта.

**3. Решение контактной задачи на макроуровне.** Ниже решается на макроуровне задача о внедрении цилиндра с шероховатым основанием в вязкоупругое полупространство.

3.1. *Постановка задачи.* Как показано в [10], на макроуровне решение задачи определения номинальных давлений при внедрении штампа с плоской торцевой поверхностью, имеющей периодическую систему микронеровностей, в деформируемое основание сводится к решению интегрального уравнения

$$D - d[p(x, y)] = \iint_{\Omega} K(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega. \quad (30)$$

Здесь  $d[p]$  — функция дополнительного смещения, определяемая из решения периодической задачи на микроуровне;  $\Omega$  — номинальная область контакта;  $p(x, y)$  — распределение номинального давления в области  $\Omega$ ;  $D$  — глубина внедрения цилиндрического штампа в основание; ядро  $K(x, y, x', y')$  интегрального оператора зависит от модели, описывающей напряженно-деформированное состояние основания. В случае упругого слоя ядро

$K(x, y, x', y')$  имеет вид [15]

$$K(x, y, x', y') = \frac{1 - \nu^2}{\pi h E} k\left(\frac{R}{h}\right),$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad k(s) = \int_0^\infty L(u) J_0(us) du.$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка; функция  $L(u)$  зависит от способа крепления слоя к недеформируемому основанию:  $L(u) = (2\kappa \operatorname{sh}(2u) - 4u) / (2\kappa \operatorname{sh}(2u) + 4u^2 + 1 + \kappa^2)$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$  в случае отсутствия трения,  $L(u) = (\operatorname{ch}(2u) - 1) / (\operatorname{sh}(2u) + 2u)$  в случае полного сцепления. Второе слагаемое в левой части выражения (30) определяет дополнительное смещение границы основания, вызванное наличием микрорельефа, а правая часть — смещение границы основания, вызванное действием номинального давления в области  $\Omega$ . Функция дополнительного смещения  $d$  для вязкоупругого основания найдена в п. 2, а смещения границы вязкоупругого слоя определяются с использованием принципа соответствия [14] (так как область контакта постоянна). Таким образом, в случае вязкоупругого слоя выражение (30) принимает вид  $((x, y) \in \Omega)$

$$D(t) = d[p(x, y, t)] + \frac{1 - \nu^2}{\pi h} \iint_{\Omega} k\left(\frac{R}{h}\right) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dp(x', y', \tau)}{d\tau} d\tau \right) dx' dy'. \quad (31)$$

При этом должно выполняться условие равновесия

$$P(t) = \iint_{\Omega} p(x, y, t) dx dy. \quad (32)$$

**3.2. Решение задачи на макроуровне с учетом характеристик дискретного контакта на микроуровне.** Так как рассматривается тонкий слой, для ядра  $k(s)$  можно принять асимптотическое приближение [16]

$$k(s) \sim 2\pi B \delta(s),$$

где  $\delta(s)$  — двумерная дельта-функция; постоянная  $B$  зависит от способа крепления слоя к жесткому основанию. Если трение между слоем и жестким основанием отсутствует, то  $B = 1/2$ , а если слой сцеплен с основанием, то  $B = 4(\kappa - 1) / (\kappa + 1)^2$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$  [15]. Тогда для вертикальных смещений границы слоя и давлений, их вызывающих, получаем следующее соотношение:

$$w(x, y, t) \sim 2hB(1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dp(x, y, \tau)}{d\tau} d\tau \right). \quad (33)$$

Как отмечено в [15], соотношение (33) справедливо не во всей области контакта, а только в ее внутренней части. Однако чем меньше толщина слоя, тем больше область, в которой это соотношение верно. Значение толщины слоя, для которого применима данная аппроксимация, приведено в работе [16].

Переходя в цилиндрическую систему координат, с учетом (31), (33) получаем следующее уравнение:

$$D(t) = d[p(r, t)] + 2hB(1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dp(x, y, \tau)}{d\tau} d\tau \right), \quad r < R.$$

Подставляя в это уравнение функцию  $d(t)$  (21), определенную из решения периодической контактной задачи на микроуровне, находим зависимость глубины внедрения  $D(t)$  от номинального давления  $p(r, t)$  под поверхностью цилиндра ( $r < R$ )

$$D(t) = \frac{n\Gamma^2(n/2)}{2^{2-n}\Gamma(n)} \frac{Ca^n(t)}{R_a^{n-1}} + 2(hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)})(1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dp(r, \tau)}{d\tau} d\tau \right),$$

где зависимость радиуса отдельного пятна контакта от номинального давления  $a(t)$  определяется выражением (22). Из полученных соотношений следует, что номинальное (осредненное) контактное давление распределено под поверхностью цилиндра равномерно. Это обусловлено использованием упрощенной зависимости (33). С учетом условия равновесия (32)  $p(t) = P(t)/(\pi R^2)$ . Окончательно получаем следующую систему уравнений для определения изменения во времени глубины внедрения  $D(t)$  и радиуса  $a(t)$  единичного пятна контакта при заданной нагрузке  $P_0$ , приложенной к цилиндру:

$$D(t) = \frac{2^{n-2}n\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n)} \frac{Ca^n(t)}{R_a^{n-1}} + \frac{2(1 - \nu^2)J(t)P_0}{\pi R^2} (hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)}), \quad (34)$$

$$\frac{a^{n+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} = \frac{(n+1)\Gamma(n)R_a^{n-1}(1 - \nu^2)}{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)C\pi R^2} J(t)P_0.$$

3.3. *Основные соотношения для модели стандартного вязкоупругого тела.* Для модели стандартного вязкоупругого тела, рассмотренной в п. 2, с учетом (24) выражения (34) принимают вид

$$D(t) = \frac{n\Gamma^2(n/2)}{2^{2-n}\Gamma(n)} \frac{Ca^n(t)}{R_a^{n-1}} + \frac{2(1 - \nu^2)P_0}{\pi R^2 E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-t/T_\varepsilon} \right) (hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)}), \quad (35)$$

$$\frac{a^{n+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} =$$

$$= \frac{(n+1)\Gamma(n)R_a^{n-1}(1 - \nu^2)P_0}{2^{n-2}n^2\Gamma^2(n/2)C\pi R^2 E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-t/T_\varepsilon} \right).$$

Размер отдельного пятна контакта может быть использован для определения фактической площади контакта, представляющей собой совокупную площадь всех пятен фактического контакта. Будем считать, что неровности, формирующие микрорельеф основания цилиндра, располагаются в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . Тогда фактическая область контакта под цилиндром радиусом  $R$  определяется выражением

$$A_r(t) = 2\pi \int_0^R r\beta(t) dr = \pi R^2 \beta(t), \quad (36)$$

где функция  $\beta(t) = 2\pi a^2(t)/(\sqrt{3}l^2)$  характеризует отношение фактической площади контакта к номинальной.

Соотношения (35), (36) показывают, что, как и характеристики на микроуровне, контактные характеристики на макроуровне зависят от микрогеометрии поверхности основания цилиндра (параметры  $C$ ,  $R_a$ ,  $n$ ,  $l$ ) и от механических характеристик вязкоупругого слоя ( $E$ ,  $T_\sigma$ ,  $T_\varepsilon$ ). Введем следующие безразмерные величины:

$$\tilde{P}_0 = \frac{(1 - \nu^2)P_0}{ER^2}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{R}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{R}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{R}, \quad \tilde{R}_a = \frac{R_a}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T_\varepsilon}, \quad T = \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon}.$$

Тогда безразмерные глубина внедрения  $\tilde{D}(\tilde{t})$  и фактическая площадь контакта  $\beta(\tilde{t})$  в произвольный момент времени  $\tilde{t}$  зависят от следующих безразмерных параметров:

- параметров  $C$ ,  $\tilde{R}_a$ ,  $n$ , характеризующих форму неровностей, образующих микрорельеф поверхности цилиндра;
- относительного расстояния между неровностями  $\tilde{l}$ , характеризующего плотность их расположения на поверхности штампа;
- характеристик вязкоупругого слоя  $B$ ,  $\lambda$ ,  $T$ ;
- величины приложенной к цилиндру нагрузки  $\tilde{P}_0$ .

Параметры, характеризующие толщину слоя (параметр  $\lambda$ ) и способ его закрепления (параметр  $B$ ), входят только в выражение для глубины внедрения, причем линейно. Поэтому их влияние на зависимость макрохарактеристик от времени очевидно. Будем полагать, что  $B = 0,5$ ,  $\lambda = 0,1$ , и исследуем влияние параметра микрогеометрии  $\tilde{l}$  и релаксационной характеристики слоя  $T$  на глубину внедрения и фактическую площадь контакта.

3.4. *Анализ влияния параметров микрогеометрии на глубину внедрения штампа и фактическую площадь контакта.* Микрорельеф поверхности основания цилиндра характеризуется формой неровностей и плотностью их расположения. Для анализа влияния плотности расположения построены зависимости глубины внедрения и фактической площади контакта, характеризуемой величиной  $\beta$  (36), от времени при различной величине шага  $\tilde{l}$  гексагональной решетки (рис. 5). Из результатов расчетов следует, что увеличение плотности расположения неровностей (как и параметра  $R_a$ ) приводит к увеличению фактической площади контакта и уменьшению глубины внедрения, при этом результаты решения задачи приближаются к результатам решения задачи о внедрении цилиндра с гладким основанием. На рис. 5 представлены также значения фактической площади контакта и глубины внедрения, характерные для упругого слоя с длительным модулем упругости. Видно, что при фиксированном значении параметра  $T$ , характеризующего вязкость слоя, выход исследуемых величин на длительное значение происходит за одно и то же время.

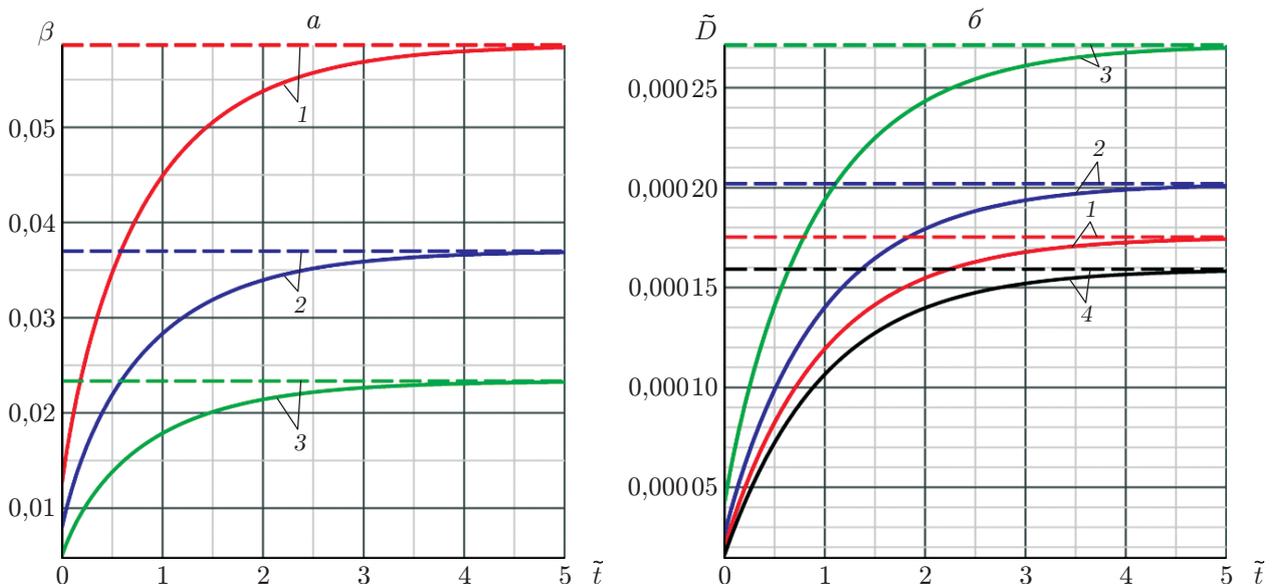


Рис. 5. Зависимости фактической площади контакта (а) и глубины внедрения (б) от времени при  $\tilde{P}_0 = 0,005$ ,  $n = 2$ ,  $C = 1$ ,  $\tilde{R}_a = 0,01$ ,  $T = 10$ :

1–3 — шероховатый цилиндр (1 —  $\tilde{l} = 0,0025$ , 2 —  $\tilde{l} = 0,005$ , 3 —  $\tilde{l} = 0,01$ ), 4 — гладкий цилиндр; сплошные линии — вязкоупругий слой, штриховые — упругий слой

3.5. *Анализ влияния вязкоупругих свойств слоя и приложенной нагрузки на глубину внедрения штампа и фактическую площадь контакта.* С целью анализа влияния вязкоупругих свойств слоя на изменение во времени исследуемых контактных характеристик проведены расчеты зависимости фактической площади контакта и глубины внедрения от времени при различных значениях параметра  $T$ , равного отношению времен ползучести и релаксации слоя. Из результатов расчетов следует, что чем больше вязкость материала (значение параметра  $T$ ) при одном и том же длительном модуле упругости, тем меньше фактическая площадь области контакта и глубина внедрения штампа в начальный момент времени. Сравнение результатов с результатами, полученными в случае внедрения гладкого цилиндра, позволяет сделать вывод, что наличие микрорельефа приводит к увеличению глубины внедрения, при этом различие результатов, полученных с учетом микрорельефа и без учета, со временем увеличивается, выходя затем на постоянное значение.

Исследовано также влияние величины приложенной к цилиндру нагрузки на исследуемые характеристики. Для этого построены зависимости фактической площади контакта (рис. 6, *а*) и глубины внедрения (рис. 6, *б*) от нагрузки в фиксированный момент времени для материалов с различной вязкостью, характеризуемой параметром  $T$ . Из полученных результатов следует, что и площадь области контакта, и глубина внедрения с увеличением приложенной нагрузки возрастают. Сравнение зависимостей глубины внедрения от нагрузки для шероховатого и гладкого цилиндров показывает, что в случае цилиндра, поверхность которого обладает микрорельефом, при малых значениях нагрузки эта зависимость не является линейной. При этом чем меньше плотность контакта, тем значительнее отклонение зависимости  $D(P)$  от линейной. Увеличение вязкости материала слоя приводит к уменьшению как глубины внедрения, так и фактической площади контакта при фиксированных значениях приложенной к штампу нагрузки и времени.

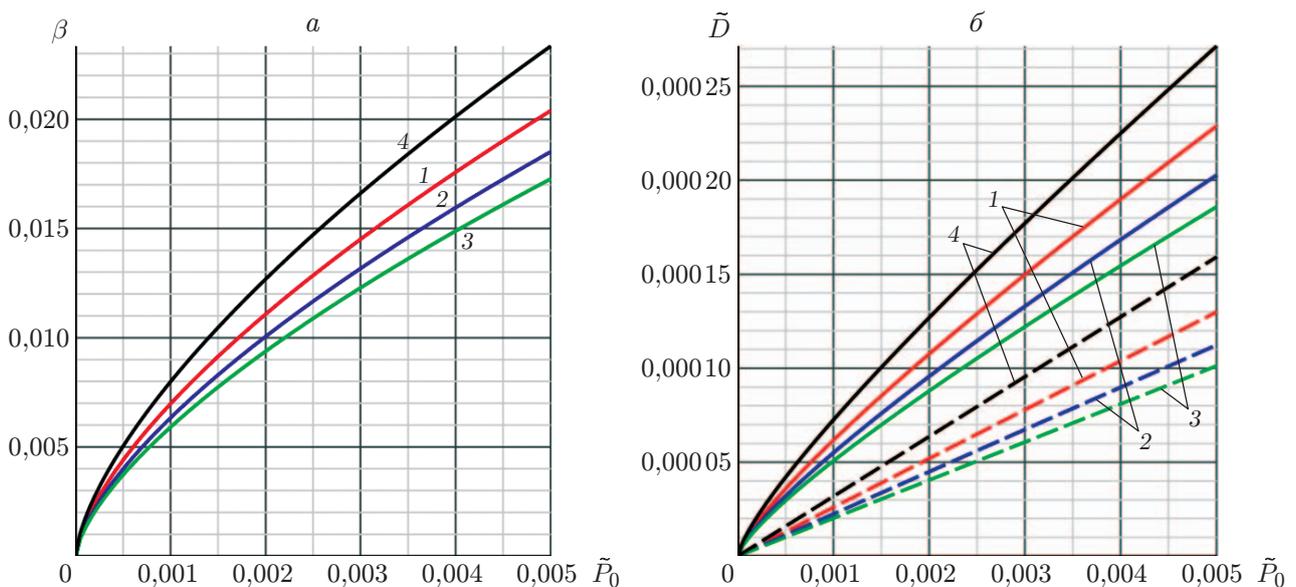


Рис. 6. Зависимости фактической площади контакта (*а*) и глубины внедрения (*б*) от величины приложенной нагрузки  $\tilde{P}_0$  в момент  $\tilde{t} = 1$  при  $C = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\tilde{R}_a = 0,01$ ,  $\tilde{l} = 0,01$ :  
 1 —  $T = 1$ , 2 —  $T = 2$ , 3 —  $T = 5$ , 4 —  $T = 100$ ; сплошные линии — шероховатый цилиндр, штриховые — гладкий цилиндр

**Заключение.** Построена модель внедрения под действием постоянной силы жесткого цилиндра с шероховатой торцевой поверхностью в вязкоупругий слой. Рассмотрен случай тонкого слоя и шероховатости, моделируемой периодической системой одинаковых инденторов, контактирующая поверхность которых описывается степенной функцией.

Поставленная контактная задача решена на двух масштабных уровнях: микроуровне (размер единичного пятна контакта) и макроуровне (радиус основания цилиндра). На каждом масштабном уровне исследовано влияние параметров микрорельефа и механических свойств слоя на характеристики контактного взаимодействия.

Результаты полученного аналитического решения задачи позволили установить, что форма выступов и плотность их расположения на поверхности внедряемого штампа оказывают значительное влияние на функцию дополнительного смещения вследствие шероховатости основания штампа, что, в свою очередь, приводит к изменению жесткости контакта на макроуровне. В частности, при уменьшении плотности расположения выступов шероховатой поверхности и показателя степени в функции, описывающей форму неровности, зависимость глубины внедрения штампа на макроуровне от приложенной к нему нагрузки становится нелинейной. Также проведен анализ зависимости фактической площади контакта от времени при различных формах неровностей и плотности их расположения на поверхности штампа.

Изучено влияние на контактные характеристики (глубину внедрения штампа и фактическую площадь контакта) и их изменение во времени релаксационных свойств материала слоя. Показано, что увеличение вязкости материала слоя (при фиксированном длительном модуле упругости) приводит к уменьшению глубины внедрения штампа и фактической площади контакта для фиксированного момента времени.

Разработанная модель и результаты проведенных исследований могут быть использованы при оценке жесткости контакта тел с шероховатыми поверхностями, а также для управления параметрами микрогеометрии сопрягаемых поверхностей с целью достижения требуемых контактных характеристик (жесткости контакта, фактической площади контакта), а также для оценки времени выхода этих характеристик на стационарные значения при контакте тел из вязкоупругих материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Putignano C., Carbone G.** A review of boundary elements methodologies for elastic and viscoelastic rough contact mechanics // *Phys. Mesomech.* 2014. V. 17, N 3. P. 107–117.
2. **Dubois G., Cesbron J., Yin H. P., Anfosso-Lédée F.** Macro-scale approach for rough frictionless multi-indentation on a viscoelastic half-space // *Wear.* 2011. V. 272, N 1. P. 69–78.
3. **Bonari J., Paggi M.** Viscoelastic effects during tangential contact analyzed by a novel finite element approach with embedded interface profiles // *Lubricants.* 2020. V. 8, N 12. 107.
4. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
5. **Greenwood J. A., Williamson J. B. P.** Contact of nominally flat surfaces // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1966. V. 295, N 1442. P. 300–319.
6. **Hui C. Y., Lin Y. Y., Baney J. M.** The mechanics of tack: Viscoelastic contact on a rough surface // *J. Polymer. Sci. B.* 2000. V. 38, N 11. P. 1485–1495.
7. **Аргатов И. И.** Давление штампа с мелкозернистой границей на упругое основание // *ПМТФ.* 2004. Т. 45, № 5. С. 176–186.
8. **Abuzeid O., Eberhard P.** Linear viscoelastic creep model for the contact of nominal flat surfaces based on fractal geometry: standard linear solid (SLS) material // *J. Tribol.* 2007. V. 129, N 3. P. 461–466.

9. **Persson B. N. J., Albohr O., Creton C., Peveri V.** Contact area between a viscoelastic solid and a hard, randomly rough, substrate // *J. Chem. Phys.* 2004. V. 120, N 18. P. 8779–8793.
10. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
11. **Yakovenko A., Goryacheva I.** The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Intern.* 2021. V. 161. 107078.
12. **Ting T. C. T.** The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space // *J. Appl. Math.* 1966. V. 33, N 4. P. 845–854.
13. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
14. **Golden J. M.** Boundary value problems in linear viscoelasticity / J. M. Golden, G. A. C. Graham. Berlin: Springer Verlag, 1988.
15. **Ворович И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1974.
16. **Александров В. М.** Некоторые контактные задачи для упругого слоя // *Прикл. математика и механика.* 1963. Т. 27, № 4. С. 758–764.

*Поступила в редакцию 2/VI 2021 г.,  
после доработки — 2/VI 2021 г.  
Принята к публикации 26/VII 2021 г.*

---