

УДК 539.4+622.83

## РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ГИДРОРАЗРЫВЕ С КОНТРАСТОМ НАПРЯЖЕНИЙ

И. О. Гладков\*, А. М. Линьков\*,\*\*

\* Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург, Россия

\*\* Жешувский политехнический университет, 35959 Жешув, Польша  
E-mails: igorgladkov777@gmail.com, voknilal@hotmail.com

Поставлена и решена плоская задача о гидравлическом разрыве для модели Христиановича — Гиртсма — де Клерка, обобщенной на случай, когда напряжение, вызывающее смыкание берегов трещины, непостоянно в направлении ее распространения. Разработан метод решения задач с произвольным контрастом напряжений. Установлено, что переход трещины через контактную границу с положительным (отрицательным) контрастом происходит с торможением (ускорением), интенсивность которого определяется безразмерным параметром, предложенным на основе анализа результатов численных расчетов.

Ключевые слова: гидроразрыв, плоская задача, контраст напряжений.

DOI: 10.15372/PMTF20180218

**Введение.** Гидравлический разрыв широко используется при нефте- и газодобыче, а также при решении других важных практических задач (см., например, [1, 2]). Аналитические исследования и численное моделирование задач о гидроразрыве впервые проведены в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [3]. Модель, предложенная ими и развитая Дж. Гиртсма и Ф. де Клерком [4], получила название модели Христиановича — Гиртсма — де Клерка. Данная модель используется при получении эталонных решений [5–13] и построении псевдотрехмерной модели [2, 8, 11]. В работе [11] рассмотрена частная задача, при решении которой в модели Христиановича — Гиртсма — де Клерка учитывается контраст напряжений в полуплоскостях, между которыми расположен продуктивный слой. С использованием решения этой задачи выполнен полуэмпирический подбор скорости увеличения длины псевдотрехмерной трещины.

Целями данной работы являются формулировка, численное решение и обсуждение особенностей обобщенной задачи Христиановича — Гиртсма — де Клерка.

**1. Постановка задачи.** Прямолинейная трещина гидроразрыва длиной  $2x_m(t)$  растет в условиях плоской деформации перпендикулярно направлению действия сжимающих напряжений  $\sigma(x)$  в породах, содержащих  $K$  слоев (рис. 1). Слои нумеруются снизу вверх, т. е. нижним является слой 1, верхним — слой  $K$ . Нижний и верхний слои считаются полуплоскостями. Верхняя граница  $j$ -го слоя имеет номер  $j$  ( $j = 1, \dots, K - 1$ ). Ось  $x$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-00017) и при частичной финансовой поддержке Польского национального научного центра (код проекта 2015/19B/ST8/00712).

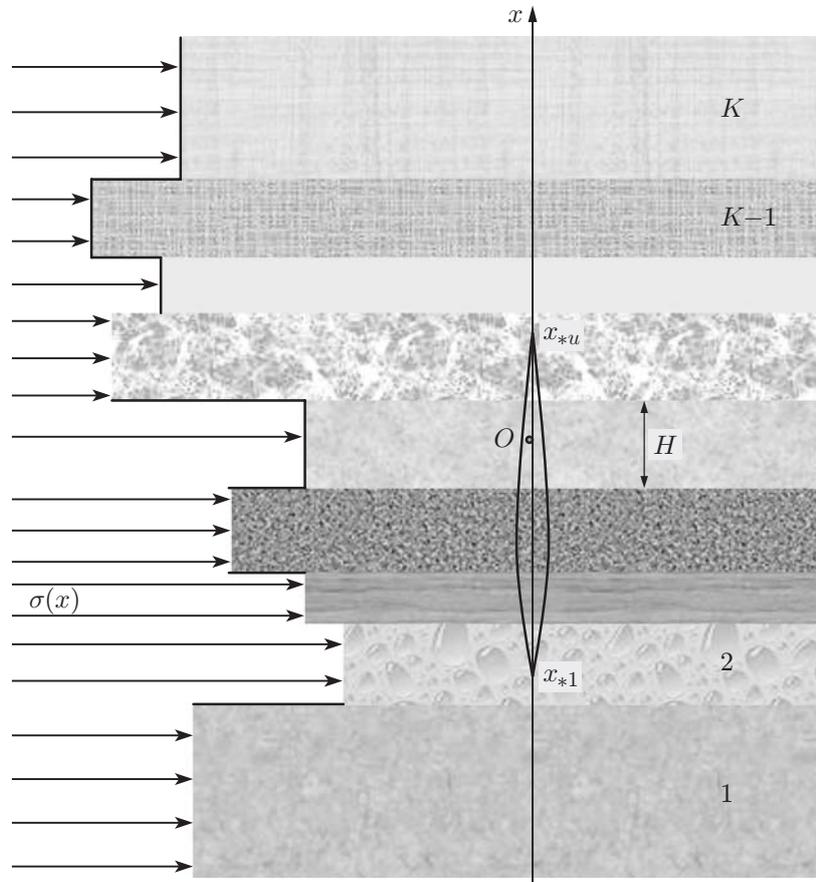


Рис. 1. Схема трещины гидроразрыва в слоистом массиве пород с различными напряжениями в слоях  $1, 2, \dots, K - 1, K$

системы координат направлена вверх вдоль трещины, начало координат находится в центре продуктивного слоя толщиной  $H$ . Таким образом, первая граница имеет координату  $x^1 = -\frac{H}{2} - \sum_{s=2}^{s=j_p-1} h^s$ , все последующие —  $x^j = x^1 + \sum_{s=2}^{s=j} h^s$ ,  $j = 2, \dots, K - 1$  ( $j_p$  — номер продуктивного слоя;  $h^j$  — толщина  $j$ -го слоя). Источник разрывающей жидкости с интенсивностью  $Q$  находится в центре продуктивного слоя ( $x_Q = 0$ ).

Поскольку слои считаются однородными с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  [2], слоистость массива учитывается путем задания разных напряжений  $\sigma(x)$ , действующих в породах вдоль слоев. Наличие контраста напряжений в слоях отличает данную модель от классической модели Христиановича — Гиртсма — де Клерка. В псевдотрехмерной модели функция  $\sigma(x)$  полагается ступенчатой с заданным постоянным значением сжатия  $\sigma^j$  в каждом слое:

$$\sigma(x) = \sigma^j, \quad x^{j-1} < x < x^j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (1)$$

причем  $x^0 = -\infty$ ,  $x^K = \infty$ .

Далее сжимающие напряжения  $\sigma(x)$ , как и давление жидкости  $p(x, t)$ , будем считать положительными. Для линейно-упругих пород раскрытие трещины  $w(x, t)$  определяется разностью  $p_n(x, t) = p(x, t) - \sigma(x)$ , которую можно записать в виде

$$p_n(x, t) = p_d(x, t) - \Delta\sigma(x), \quad (2)$$

где  $p_d(x, t)$ ,  $\Delta\sigma(x)$  — разностное давление и контраст напряжений относительно напряжения в продуктивном слое  $\sigma_p$  соответственно:

$$p_d(x, t) = p(x, t) - \sigma_p, \quad \Delta\sigma(x) = \sigma(x) - \sigma_p. \quad (3)$$

Математическая задача формулируется следующим образом. Уравнения сохранения объема и движения записываются через среднюю по раскрытию  $w$  скорость жидкости  $v$  (см., например, [13]):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial(wv)}{\partial x} - q_l + \delta(x)Q(t); \quad (4)$$

$$v = -\text{sign}\left(\frac{\partial p_d}{\partial x}\right) \left(\frac{w^{n+1}}{\mu'} \left|\frac{\partial p_d}{\partial x}\right|\right)^{1/n} \quad (5)$$

( $q_l$  — член, учитывающий утечку жидкости из трещины;  $\delta(x)$  — дельта-функция;  $\mu' = \theta M$ ;  $n$  — показатель, характеризующий поведение жидкости;  $\theta = 2[2(2n+1)/n]^{1/n}$ ;  $M$  — коэффициент консистенции).

Движение концов трещины определяется уравнениями их скоростей

$$\frac{dx_{*l}}{dt} = v_{*l} = \lim_{x \rightarrow x_{*l}} v(x, t), \quad \frac{dx_{*u}}{dt} = v_{*u} = \lim_{x \rightarrow x_{*u}} v(x, t), \quad (6)$$

где  $x_*$  — координата конца трещины;  $v_* = dx_*/dt$  — скорость его движения; индексы  $l, u$  соответствуют нижнему и верхнему концам трещины.

С учетом (2) гиперсингулярное уравнение для прямолинейной трещины, получаемое из классического сингулярного уравнения Мусхелишвили [14] путем интегрирования по частям [15], принимает вид

$$p_d(x, t) - \Delta\sigma(x) = \frac{E'}{4\pi} \int_{x_{*l}}^{x_{*u}} \frac{w(\xi, t)}{(\xi - x)^2} d\xi, \quad x_{*l} < x < x_{*u}, \quad (7)$$

где  $E' = E/(1 - \nu^2)$ . Раскрытие  $w$  в (7) будем искать в классе функций, равных нулю на концах трещины:

$$w(x_{*l}, t) = 0, \quad w(x_{*u}, t) = 0. \quad (8)$$

Распространение трещины происходит в том случае, если коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  на ее концах достигает критического значения  $K_{IC}$ :

$$K_{Il} = K_{IC}, \quad K_{Iu} = K_{IC}. \quad (9)$$

В данной работе рассматривается случай  $K_{IC} = 0$ . Тогда раскрытие и давление вблизи концов трещины определяются асимптотическими зависимостями [16]

$$w(x) = A_w(v_*)r^\alpha, \quad p_d(x) = -A_w(v_*)B(\alpha)E'r^{\alpha-1}, \quad (10)$$

где  $A_w(v_*) = A_\mu(\alpha)(t_n|v_*|)^{1-\alpha}$ ;  $A_\mu(\alpha) = [(1-\alpha)B(\alpha)]^{-\alpha/2}$ ;  $B(\alpha) = (\alpha/4) \text{ctg}[\pi(1-\alpha)]$ ;  $\alpha = 2/(n+2)$ ;  $t_n = (\mu'/E')^{1/n}$ ;  $r = |x_* - x|$ . Подставляя (10) в (5), (6), получаем уравнения скоростей в виде

$$\frac{dx_{*l}}{dt} = -\frac{1}{t_n} \lim_{x \rightarrow x_{*l}} \left(\frac{1}{A_\mu} \frac{w(x)}{r^\alpha}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \frac{dx_{*u}}{dt} = \frac{1}{t_n} \lim_{x \rightarrow x_{*u}} \left(\frac{1}{A_\mu} \frac{w(x)}{r^\alpha}\right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (11)$$

В результате имеем систему пяти уравнений (4), (5), (7), (11) относительно пяти неизвестных  $w(x, t)$ ,  $p_d(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $x_{*l}(t)$ ,  $x_{*u}(t)$ . Граничные условия (8) и условия (9) при  $K_{IC} = 0$  удовлетворяются тождественно при использовании асимптотики (10). Для данной системы задаются начальные условия

$$x_{*l}(t_0) = x_{*l0}, \quad x_{*u}(t_0) = x_{*u0}, \quad w(x, t_0) = w_0(x), \quad x_{*l0} \leq x \leq x_{*u0}. \quad (12)$$

Задача состоит в нахождении решения системы (4), (5), (7), (11) при начальных условиях (12) с учетом асимптотики раскрытия (10).

**2. Нормирование переменных.** Для того чтобы исключить из уравнений модуль упругости и вязкость, введем нормирующее раскрытие [13]:  $w_n = (\mu'/E')^{1/(n+2)}$ . Тогда, используя нормированные переменные

$$\begin{aligned} w' &= \frac{w}{w_n}, & w'_0 &= \frac{w_0}{w_n}, & p' &= \frac{p}{w_n E'}, & \sigma' &= \frac{\sigma}{w_n E'}, & \sigma'^j &= \frac{\sigma^j}{w_n E'}, \\ p'_d &= \frac{p_d}{w_n E'}, & \Delta\sigma' &= \frac{\Delta\sigma}{w_n E'}, & q'_l &= \frac{q_l}{w_n}, & Q' &= \frac{Q}{w_n}, \end{aligned} \quad (13)$$

получаем те же уравнения, в которых  $E' = 1$ ,  $\mu' = 1$ . Координата нормируется таким образом, чтобы была устранена сингулярность производной  $\partial w/\partial t$  на концах трещины, если эта производная вычисляется при фиксированной переменной  $x$ . Введем нормированные координаты:

$$\zeta = \frac{x}{|x_*|} = \begin{cases} \zeta_1 = -x/x_{*l}, & x \leq 0, \\ \zeta_2 = x/x_{*u}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (14)$$

В безразмерных переменных (13), (14) получаем систему

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{1}{|x_*(\zeta)|} \frac{\partial [w'(\zeta|v_*| - v)]}{\partial \zeta} - \frac{v_*}{x_*(\zeta)} w' - q'_l + \delta(x)Q'(t); \quad (15)$$

$$v = -\text{sign} \left( \frac{\partial p'_d}{\partial \zeta} \right) \left( w'^{n+1} \left| \frac{1}{|x_*(\zeta)|} \frac{\partial p'_d}{\partial \zeta} \right| \right)^{1/n}; \quad (16)$$

$$\frac{dx_{*l}}{dt} = -\lim_{\zeta_1 \rightarrow -1} \left( \frac{1}{A_\mu} \frac{w'(\zeta)}{|x_{*l}(1 + \zeta_1)|^\alpha} \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \frac{dx_{*u}}{dt} = \lim_{\zeta_2 \rightarrow 1} \left( \frac{1}{A_\mu} \frac{w'(x)}{|x_{*u}(1 - \zeta_2)|^\alpha} \right)^{1/(1-\alpha)}; \quad (17)$$

$$p'_d(\zeta, t) - \Delta\sigma'(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{w'(\tau, t)}{|x_*(\tau)| [\tau - \zeta|x_*(\zeta)/x_*(\tau)]|^2} d\tau, \quad -1 < \zeta < 1, \quad (18)$$

где  $x_*(\zeta) = x_{*l}$  при  $\zeta < 0$  и  $x_*(\zeta) = x_{*u}$  при  $\zeta > 0$ .

После нормировки второго уравнения (3) нормированный контраст напряжений  $\Delta\sigma'(\zeta)$  в соответствии с (1) определяется формулой

$$\Delta\sigma'(\zeta) = \Delta\sigma'^j = \sigma'^j(\zeta) - \sigma'_p, \quad \zeta^{j-1} < \zeta < \zeta^j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (19)$$

где  $\zeta^j = x^j/|x_*(x^j)|$ . Для концов трещины  $\zeta = \pm 1$  формула (10) принимает вид

$$w'(\zeta) = A'_w(v_*) |x_*(\zeta)|^\alpha (1 - |\zeta|)^\alpha, \quad (20)$$

где  $A'_w(v_*) = A_w(v_*)/w_n$ . Начальные условия (12) записываются в виде

$$x_{*l}(t_0) = x_{*l0}, \quad x_{*u}(t_0) = x_{*u0}, \quad w'(\zeta, t_0) = w'_0(\zeta), \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \quad (21)$$

Требуется решить систему (15)–(18) при начальных условиях (21), причем контраст напряжений определяется по формуле (19), а раскрытие трещины вблизи ее концов задается согласно (20).

**3. Сведение определяющей системы уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.** Ниже строится решение в нормированных переменных, для упрощения обозначений штрихи опускаются. Отрезок  $[-1, 1]$  представляется в виде суммы интервалов  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ , первый из которых делится на  $N_1$  элементов длиной  $\Delta\zeta_1 = 1/N_1$ , начинающихся в точках  $\zeta_i = -1 + (i - 1)\Delta\zeta_1$  ( $i = 1, \dots, N_1$ ), второй — на  $N_2$  элементов длиной  $\Delta\zeta_2 = 1/N_2$ , начинающихся в точках  $\zeta_i = (i - N_1 - 1)\Delta\zeta_2$  ( $i = N_1 + 1, \dots, N$ ),  $N = N_1 + N_2$ . Вводятся сеточные функции  $w_i = w(\zeta_i)$ ,  $v_i = v(\zeta_i)$ ,

$p_i = p_d(\zeta_i)$ ,  $q_i = q_l(\zeta_i)$  ( $i = 1, \dots, N + 1$ ). Раскрытие на концах трещины равно нулю:  $w_1 = 0$ ,  $w_{N+1} = 0$ .

Для источника ( $i = N_1 + 1$ ) используем интегральное уравнение баланса, учитывающее заданную интенсивность притока  $Q(t)$ :

$$\frac{dw_{N_1+1}}{dt} = \frac{3Q(t) - w_{N_1-1}v_{N_1-1} + 4w_{N_1}v_{N_1} - 4w_{N_1+2}v_{N_1+2} + w_{N_1+3}v_{N_1+3}}{2[\Delta\zeta_1 |x_{*l}| + \Delta\zeta_2 x_{*u}]}. \quad (22)$$

В ближайших к источнику точках уравнение неразрывности (15) аппроксимируем конечными разностями первого порядка:

$$\frac{dw_{N_1}}{dt} = \frac{w_{N_1}(\zeta_{N_1} |v_{*l}| - v_{N_1}) - w_{N_1-1}(\zeta_{N_1-1} |v_{*l}| - v_{N_1-1})}{|x_{*l}| \Delta\zeta_1} - \frac{v_{*l}}{x_{*l}} w_{N_1} - q_{lN_1}; \quad (23)$$

$$\frac{dw_{N_1+2}}{dt} = \frac{w_{N_1+3}(\zeta_{N_1+3} v_{*u} - v_{N_1+3}) - w_{N_1+2}(\zeta_{N_1+2} v_{*u} - v_{N_1+2})}{x_{*u} \Delta\zeta_2} - \frac{v_{*u}}{x_{*u}} w_{N_1+2} - q_{lN_1+2}. \quad (24)$$

Для остальных точек используются центральные разности:

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{w_{i+1}(\zeta_{i+1} |v_{*}| - v_{i+1}) - w_{i-1}(\zeta_{i-1} |v_{*}| - v_{i-1})}{2|x_{*}| \Delta\zeta(i)} - \frac{v_{*}}{x_{*}} w_i - q_i. \quad (25)$$

Здесь

$$\Delta\zeta(i) = \begin{cases} \Delta\zeta_1, & 1 \leq i \leq N_1, \\ \Delta\zeta_2, & N_1 + 1 \leq i \leq N, \end{cases}$$

$$x_* = \begin{cases} x_{*l}, & 1 \leq i \leq N_1, \\ x_{*u}, & N_1 + 1 \leq i \leq N, \end{cases} \quad v_* = \begin{cases} v_{*l}, & 1 \leq i \leq N_1, \\ v_{*u}, & N_1 + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (22)–(25) содержит  $N - 1$  уравнений. К ним добавляются два уравнения скорости движения концов трещины (17), которые принимают вид

$$\frac{dx_{*l}}{dt} = - \left( \frac{1}{A_\mu} \frac{w_2}{|x_{*l} \Delta\zeta_1|^\alpha} \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \frac{dx_{*u}}{dt} = \left( \frac{1}{A_\mu} \frac{w_N}{|x_{*u} \Delta\zeta_2|^\alpha} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (26)$$

Таким образом, имеем систему  $N + 1$  ОДУ (22)–(26) относительно  $N + 1$  неизвестных. Значения скорости жидкости, необходимые для вычисления правых частей ОДУ (22)–(25), определяются с использованием модифицированной формулы центральных разностей [13]:

$$v_1 = v_{*l}, \quad v_2 = 0,5(v_{*l} + v_3),$$

$$v_i = \text{sign}(p_{i-1} - p_{i+1}) \left( w_i^{n+1} \left| \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{x_* \Delta f} \right| \right)^{1/n}, \quad i = 3, \dots, N_1, N_1 + 2, \dots, N - 1, \quad (27)$$

$$v_N = 0,5(v_{*u} + v_{N-1}), \quad v_{N+1} = v_{*u}.$$

Здесь

$$\Delta f = \frac{(1 - |\zeta_i|)^{\alpha(n+1)}}{\alpha(n+1) - 1} \left( \frac{1}{(1 - |\zeta_{i+1}|)^{\alpha(n+1)-1}} - \frac{1}{(1 - |\zeta_{i-1}|)^{\alpha(n+1)-1}} \right).$$

Узловые значения разностного давления в (27) вычисляются из дискретизированного уравнения упругости (18) при аппроксимации плотности в окрестности  $j$ -го узла функцией  $w(\zeta) = w_j [(1 - |\zeta|)/(1 - |\zeta_j|)]^{2/3}$ , учитывающей асимптотику раскрытия. При такой аппроксимации входящий в (18) гиперсингулярный интеграл от функции  $(1 - |\zeta|)^{2/3}$  вычисляется аналитически по любому интервалу  $(a, b)$ , а именно: при  $a < 0$ ,  $b < 0$

$$\int_a^b \frac{(1 - |\tau|)^{2/3}}{(\tau - \omega)^2} d\tau = \Phi(\sqrt[3]{-a}, \sqrt[3]{-\omega}) - \Phi(\sqrt[3]{-b}, \sqrt[3]{-\omega}),$$

при  $a > 0, b > 0$

$$\int_a^b \frac{(1 - |\tau|)^{2/3}}{(\tau - \omega)^2} d\tau = \Phi(\sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{\omega}) - \Phi(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{\omega}),$$

где

$$\Phi(\xi, z) = \frac{\xi^2}{z^3 - \xi^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\xi/z - 1)^3}{(\xi/z)^3 - 1} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\xi/z}{3} \right).$$

Для узла  $j = 2$  интегрирование проводится по интервалу  $(-1, -1 + 1,5\Delta\zeta_1)$ , для источника  $j = N_1 + 1$  — по двум интервалам  $(-0,5\Delta\zeta_1, 0)$  и  $(0, 0,5\Delta\zeta_2)$ ; для узла  $j = N$  — по интервалу  $(1 - 1,5\Delta\zeta_2, 1)$ , для прочих узлов — по интервалу  $(\zeta_j - \Delta\zeta/2, \zeta_j + \Delta\zeta/2)$ . Таким образом,

$$p_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=2}^N A_{ij}(w_j + w_{SCj}), \quad i = 2, \dots, N$$

(коэффициенты  $A_{ij}$  получаются путем интегрирования по интервалу, соответствующему номеру  $j$ ;  $w_{SCj} = w_{SC}(\zeta_j)$  — узловые значения раскрытия  $w_{SC}(\zeta)$  при кусочно-постоянном контрасте напряжений). Используя классическое решение [14], получаем

$$w_{SC}(\zeta) = \frac{4}{\pi} \left\{ \Delta\sigma^l [g(\zeta, \zeta^l) - g(\zeta, -1)] + \sum_{s=l+1}^{s=u-1} \Delta\sigma^s [g(\zeta, \zeta^s) - g(\zeta, \zeta^{s-1})] + \Delta\sigma^u [g(\zeta, 1) - g(\zeta, \zeta^{u-1})] \right\},$$

где

$$g(\zeta, \tau) = (\xi_1 - x_1) \operatorname{arch} \left| \frac{x_m^2 - x_1 \xi_1}{x_m (\xi_1 - x_1)} \right| - \sqrt{x_m^2 - x_1^2} \arccos \frac{\xi_1}{x_m}, \quad x_m = \frac{x_{*u} - x_{*l}}{2},$$

$$\xi_1 = \xi_1(\tau) = |x_*(\tau)|\tau - x_0, \quad x_1 = x_1(\zeta) = |x_*(\zeta)|\zeta - x_0, \quad x_0 = \frac{x_{*u} + x_{*l}}{2},$$

$l, u$  — номера слоев, которым принадлежат нижний и верхний концы трещины соответственно;  $\zeta^s$  — нормированная координата границы контакта с номером  $s$ . Суммирование выполняется только при  $u > l + 1$ . Если  $u = l$ , то оба конца трещины находятся в продуктивном слое, контраст напряжений отсутствует ( $\Delta\sigma^l = \Delta\sigma^u = 0$ ) и  $w_{SC}(\zeta) = 0$ . Решение системы (22)–(26) при начальных условиях (21) находится с помощью методов, разработанных в [17, 18]. В данной работе для проведения сравнения применимости различных методов интегрирования при решении системы ОДУ (22)–(26) выбраны три метода: метод Рунге — Кутты пятого порядка, метод обратных разностей Петзольда — Жира для жестких систем и метод Брайтона — Густавсона — Хачтела [18]. При использовании всех этих методов при фиксированной точности интегрирования по времени получены одинаковые (в пределах этой точности) результаты. Сходимость имела место во всех случаях, за исключением случаев очень больших контрастов, рассмотренных ниже. При больших контрастах напряжений устойчивым был только метод Брайтона — Густавсона — Хачтела.

**4. Результаты численных расчетов и их обсуждение.** Задачи о гидроразрыве, являющиеся сильнонелинейными, содержат гиперсингулярный оператор. Поэтому после дискретизации по пространственной переменной эти задачи сводятся к нелинейной системе ОДУ, в правых частях которых содержатся все узловые значения интегрируемой

сеточной функции. При задании контраста напряжений в виде ступенчатой функции задача становится более сложной, поскольку производная разностного давления представляет собой линейную комбинацию дельта-функций. Сходимость, точность и устойчивость решения исследовались в ходе специальных численных экспериментов. При этом использовались указанные выше методы интегрирования по времени и различные сетки, которые в ряде численных экспериментов сгущались вблизи границ слоев, проводилось сравнение результатов численных расчетов с эталонным решением задачи в отсутствие контраста напряжений и с решением для частного случая, приведенным в [11], выполнялась проверка закона сохранения массы.

Описанная в п. 3 схема реализована для произвольной системы слоев с произвольным контрастом напряжений и произвольным количеством  $N_1$  и  $N_2$  точек деления трещины. Ниже приводятся результаты расчетов для случая, когда приток в источнике постоянен ( $Q = \text{const}$ ), а породы малопроницаемы ( $q_l = 0$ ). Начальные условия те же, что и в классической задаче Христиановича — Гиртсма — де Клерка и в работе [11]:  $x_{*l}(0) = 0$ ,  $x_{*u}(0) = 0$ ,  $w_0(0) = 0$ .

До тех пор пока трещина не достигнет одной из границ продуктивного слоя, задача совпадает с классической задачей Христиановича — Гиртсма — де Клерка. Эта задача является автомодельной, и ее решение нетрудно найти с точностью до пяти значащих цифр (см. [12]). При оценке предложенного алгоритма эталонное решение, с которым проводилось сравнение, находилось с указанной точностью с использованием специально разработанной подпрограммы. Расчеты, выполненные при различном количестве точек деления, показали, что при  $N_1 = N_2 = 51$  максимальная погрешность определения раскрытия не превышает 1,3 %. В дальнейшем при учете контраста напряжений большинство расчетов проводилось при этом числе узлов, но в некоторых случаях (при проверке надежности результатов, а также при детализации поля течения в случаях очень больших контрастов) оно увеличивалось до 201. Устойчивость интегрирования по времени проверена для трех указанных выше методов. При решении автомодельной задачи с их использованием получены одинаковые результаты. Таким образом, в случае однородных напряжений использованная схема дискретизации по пространственной координате обеспечивает достаточную для приложений точность.

Аналогичный вывод позволяют сделать результаты сравнения проведенных расчетов с данными работы [11], в которой рассматривался продуктивный пласт толщиной  $H$ , находящийся между двумя полуплоскостями с одинаковым скачком напряжений  $\Delta\sigma$ . Следует отметить, что в [11] не приводятся данные об алгоритме, точности и устойчивости решения. Однако из контекста следует, что использовалось слабосингулярное обращение гиперсингулярного оператора. Следовательно, применялся алгоритм, отличающийся от предлагаемого в данной работе. Поэтому согласие результатов численных расчетов, выполненных в [11] и в данной работе, свидетельствует об их надежности.

Сравнительные расчеты выполнены при тех же значениях ненормированных величин, которые использовались в работе [11]:  $H = 50$  м,  $E' = 2,5 \cdot 10^4$  МПа,  $n = 1$ ,  $\mu' = 1,2$  Па·с,  $Q = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, и трех положительных значений контраста напряжений:  $\Delta\sigma = 0,5; 1,5; 3,5$  МПа. При этих исходных параметрах результаты расчетов, проведенных с помощью трех указанных выше методов интегрирования, также совпадали. Полученные профили раскрытия  $w(x, t)$  и длина трещины совпадают с приведенными в работе [11].

Проведена также проверка выполнения закона сохранения массы. В случае несжимаемой жидкости он является законом сохранения объема. Согласно этому закону при отсутствии утечки в породы объем жидкости в трещине

$$J(t) = \int_S w dS$$

в любой момент времени  $t \geq t_0$  должен быть равен объему жидкости

$$V(t) = \int_{t_0}^t Q(t) dt,$$

закачанной к этому моменту. В рассматриваемой одномерной задаче при постоянной интенсивности закачивания  $Q$  и  $t_0 = 0$  имеем

$$J(t) = \int_{x_{*l}}^{x_{*u}} w(x) dx, \quad V(t) = Qt,$$

закон сохранения выражается равенством

$$\int_{x_{*l}}^{x_{*u}} w(x) dx = Qt.$$

Таким образом, при произвольной геометрии слоев и любых контрастах напряжений для проверки закона сохранения достаточно вычислить интеграл от раскрытия по текущей длине трещины и сравнить его с произведением  $Qt$ .

Расчеты проводились по формуле трапеций с использованием текущих узловых значений раскрытия. Результаты расчетов показали, что закон сохранения массы всегда выполняется с высокой точностью в интервале времени, составляющем три порядка. Даже при небольшом количестве узлов  $N_1 = N_2 = 21$  различие между  $J(t)$  и  $Qt$  наблюдалось лишь в четвертой значащей цифре; при  $N_1 = N_2 = 121$  различие имело место в шестой цифре.

Ниже рассматриваются ранее не изучавшиеся случаи очень больших положительных контрастов напряжений, случаи отрицательных контрастов и случаи системы слоев с положительными и отрицательными контрастами напряжений.

В случае барьера с большим положительным контрастом приняты такие же геометрическая схема и исходные параметры, как при сравнении с данными работы [11]. Результаты численных расчетов для барьера с контрастом  $\Delta\sigma = 50$  МПа приведены на рис. 2. Видно, что, до тех пор пока среднее разностное давление в трещине на порядок меньше контраста напряжений  $\Delta\sigma$ , она практически неподвижна. Время задержки движения трещины составляет приблизительно 3000 с. При этом увеличение среднего раскрытия практически пропорционально объему поступающей жидкости (см. рис. 2, в). При достижении барьера скорость трещины уменьшается на два порядка (с 0,100 до 0,001 м/с) и осциллирует в окрестности этого малого значения (см. рис. 2, г) вплоть до момента времени, в который среднее разностное давление  $p_{av}$  становится порядка контраста  $\Delta\sigma$ .

Осцилляцию вычисленной скорости распространения  $v_*$  можно объяснить сложным характером движения частиц вблизи фронта после достижения барьера. Рассмотрим предельный случай очень большого барьера, когда  $\Delta\sigma \rightarrow \infty$  и барьер непреодолим для трещины. При его достижении скорость движения трещины и соответственно скорость частиц вблизи фронта скачком обращаются в нуль. Объем жидкости, поступающей в трещину, полностью поглощается за счет движения в направлении, перпендикулярном стенкам канала, т. е. нормальная составляющая скорости преобладает над составляющей вдоль канала. Тем самым нарушается основное допущение, принимаемое при выводе уравнения типа уравнения Пуазейля и состоящее в пренебрежении нормальной компонентой вектора скорости в силу ее малости по сравнению с продольной составляющей. При достижении непреодолимого барьера в его окрестности возникает пограничный слой, в котором вектор скорости резко меняет направление, а закон Пуазейля неприменим. В пограничном

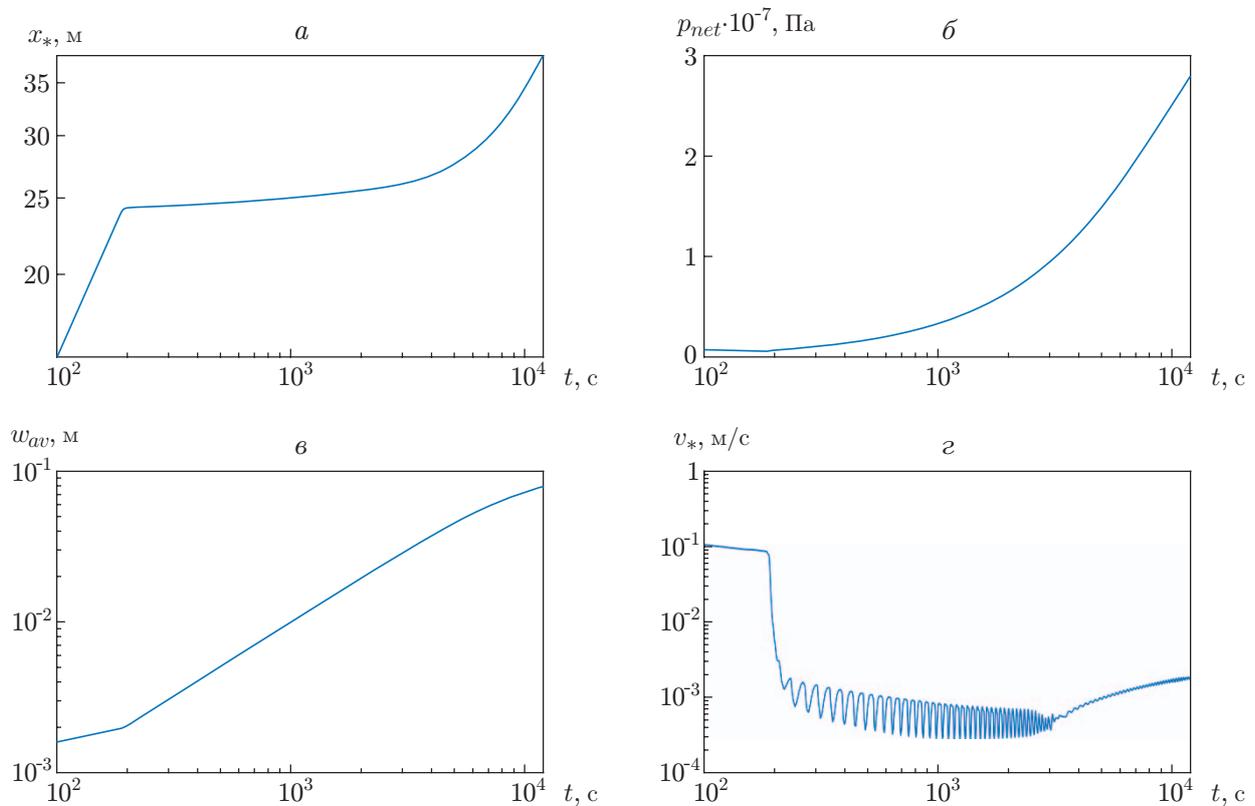


Рис. 2. Зависимости полудлины трещины (а), среднего давления (б), среднего раскрытия (в) и скорости движения трещины (г) от времени при переходе через барьер с контрастом  $\Delta\sigma = 50$  МПа

слое возможно обратное движение, вызванное отражением от барьера. Ясно, что никакое решение, основанное на использовании уравнения типа уравнения Пуазейля, не может количественно описать движение вблизи труднопреодолимого (в пределе — непреодолимого) барьера. Можно лишь получить более или менее удовлетворительное качественное описание физической картины.

При использовании мелкой сетки ( $N_1 = N_2 = 201$ ) детальные расчеты, выполненные на основе формулы Пуазейля, показали, что при контрасте напряжений  $\Delta\sigma = 5$  МПа после уменьшения скорости жидкости практически до нуля в момент достижения барьера ( $t = 201,4$  с) в области вблизи барьера, протяженность которой составляет 0,015 длины трещины, наблюдается возвратное движение в течение приблизительно 1 с. Его скорость на порядок меньше скорости движения трещины в момент достижения барьера. При  $t > 211$  с обратное движение отсутствует, осцилляции скорости на основной части трещины исчезают. Трещина расширяется при практически равномерном давлении и близкой к нулю продольной скорости частиц, до тех пор пока давление не увеличится до значения, близкого к контрасту напряжений  $\Delta\sigma$ . С учетом сказанного выше можно полагать, что использованный алгоритм в целом адекватно описывает физическую картину, возникающую непосредственно после достижения труднопреодолимого барьера. Окончательный вывод о возможности существования локального возвратного движения можно сделать только при учете двумерного течения в пограничном слое.

Для того чтобы определить, какое влияние оказывает скачок напряжения на результаты решения задачи, выполнены расчеты для контраста  $\Delta\sigma = 50$  МПа, который моделиро-

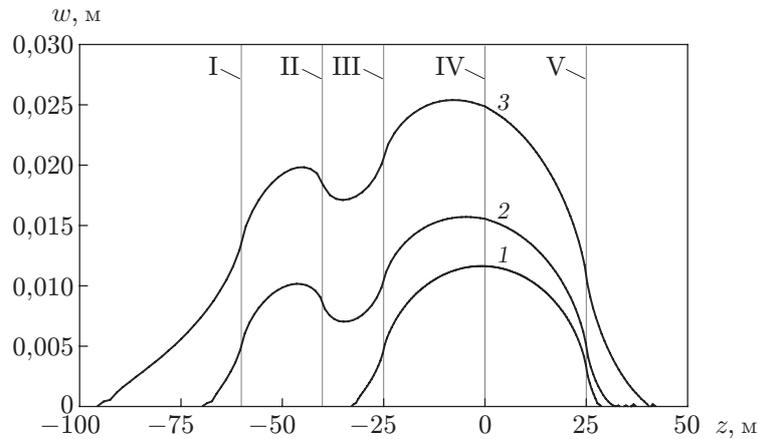


Рис. 3. Профили раскрытия трещины в различные моменты времени при несимметричной структуре слоев с различным контрастом напряжений:

I–V — границы слоев (I —  $\Delta\sigma = 5$  МПа, II —  $\Delta\sigma = 0$ , III —  $\Delta\sigma = 5$  МПа, IV —  $\Delta\sigma = 0$ , V —  $\Delta\sigma = 7,5$  МПа); 1 —  $t = 1000$  с, 2 —  $t = 2000$  с, 3 —  $t = 3000$  с

вался непрерывным изменением от 0 до 50 МПа в узкой полосе шириной 2 м, расположенной симметрично относительно границы  $x = H/2 = 25$  м. В расчетах для случая непрерывного распределения контраста сетка вблизи барьера сгущалась. Установлено, что при ступенчатом и непрерывном изменении контраста напряжений профили раскрытия практически совпадают.

Установлено, что в отличие от случая положительного контраста переход через контакт с отрицательным контрастом ( $\Delta\sigma = -0,5; -1,5; -3,5$  МПа) приводит к резкому ускорению движения трещины и падению среднего давления в ней. Однако, так же как в случае положительного контраста, с увеличением времени скорость асимптотически стремится к значению, соответствующему решению классической задачи Христиановича — Гиртсма — де Клерка ( $\Delta\sigma = 0$ ), а среднее разностное давление приближается к заданному контрасту напряжений  $\Delta\sigma$ .

Рассмотрим несимметричную систему слоев. На рис. 3 показаны профили раскрытия, в случае когда вне продуктивного слоя толщиной  $H = 50$  м имеются слои различной толщины с различными контрастами напряжений. Модуль упругости, вязкость жидкости и ее приток те же, что принимались выше. На рис. 3 видно, что наличие труднопреодолимого барьера с положительным контрастом напряжений ( $\Delta\sigma = 7,5$  МПа) приводит к практически полному прекращению движения трещины. После преодоления барьера с меньшим контрастом ( $\Delta\sigma = 5$  МПа) она быстро распространяется в слое, где контраст падает до нуля.

Введем параметр, характеризующий переход через границу контакта, и определим его характерные значения. В момент достижения границы трещина находится под действием разностного давления, интегральной характеристикой которого, как и в псевдотрехмерной модели [2, 8, 11], служит среднее значение  $P$ . При наличии на полуплоскости контраста напряжений  $\Delta\sigma$  отсутствует характерный линейный размер и единственной безразмерной комбинацией, характеризующей переход, является отношение

$$R = \frac{\Delta\sigma}{P} \quad (28)$$

( $R > 0$  в случае проникания трещины из слоя с меньшим сжимающим напряжением в слой с большим сжимающим напряжением,  $R < 0$  в случае проникания трещины из слоя с боль-

шим сжимающим напряжением в слой с меньшим сжимающим напряжением, значение  $R = 0$  соответствует отсутствию контраста).

Рассмотрим задачу о слое толщиной  $H$ , расположенном между полуплоскостями с контрастом напряжений  $\Delta\sigma$ . В данной задаче момент  $t_H$  достижения контакта и среднее разностное давление  $P$  в этот момент определяются автомодельным решением, которое находится с высокой точностью. Момент  $t_H$  определяется из условия  $x_*(t_H) = H/2$ , а для вычисления среднего давления из автомодельного решения получаем формулу

$$P = \frac{\sqrt[4]{Q\mu'E'^3}}{k_0\sqrt{H}}.$$

В данных расчетах коэффициент  $k_0$  определяется с точностью не менее четырех значащих цифр:  $k_0 = 2,360$ . Подставляя  $P$  в (28), получаем

$$R = k_0 \frac{\Delta\sigma\sqrt{H}}{\sqrt[4]{Q\mu'E'^3}}.$$

Из результатов расчетов, проведенных в данной работе и работе [11] при фиксированных значениях  $H$ ,  $Q$ ,  $\mu'$ ,  $E'$  и различных значениях контраста  $\Delta\sigma$ , следует, что при  $|R| < 1$  длина трещины и профиль раскрытия практически такие же, как и при движении в среде без контраста напряжений. Следовательно, значениям  $|R| \leq 1$  соответствует небольшой контраст. При  $R > 6$  трещина перед барьером практически останавливается. Как отмечено выше, дальнейшее движение трещины происходит только после того, как среднее разностное давление в ней становится равным контрасту напряжений  $\Delta\sigma$ . При  $R < -6$  происходит резкое ускорение движения трещины. Следовательно, значения  $|R| > 6$  соответствуют большому контрасту напряжений, интервал  $1 < |R| < 6$  — умеренному контрасту.

Для случая положительных контрастов аналогичные результаты получены в работе [11], в которой на основе анализа размерностей исходных величин  $H$ ,  $Q$ ,  $\mu'$ ,  $E'$ ,  $\Delta\sigma$  введен безразмерный параметр  $\tilde{H} = \Delta\sigma^2 H / \sqrt{Q\mu'E'^3}$ . Ясно, что параметр  $\tilde{H}$  пропорционален квадрату параметра  $R$ :  $\tilde{H} = (R/k_0)^2$ , т. е. при положительных контрастах параметр  $\tilde{H}$  практически эквивалентен параметру  $R$ . В работе [11] полагалось, что значения  $\tilde{H} = 0,13$ ;  $1,16$ ;  $6,33$  соответствуют малым, умеренным и большим контрастам напряжений. Соответствующие значения параметра  $R$  равны  $0,85$ ;  $2,54$ ;  $5,93$ , что согласуется с оценками малых, умеренных и больших контрастов, полученными в данной работе.

Параметр  $\tilde{H}$  нетрудно обобщить на случай отрицательного контраста, введя множитель  $\text{sign } \Delta\sigma$ . Однако параметр  $\tilde{H}$  соответствует частному случаю и, в отличие от параметра  $R$ , в общем случае неприменим.

**Заключение.** В работе предложены обобщение и метод решения задачи Христиановича — Гиртсма — де Клерка в случае, когда напряжения, вызывающие смыкание берегов трещины гидроразрыва, произвольным образом изменяются в направлении ее роста.

Установлено, что разработанный метод решения применим при ступенчатом изменении контраста напряжений, который может быть как положительным, так и отрицательным.

При переходе через положительный (отрицательный) барьер движение конца трещины, пересекающего барьер, замедляется (ускоряется).

Особенности перехода через границу слоев характеризуются безразмерным параметром, представляющим собой отношение скачка сжимающих напряжений к средней разности давления жидкости в трещине и сжимающего напряжения в момент достижения границы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Adachi J., Siebrits E., Pierce A., Desroches J.** Computer simulation of hydraulic fractures // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2007. V. 44, N 5. P. 739–757.
2. **Mack M. G., Warpinski N. R.** Mechanics of hydraulic fracturing // Reservoir simulation / Ed. by M. J. Economides, K. G. Nolte. 3rd ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2000. Chap. 6.
3. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
4. **Geertsma J., de Klerk F.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petroleum Tech. 1969. V. 21. P. 1571–1581.
5. **Гордеев Ю. Н., Зазовский А. Ф.** Автомодельное решение задачи о глубокопроникающем гидравлическом разрыве пласта // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 119–131.
6. **Алексеев О. П., Вайсман А. М.** Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1999. № 3. С. 3–13.
7. **Adachi J., Detournay E.** Self-similar solution of plane-strain fracture driven by a power-law fluid // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2002. V. 26. P. 579–604.
8. **Rahman M. M., Rahman M. K.** A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand // Energy Sources. Pt A: Recovery, Utilizat., Environ. Effects. 2010. V. 32, N 15. P. 1416–1436.
9. **Linkov A. M.** On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity // Intern. J. Engng Sci. 2012. V. 52. P. 77–88.
10. **Гордеев Ю. Н., Бабаева Д. О., Сандаков Е. Б.** Точное квазистационарное решение задачи о гидравлическом разрыве проницаемого пласта // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 87–94.
11. **Dontsov E. V., Peirce A. P.** An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness // Engng Fracture Mech. 2015. V. 142. P. 116–139.
12. **Wrobel M., Mishuris G.** Hydraulic fracture revisited: Particle velocity based simulation // Intern. J. Engng Sci. 2015. V. 94. P. 23–58.
13. **Линьков А. М.** Численное решение плоской задачи о гидроразрыве в модифицированной постановке при произвольных начальных условиях // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2016. № 2. С. 48–57.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М.: Наука, 1966.
15. **Ioakimidis N. I.** Application of finite-part integrals to the singular equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity // Acta Mech. 1982. V. 28. P. 239–254.
16. **Spence D. A., Sharp P. W.** Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // Proc. Roy Soc. London. Ser. A. 1985. V. 400. P. 289–313.
17. **Самарский А. А.** Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989.
18. **Brayton R. K., Gustavson F. G., Hachtel G. D.** A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas // Proc. IEEE. 1972. V. 60, N 1. P. 98–108.

*Поступила в редакцию 3/VIII 2016 г.,  
в окончательном варианте — 27/IV 2017 г.*