Теплофизика и аэромеханика, 2023, том 30, № 5

УДК 532.5:536.21

Тепловые граничные условия на поверхности раздела жидкость – твердое тело в случае теплопроводного тела: новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана

Ю. Дахани[1], А. Амахмид[1], М. Хаснауи[1], С. Хаснауи [1], А. аль Мансури[1,2], И. Филахи[1]

[1]*Университет им. Кади Айяд, аффилированный с НСНИТ, Марракеш, Марокко*

[2]*Национальная школа прикладных наук, Университет Ибн Зохра, Агадир, Марокко*

E-mail: youssef.dahani@uca.ac.ma

Предложен новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана для тепловых задач, который применяется для реализации граничных условий на границе раздела жидкость – твердое тело. На основе этого подхода создан и протестирован компьютерный код. Верификация проводилась путем сравнения с надежными численными данными из литературных источников для вариантов теплопроводных блоков с квадратным и круглым сечениями. Для обтекания блока с круглым сечением доступно также аналитическое решение и экспериментальные данные. Тестирование программы показало, что она подходит для решения задач с поверхностью раздела фаз при высоких отношениях теплопроводностей соседних фаз. В работе проведена верификация метода для случая теплопроводного блока с квадратным сечением, а также выполнено численное моделирование для задачи сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в квадратной полости, которая вмещает блок с круглым сечением. Новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана снижает требования к компьютерной памяти, а также решает многие численные проблемы, возникающие при комбинировании метода решеточных уравнений Больцмана и классических методов моделирования.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, сопряженный теплоперенос, круговой цилиндр, теплопроводное тело.

Введение

Сопряженная кондуктивно-конвективная теплопередача в прямоугольной полости — это задача, которая постоянно возникает в различных областях науки и техники, например, при охлаждении электроники, в промышленных процессах, энергетических установках, при тепловой изоляции элементов воздушных аппаратов, в системах для хранения энергии [1 – 3] и в ряде других случаев. Естественная конвекция изучалась экспериментальными и теоретическими методами в течение десятков лет [4], подробный обзор по теме представлен в работе [5].

Как правило, в приложениях с естественной конвекцией исследователи предпочитают использовать дополнительные пассивные элементы при создании конфигурации полости с целью повлиять на теплообмен и гидродинамику течения, но без дополнительных расходов энергии. Такой пассивный элемент в форме теплопроводящего твердого тела вызывает сопряженный теплообмен, что оказалось полезным при решении проблемы теплообмена в турбинах [6]. Из-за сложности указанной геометрии для решения общих уравнений, описывающих теплообмен и гидродинамику, широко применяются численные методы. Обзор литературы показывает, что в таких задачах для исследования естественной конвекции в полостях, в которых присутствует перегородка или теплопроводное внутреннее тело, часто используются подходящие численные методы, такие как метод конечных объемов [7 – 9] и метод конечных разностей [10].

Что касается численного моделирования, то здесь классические методы основаны на решении уравнений Навье – Стокса. Эти методы предполагают дискретизацию макроскопических уравнений по пространству и времени. Метод решеточных уравнений Больцмана (LBM) представляет собой новый подход для пространственного мезомасштаба (отличный от обычных макроскопических методов) и считается перспективным методом для моделирования течений. Основанный на кинетической теории газов [11, 12], он является усовершенствованным вычислительным инструментом для моделирования течений и физических процессов на малых масштабах. По сравнению с известными методами численного моделирования течений, самыми важными преимуществами LBM являются стабильность, надежность и простота в задании граничных условий для объектов со сложной геометрией. Улучшенные варианты LBM для тепловых исследований ранее применялись к задачам естественной конвекции [13, 14]. Хотя этот метод стал популярен для исследований теплопереноса, однако анализ литературы показал, что существует совсем немного работ по изучению естественной конвекции в полости (с теплопроводным телом внутри), выполненных с применением метода решеточных уравнений Больцмана. Похоже, что применение данного метода для моделирования сопряженного теплопереноса стало новым направлением для специалистов в области решеточных уравнений. Обычно для задач сопряженного теплопереноса применяется гибридный подход: для моделирования потока используется метод решеточных уравнений Больцмана (LBM), а для решения уравнений энергии задействованы традиционные методы вычислительной гидродинамики [15 – 19].

Исходя из вышеизложенного с упором на задачи сопряженного теплопереноса, в настоящей работе используется новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана для тепловых задач (TLBM) при моделировании сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в полости с прямоугольной геометрией. В отдельных работах ранее уже применялся метод TLBM для изучения сопряженного теплопереноса для базовых конфигураций [20 – 22]. В этих публикациях принималось, что решеточные уравнения Больцмана имеют двойную природу, обусловленную двумя видами распределения теплофизических параметров: одно распределение связано с областью флюида (жидкость или газ), а другое — с твердым телом. Как правило, исследования касались материалов, имеющих умеренное соотношение между теплопроводностью для твердой фазы и флюида (в интервале от 0,1 до 20).

В настоящем исследовании представлен новый подход в работе с тепловыми граничными условиями для поверхности раздела между флюидом (газ) и твердым телом. При таком подходе отсутствует необходимость рассматривать две функции распределения для термодинамических величин при вычислении общего температурного поля в вычислительной области, принадлежащей флюиду (например, воздуху) и области твердого тела.

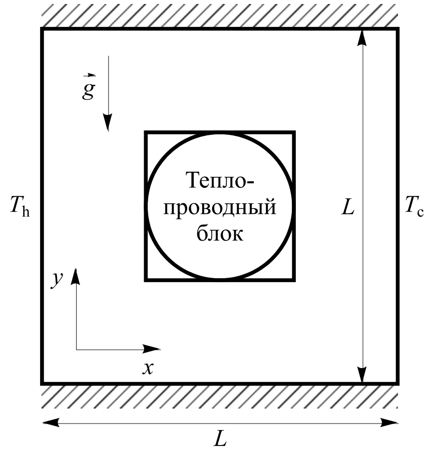

Рис. 1. Геометрия задачи.

Предполагается, что такой подход позволит проводить вычисления при очень высоком или очень низком отношении теплопроводностей двух сред без трудностей с устойчивостью вычислений. Для сравнения численных результатов с надежными данными, приведенными в литературных источниках, проводятся две стадии верификации численного моделирования. Сначала численные результаты воспроизводятся для случая препятствия в виде цилиндра, а затем рассматривается сопряженный теплоперенос для отношения теплопроводностей двух сред в широком интервале — от 10^{-3} до 10^3.

1. Математическая модель

1.1. Описание проблемы

На рис. 1 представлена конфигурация, которая состоит из заполненной воздухом полости квадратного сечения с неоднородным нагревом и длиной L. В середине полости размещается теплопроводный блок с квадратным (для проверки модели) или круглым сечением. Полость имеет теплоизолированные горизонтальные стенки. Численный анализ проводится для числа Рэлея $\left(\mathrm{Ra} = \dfrac{g\beta \Delta T' L^3}{a\nu}\right)$ в интервале от 10^5 до 10^7 и при трех величинах отношения теплопроводностей, которые соответствуют случаям низкотеплопроводного ($k_\mathrm{r} = 10^{-3}$), воздухоподобного ($k_\mathrm{r} = 1$) и высокотеплопроводного ($k_\mathrm{r} = 10^3$) материалов.

1.2. Основные уравнения

Двухмерная задача конвективно-кондуктивного теплопереноса описывается тремя уравнениями: баланс массы (см. ниже уравнение (1)), баланс количества движения (см. уравнения (2) и (3)) и баланс энергии (уравнение (4)):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \tag{2}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \rho g, \tag{3}$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_x \frac{\partial T'}{\partial x} + u_y \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \left(k \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T'}{\partial y} \right). \tag{4}$$

В начальный момент времени система считается неподвижной при однородной температуре $T_0' = (T_h' + T_c')/2.$ В представленной задаче блок внутри полости неподвижен, а жидкость считается ньютоновской и несжимаемой. Кроме того, все теплофизические параметры жидкости считаются постоянными (вычислены по средней температуре T'_0), за исключением величины плотности, которая появляется в члене уравнения (3), отвечающем за подъемную силу; здесь плотность зависит от температуры и описывается приближением Буссинеска.

При решении задачи используются безразмерные переменные, построенные на основе соответствующих величин длины, скорости и температуры: $(X, Y) = \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right)$, $(U, V) = \left(\frac{u_x L}{\alpha}, \frac{u_y L}{\alpha}\right)$ и $T = \frac{T' - T_0'}{T_h' - T_c'}$.

Термические граничные условия на стенках полости следующие:

$$T(0, Y) = 0{,}5, \tag{5}$$

$$T(1, Y) = -0{,}5, \tag{6}$$

$$(\partial T/\partial Y)_{Y=0} = 0, \tag{7}$$

$$(\partial T/\partial Y)_{Y=1} = 0. \tag{8}$$

Непрерывность теплового потока на границе раздела жидкость – твердое тело описывается равенством:

$$k_f \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_f = k_s \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s, \tag{9}$$

где n — нормаль к границе в любой точке поверхности раздела фаз. Условия прилипания и непротекания накладываются на границах твердого тела (на стенках полости и на границе раздела фаз):

$$U = V = 0. \tag{10}$$

1.3. Число Нуссельта и функция тока

После вычисления полей температуры и скорости можно проанализировать теплоперенос посредством числа Нуссельта на нагретой стенке. Локальные и средние величины этого числа вычисляются в безразмерном виде следующим образом:

— локальное число Нуссельта: $\mathrm{Nu}_Y = -\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{X=0};$ (11)

— среднее число Нуссельта: $\mathrm{Nu} = \int_0^1 \mathrm{Nu}_Y \, dY.$ (12)

Картину течения и интенсивность конвекции можно анализировать в терминах функции тока, которая связана со скоростью следующими соотношениями:

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \text{ и } U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}. \tag{13}$$

2. Численный метод

Метод решеточных уравнений Больцмана является результатом развития метода LGA (метод решеточного газа), который считается хорошей альтернативой классическим методам гидродинамического численного моделирования. В этом методе на микроскопическом уровне предполагается, что флюид является совокупностью частиц, которые движутся в различных направлениях и обмениваются импульсом в моменты соударения. За последние десятилетия этот метод приобрел популярность при решении задач гидродинамического моделирования. Его успех основан на решении простого уравнения Больцмана [23]:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + c_k \cdot \nabla f_k = \Omega_{\mathrm{f},k}(f_k). \tag{14}$$

Левая часть уравнения (14) описывает шаг распространения, при котором распределение плотности f_k распространяется от одного узла решетки к соседним узлам. Правая часть уравнения (14) содержит оператор столкновений $\Omega_{\mathrm{f},k}\left(f_k\right)$, который является сложным и нелинейным (в смысле дискретной функции плотности вероятности f_k). Авторы [23] ввели новый вариант линеаризации для оператора столкновений. Такой подход сводит хаотичный процесс столкновений к простой релаксации функции распределения: от состояния столкновения до некого равновесного состояния, которое описывается равновесной функцией f_k^{eq}. Дискретизация уравнений для расчетной области флюида основана на модели решетки D_2Q_9 (рис. 2), что задает девять дискретных направлений ($0 \le k \le 8$), соответствующих девяти дискретным скоростям (c_k) согласно уравнению (15) из работы [24]:

$$c_k = \begin{cases} (0, 0), \ k = 0, \\ c\left(\cos\left[(k-1)\dfrac{\pi}{2}\right], \ \sin\left[(k-1)\dfrac{\pi}{2}\right]\right), \ k = 1, 2, 3, 4, \\ \sqrt{2}c\left(\cos\left[(2k-9)\dfrac{\pi}{4}\right], \ \sin\left[(2k-9)\dfrac{\pi}{4}\right]\right), \ k = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \tag{15}$$

В настоящем исследовании реализована схема столкновений с множеством времен релаксации (MRT), предложенная в работе [25]. При этом для описания распределения температуры используется схема столкновений с единственным временем релаксации (SRT), которая рассматривалась в работе [26]. Плотность флюида и величины скорости вычисляются из дискретного уравнения Больцмана с учетом внешней силы:

$$\tilde{f}_k\left(r,t\right) = f_k\left(r,t\right) - \Omega_{\mathrm{f},k}\left(f_k\right) \text{ (шаг столкновений)}, \tag{16}$$

$$\tilde{f}_k\left(r + c_k \Delta t, t + \Delta t\right) = \tilde{f}_k\left(r,t\right) \text{ (шаг распространения)}. \tag{17}$$

Так же как и для плотности, поле температуры вычисляется с помощью аналогичного уравнения Больцмана на основе второй функции распределения $g_k(r, t)$:

$$\tilde{g}_k\left(r,t\right) = \\ = g_k\left(r,t\right) - \frac{1}{\tau_{\mathrm{g}}}\left(g_k(r,t) - g_k^{\mathrm{eq}}(r,t)\right), \text{(шаг столкновений)}, \tag{18}$$

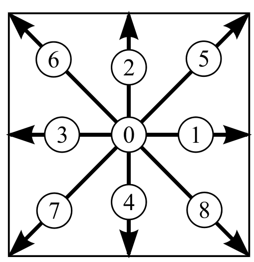

Рис. 2. Схема двумерной модели D_2Q_9 с девятью скоростями.

$$g_k\left(r + c_k\Delta t,\ t+\Delta t\right) = \tilde{g}_k\left(r, t\right) \quad \text{(шаг распространения)}, \tag{19}$$

здесь параметры $r(x, y)$, τ_g и Δt означают соответственно положение частицы, время релаксации тепловой функции распределения и шаг по времени. Связь между временем релаксации τ_g и коэффициентом температуропроводности α задается с помощью метода Чапмана – Энского [27]. Это позволяет далее получить макроскопические уравнения из уравнения Больцмана с помощью соотношения

$$\tau_g = \left(0{,}5 + \alpha\Big/\left(\Delta t\, c_s^2\right)\right)^{-1}, \tag{20}$$

где $c_s = c\big/\sqrt{3}$ — скорость звука для модели D2Q9, $c = \Delta x/\Delta t = 1$ — скорость частицы.

Как отмечалось выше, система изменяется согласно двум попеременным шагам столкновения (см. уравнения (16) и (18)) и распространения (17) и (19). Это распространение соответствует инерционным членам в уравнениях Навье – Стокса, а вязкая диссипация и тепловая диффузия связаны с параметрами релаксации. Далее передвижение частиц происходит на микроуровне для SRT- или MRT-схем. Главное различие между этими двумя схемами состоит в процессе столкновений в микроскопическом пространстве $\left\{c_\kappa \middle| k = 0, \ldots, 8\right\}$: для STR-схемы реализуется одно время релаксации для всех направлений, а для MRT-схемы применяются различные скорости релаксации для макропространства $\left\{m_\kappa \middle| k = 0, \ldots, 8\right\}$. При моделировании течения переход между двумя видами пространства описывается матрицей преобразований M размерностью 9×9 согласно следующему уравнению:

$$m = M f = \left(\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, p_{xx}, p_{xy}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{21}$$

Величина e связана с кинетической энергией, ε — с квадратом кинетической энергии, (q_x, q_y) — с компонентами плотности теплового потока; $\left(j_x, j_y\right) = \rho\left(u_x, u_y\right)$ и $\left(p_{xx}, p_{xy}\right)$ — диагональные и внедиагональные компоненты тензора напряжений.

Ортогональная матрица преобразований M для конкретной схемы D2Q9 выглядит следующим образом [18]:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

За исключением сохраняющихся моментов (то есть плотности и компонент количества движения), остальные релаксируют к состоянию равновесия при различных скоростях релаксации. Вектор момента после столкновения вычисляется с помощью следующего уравнения:

$$\tilde{m}(r,t) = m(r,t) - S_{\mathrm{f}}\left[m(r,t) - m^{\mathrm{eq}}(r,t)\right], \tag{23}$$

где $S_{\mathrm{f}} = \left\{ s_{\mathrm{f},k} / k = 0,...,8 \right\}$ — вектор скоростей релаксации, m^{eq} — вектор момента в равновесном состоянии.

Очевидно, что скорости релаксации для сохраняемых моментов ($m_0 = \rho$, $m_3 = j_x = \rho u_x$ и $m_5 = j_y = \rho u_y$) равны нулю (s_0, s_3, $s_5 = 0$). Кроме того, скорости релаксации s_1, s_2, s_4 и s_6 могут свободно подстраиваться в интервале между 1 и 1,4 для поддержания устойчивости вычислительного процесса. Две оставшиеся скорости равны обратной величине времени релаксации ($s_7 = s_8 = 1/\tau_{\mathrm{f}}$). Последняя вычисляется по формуле $\tau_{\mathrm{f}} = 0,5 + \nu / \left(\Delta t c_{\mathrm{s}}^2\right)$, в которой среди прочих параметров присутствует кинематическая вязкость. Соответствующие равновесные моменты для матрицы (для неконсервативных ячеек) описывались в работе [28]:

$$\begin{cases} m_1^{\mathrm{eq}} = e^{\mathrm{eq}} = -2\rho + 3\left(j_x^2 + j_y^2\right), \\ m_2^{\mathrm{eq}} = \varepsilon^{\mathrm{eq}} = \rho - 3\left(j_x^2 + j_y^2\right)/\rho, \\ m_4^{\mathrm{eq}} = q_x^{\mathrm{eq}} = -j_x, \\ m_6^{\mathrm{eq}} = q_x^{\mathrm{eq}} = -j_y, \\ m_7^{\mathrm{eq}} = p_{xx}^{\mathrm{eq}} = \left(j_x^2 - j_y^2\right)/\rho, \\ m_8^{\mathrm{eq}} = p_{xy}^{\mathrm{eq}} = j_x\, j_y/\rho. \end{cases} \tag{24}$$

Распределение Максвелла для теплового равновесия в соответствии со схемой D2Q9 SRT описывается соотношением [29]

$$g_k^{\mathrm{eq}}(r,t) = \omega_k T\left[1 + 3\frac{c_k u}{c^2}\right]. \tag{25}$$

Вектор весовых коэффициентов для схемы решеточных уравнений D2Q9 обозначается как ω_k и задается следующими выражениями:

$$\omega_k = \begin{cases} 4/9, & k = 0, \\ 1/9, & k = 1,2,3,4, \\ 1/36, & k = 5,6,7,8. \end{cases} \tag{26}$$

Подъемная сила как функция температуры описывается в приближении Буссинеска [30]:

$$F = \rho g \beta (T - T_0), \tag{27}$$

где $T_0 = (T_{\mathrm{h}} + T_{\mathrm{c}})/2$ и β — коэффициент теплового расширения.

Хотя на микроуровне между частицами постоянно происходит обмен импульса в результате столкновений, однако на макроуровне (в отсутствие внешних сил) импульс сохраняется. Появление подъемной силы вносит изменение в закон сохранения количества движения, и поэтому y-компонента количества движения после столкновений $\tilde{m}_5(r,t)$ вместо (23) описывается выражением:

$$\tilde{m}_5(r,t) = m_5(r,t) + F.$$

Поскольку фаза переноса описывается уравнениями (17) и (19), то вычисление макроскопических величин (а именно, плотности, температуры и компонент скорости) сводится к суммированию по девяти направлениям:

$$\rho = m_0 = \sum_{k=0}^{k=8} f_k, \tag{28}$$

$$\rho u_x = m_3 = \sum_{k=0}^{k=8} c_{kx} f_k, \tag{29}$$

$$\rho u_y = m_5 = \sum_{k=0}^{k=8} c_{ky} f_k, \tag{30}$$

$$T = \sum_{k=0}^{k=8} g_k, \tag{31}$$

где c_{kx} и c_{ky} — это проекции микроскопической скорости c_k на оси x и y соответственно.

На практике перед применением LBM вязкость на масштабе решетки устанавливается произвольно на уровне 0,01. Такой подход иногда приводит к неустойчивости нефизического плана из-за необоснованного выбора этого параметра. С другой стороны, возможно получить более точную оценку вязкости, используя характерную скорость из задачи о естественной конвекции $\left(u \sim \sqrt{g\beta\Delta TL}\right)$ (см. [31]). Также вязкость можно выразить через безразмерные параметры Gr, n и Ma (где n — число пространственных шагов решетки Δx, $L = n\Delta x$) в виде соотношения

$$v = \frac{\mathrm{Ma} \cdot n \cdot \Delta x \cdot c^2}{\sqrt{3 \cdot \mathrm{Gr}}}, \tag{32}$$

здесь Ma — число Маха. В настоящей работе используется Ma = 0,1 (этот параметр должен быть ниже 0,3 для соблюдения предположения о несжимаемом потоке).

3. Численные тесты

3.1. Сопряженный конвективно-кондуктивный теплоперенос для воздушной полости с теплопроводным блоком квадратного сечения

Условия прилипания и непроницаемости — это динамические условия на твердых стенках. Среди преимуществ LBM можно отметить простоту реализации этих граничных условий. Тепловые граничные условия задаются как постоянные температуры на вертикальных стенах (уравнения (5) и (6)), адиабатические условия — на горизонтальных стенках (уравнения (7) и (8)), а также в виде непрерывности температуры и теплового потока по нормали на границе раздела фаз (9). Все указанные граничные условия вместе с условиями на границе раздела фаз (5) – (9) выражены через макроскопические величины (скорость и температуру) или через их градиенты. В последующих разделах эти граничные условия, сформулированные на макроскопическом уровне, будут формализованы для LBM.

3.1.2. Динамические граничные условия

Схема-отражение должна удовлетворять критериям прилипания потока и непроницаемости на границах твердого тела. Как показано на рис. 3, функции распределения

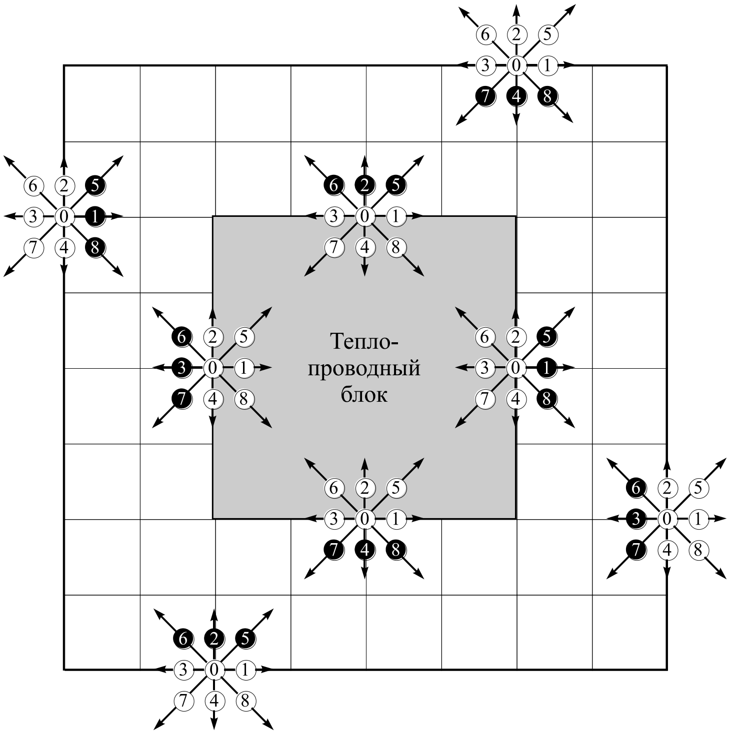

Рис. 3. Схема расположения известных и неизвестных величин на границе раздела флюид – твердое тело.

для узлов сетки в области флюида вблизи горизонтальных и вертикальных стенок неизвестны и направлены внутрь области флюида. В процессе потоковой обработки данных вычисляются все функции, ориентированные наружу полости. При этом функции, направленные внутрь полости, остаются неизвестными на твердых стенках, но они определяются по принципу зеркального отражения от величин, направленных наружу. Следовательно, все неизвестные функции распределения плотности на твердых стенках (принадлежащих самой полости и центральному блоку) можно найти из следующих соотношений:

$$f_k = f_{\bar{k}}, \tag{33}$$

где $\bar{k}$ показывает направление, противоположное направлению k, для модели с решеткой типа D2Q9.

3.1.3. Тепловые граничные условия

Для определения тепловых граничных условий на горизонтальных адиабатических стенках конструкции используется подход, изложенный в публикации [29]. Он основан на разложении в ряды Тейлора, в результате чего получена следующая формула для производной температуры на нижней стенке:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{bottom wall}} = \frac{4T(i,1) - T(i,2) - 3T(i,0)}{2\Delta x} = 0.$$

Отсюда получаем

$$T(i,0)=\frac{4T(i,1)-T(i,2)}{3}.$$

На микроуровне LBM уравнение (31) после применения его к нижней адиабатической стенке дает выражение:

$$\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,0}=\left(4\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,1}-\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,2}\right)\Big/3.$$

Аналогично, для верхней адиабатической стенки имеет место:

$$\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,n}=\left(4\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,n-1}-\sum_{k=0}^{k=8} g_{k,n-2}\right)\Big/3.$$

Также использовались выражения

$$\begin{cases} g_{k,0}=\dfrac{4g_{k,1}-g_{k,2}}{3}, \;\; k=0,....,8 \;\; \text{(для нижней стенки)},\\ g_{k,n}=\dfrac{4g_{k,n-1}-g_{k,n-2}}{3}, \;\; k=0,...,8 \;\; \text{(для верхней стенки)}. \end{cases} \tag{34}$$

Что касается вертикальных стенок конструкции, то здесь можно применить граничные условия в виде однородной и постоянной температуры, что приводит к следующим соотношениям:

— для левой стенки:

$$\begin{cases} g_1=T_{\mathrm{h}}\left(\omega_3+\omega_1\right)-g_3,\\ g_5=T_{\mathrm{h}}\left(\omega_5+\omega_7\right)-g_7,\\ g_8=T_{\mathrm{h}}\left(\omega_6+\omega_8\right)-g_6; \end{cases} \tag{35}$$

— для правой стенки:

$$\begin{cases} g_3=T_{\mathrm{c}}\left(\omega_3+\omega_1\right)-g_1,\\ g_7=T_{\mathrm{c}}\left(\omega_7+\omega_5\right)-g_5,\\ g_6=T_{\mathrm{c}}\left(\omega_6+\omega_8\right)-g_8. \end{cases} \tag{36}$$

На рис. 4 представлена схема расположения сетки в области моделирования жидкой фазы и внутри твердотельного блока (то есть в приближении единой расчетной области). Обозначения, приведенные на рисунке, используются далее в виде индексов для параметров. Узлы w в твердотельном блоке соответствуют узлам на поверхности раздела флюид – твердое тело. Границы раздела в области флюида включают в себя два типа узлов: f и ff, которые используются при формулировке тепловых граничных условий. Аналогично на твердотельной стороне этому соответствуют узлы b и bb вблизи поверхности раздела.

Для точки контакта $r = r_{\mathrm{w}}$ (w на рис. 4) должны выполняться условия непрерывности температуры и сохранения нормального теплового потока на поверхности раздела фаз. Такое условие математически выражается уравнением (9) и может быть переписано в терминах относительной теплопроводности k_{r} (отношение теплопроводности твердого материала к теплопроводности жидкости) в виде $\left(\partial T/\partial n\right)_{\mathrm{f}}=k_{\mathrm{r}}\left(\partial T/\partial n\right)_{\mathrm{s}}$.

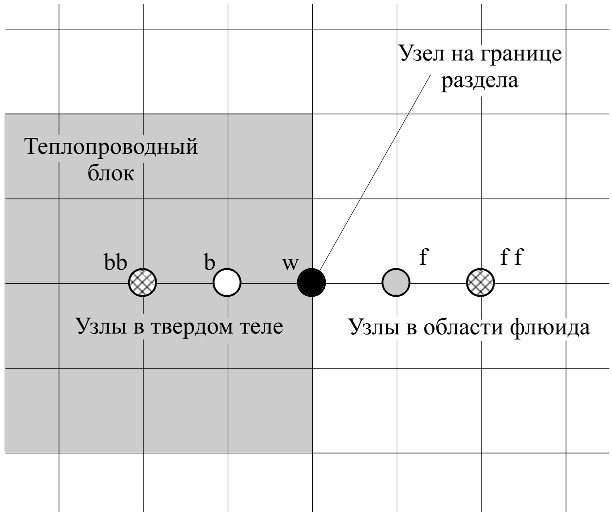

Рис. 4. Схема части стенки тела произвольной квадратной формы.

Для вычисления распределения температуры в твердотельной области в рамках теплового LBM-подхода рассматривается единая вычислительная область с единой тепловой функцией распределения g, где имеют место два процесса: столкновений и переноса. После связанных с ними расчетов проводится коррекция функции распределения для всех границ полости и для поверхности раздела фаз (уравнения (34) – (36)).

Как было описано в работе [29], при использовании тейлоровского разложения температурные градиенты на левой и правой сторонах границы раздела можно аппроксимировать с помощью схемы второго порядка точности:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\mathrm{f}} = \frac{4T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{ff}} - 3T_{\mathrm{w}}}{2\Delta n}, \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\mathrm{s}} = \frac{-4T_{\mathrm{b}} + T_{\mathrm{bb}} + 3T_{\mathrm{w}}}{2\Delta n}, \tag{38}$$

где $\Delta n = \Delta x = \Delta y$. После подстановки этих уравнений в условие неразрывности теплового потока (9) температура для узла на поверхности раздела аппроксимируется выражением

$$T_{\mathrm{w}} = \frac{4\left(T_{\mathrm{f}} + k_{\mathrm{r}} T_{\mathrm{b}}\right) - \left(T_{\mathrm{ff}} + k_{\mathrm{r}} T_{\mathrm{bb}}\right)}{3\left(1 + k_{\mathrm{r}}\right)}. \tag{39}$$

На микроуровне LBM (при $\Delta x = \Delta y = 1$) и с применением уравнения (31) выражение (39) трансформируется следующим образом:

$$T_{\mathrm{w}} = \sum_{k=0}^{k=8} g_k\left(r_{\mathrm{w}}, t\right) =$$

$$= \frac{4\left(\sum_{k=0}^{k=8} g_k\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) + k_{\mathrm{r}} \sum_{k=0}^{k=8} g_k\left(r_{\mathrm{b}}, t\right)\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=8} g_k\left(r_{\mathrm{ff}}, t\right) + k_{\mathrm{r}} \sum_{k=0}^{k=8}\left(r_{\mathrm{bb}}, t\right)\right)}{3\left(1 + k_{\mathrm{r}}\right)}.$$

Далее, для узла w на границе раздела фаз мы имеем скорректированное выражение для функции распределения:

$$g_k\left(r_\mathrm{w},t\right)=\frac{4\left(g_k\left(r_\mathrm{f},t\right)+k_\mathrm{r}g_k\left(r_\mathrm{b},t\right)\right)-\left(g_k\left(r_\mathrm{ff},t\right)+k_\mathrm{r}g_k\left(r_\mathrm{bb},t\right)\right)}{3\left(1+k_\mathrm{r}\right)}. \tag{40}$$

3.1.4. Проверка численного метода

Для подтверждения численных результатов, полученных с помощью моделирования методом решеточных уравнений, и для проверки надежности предложенной компьютерной программы было выполнено их сравнение с надежными результатами известных исследований. С этой целью использовались данные исследований из публикации [32]: здесь был описан случай полости с размещенным внутри нее твердым блоком квадратной формы для параметров k_r = 10^{-3}, 1 и 10^3 при числах Ra = 10^5 и 10^7. Указанные результаты воспроизведены на рис. 5 и 6. Как видно из рисунков, программа на основе решеточных уравнениий хорошо воспроизводит известные распределения

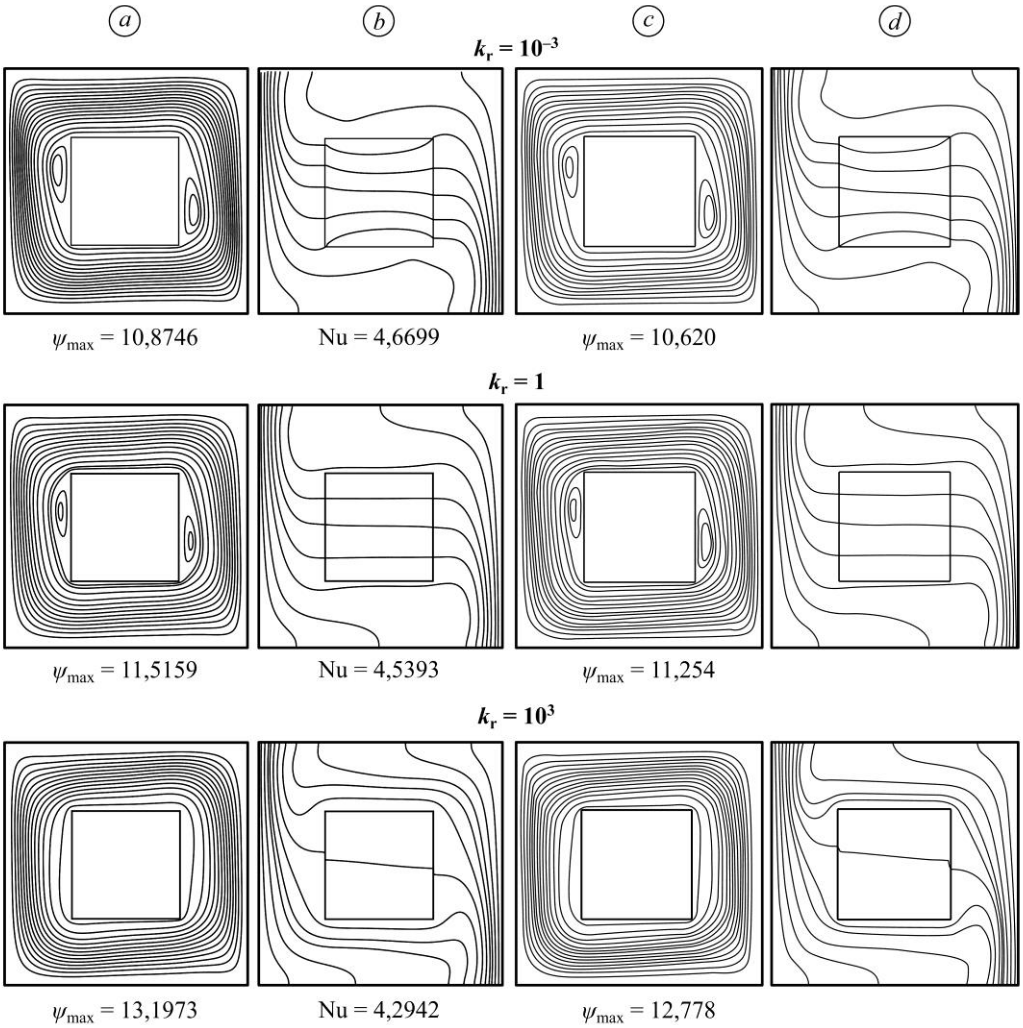

Рис. 5. Сравнение результатов настоящего моделирования (*a*, *b*) и результатов работы [32] (*c*, *d*) для случая одиночного блока для течения при Ra = 10^5, k_r = 10^{-3}, 1 и 10^3.

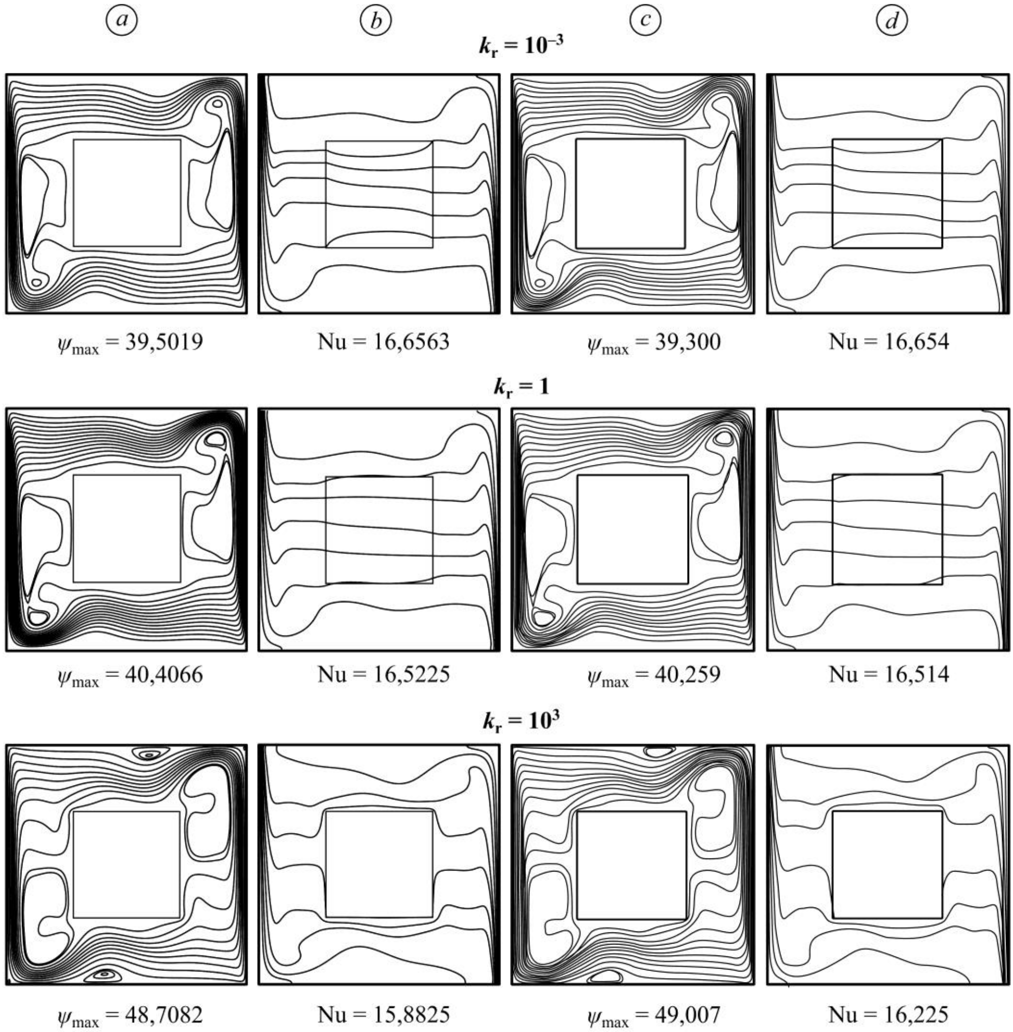

Рис. 6. Сравнение результатов настоящего моделирования (*a*, *b*) и результатов работы [32] (*c*, *d*) для случая одиночного блока для течения при Ra = 10^7, $k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3.

температуры и картину обтекания. Заметим, что разрывность изотерм для поверхности раздела происходит из-за резкого изменения теплопроводности на границе раздела. Следует отметить хорошее количественное согласование (относительно среднего числа Нуссельта и максимумов функции тока) между данными, вычисленными в настоящей работе, и результатами [32]; при этом максимальная относительная погрешность не превышает 3,3 %.

Чувствительность численного решения к размеру сетки была проверена для случая блока квадартной формы с высокой теплопроводностью ($k_r = 10^3$) для чисел Ra = 10^5 и 10^7. Тестирование, среднего числа Нуссельта и максимума функции тока, проводилось для трех сеток с различным разрешением. Сравнение показывает хорошее согласование результатов моделирования на сетках 240×240 и 360×360 (см. табл. 1), максимальные различия наблюдались при Ra = 10^5 и Ra = 10^7, и они не превышали 0,2 и 0,8 %, 0,14 и 0,9 % для параметров ψ_{max} и Nu соответсвенно. Таким образом, сетка с разрешением 240×240 является достаточной для получения точных решений в заданных интервалах основных параметров.

Таблица 1

Влияние разрешения сетки на усредненное число Нуссельта и максимум функции тока для течения с Ra = 10^5 и 10^7 (при $k_r = 10^3$)

Сетка	Ra = 10^5		Ra = 10^7	
	ψ_{max}	Nu	ψ_{max}	Nu
120×120	12,8564	4,2101	47,3376	15,4581
240×240	13,1973	4,2942	48,7082	15,8825
360×360	13,2257	4,3003	49,0416	16,0306

3.2. Сопряженный конвективно-кондуктивный теплоперенос для воздушной полости с теплопроводным блоком круглого сечения

3.2.1. Вычисления на криволинейной границе

В работе [33] был разработан численный подход второго порядка точности для реализации криволинейных граничных условий. На рис. 7 показан фрагмент произвольной криволинейной границы между флюидом и твердотельным блоком. На этой диаграмме светлые круглые маркеры соответствуют узлам сетки в зоне флюида, светлые квадратные маркеры — узлам сетки в твердой фазе, а темные круглые маркеры располагаются на физической границе (то есть на границе раздела флюид – твердое тело) на отрезках, соединяющих узлы из двух фаз. Доля Δ такого сегмента в области жидкой фазы вычисляется из соотношения:

$$\Delta = \frac{|r_\mathrm{f} - r_\mathrm{w}|}{|r_\mathrm{f} - r_\mathrm{b}|}. \tag{41}$$

После обработки события столкновения частиц алгоритм обновляет функции распределения для узлов сетки в области, занятой флюидом (r_f), включая случай узлов вблизи поверхности раздела и направленных в сторону твердого тела ($\tilde{f}_k$ на рис. 7). Чтобы при вычислении удовлетворялись условия прилипания и непроницаемости в узлах, принадле-

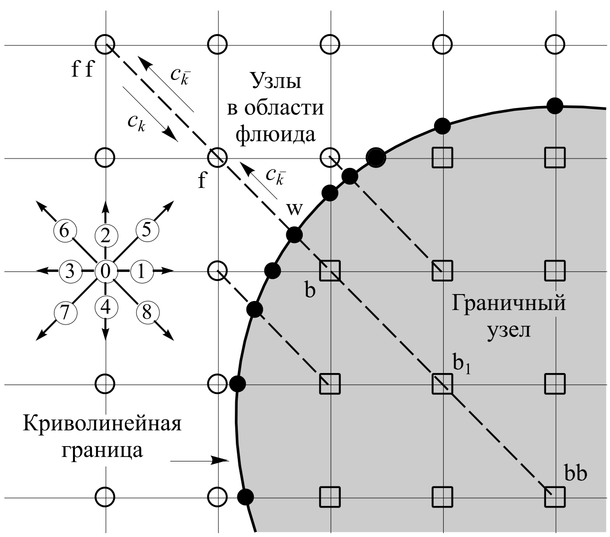

Рис. 7. Характеристики узлов решетки и криволинейная граница [33].

жащих поверхности раздела, достаточно продлить искусственные функции распределения от ближайшего узла в твердой фазе (то есть из узла r_{b}) с помощью методов экстраполяции.

3.2.2. Условия для скорости на криволинейной границе

Неизвестная функция распределения $\tilde{f}_{\bar{k}}$ вычисляется с помощью линейной экстраполяции, как описывалось в работе [34]:

$$\tilde{f}_{\bar{k}}\left(r_{\mathrm{b}}, t\right) = (1-\chi)\,\tilde{f}_k\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) + \chi f_k^*\left(r_{\mathrm{b}}, t\right) + 2\omega_k \rho \frac{3}{2c^2} c_{\bar{k}} u_{\mathrm{w}}, \tag{42}$$

где

$$\tilde{f}_k^*\left(r_{\mathrm{b}}, t\right) = \omega_k \rho\left(r_{\mathrm{f}}, t\right)\left[1 + \frac{3}{2c^2} c_k u_{\mathrm{bf}} + \frac{9}{2c^4}\left(c_k u_{\mathrm{f}}\right)^2 - \frac{3}{2c^2} u_{\mathrm{f}} u_{\mathrm{f}}\right]. \tag{43}$$

Гибкость при построении вышеуказанных искусственных функций распределения $\tilde{f}_k^*(r_{\mathrm{b}}, t)$ необходима для достижения хорошей точности и устойчивости численного метода. Для этого в исследовании [33] было предложено использовать разные узлы для вычисления функции $\tilde{f}_{\bar{k}}$ (r_{b}, t). Соответственно, применяя (42), получаем его модифицированную форму:

$$f_k^*\left(r_{\mathrm{b}}, t\right) = f_k^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) + \omega_k \rho\left(r_{\mathrm{f}}, t\right)\frac{3}{c^2} c_k\left(u_{\mathrm{bf}} - u_{\mathrm{f}}\right), \tag{44}$$

где

$$f_k^*\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) = \omega_k \rho\left(r_{\mathrm{f}}, t\right)\left[1 + 3\frac{c_k u_{\mathrm{f}}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{\left(c_k u_{\mathrm{f}}\right)^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{u_{\mathrm{f}} u_{\mathrm{f}}}{c^2}\right], \tag{45}$$

$$u_{\mathrm{bf}} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{3}{2\Delta}\right) u_{\mathrm{f}} + \dfrac{3}{2\Delta} u_{\mathrm{w}} & \text{при } \dfrac{1}{2} \le \Delta < 1, \\ u_{ff} = u\left(r_{\mathrm{ff}}, t\right) & \text{при } 0 \le \Delta < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \dfrac{2\Delta - 1}{\tau + 1/2} & \text{при } \dfrac{1}{2} \le \Delta < 1, \\ \dfrac{2\Delta - 1}{\tau - 2} & \text{при } 0 \le \Delta < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{46}$$

В приведенных выражениях $c_{\bar{k}} = -c_k$, $r_{\mathrm{ff}} = r_{\mathrm{f}} + c_{\bar{k}}\Delta t$, $u_{\mathrm{f}} = u\,(r_{\mathrm{f}}, t)$ — скорость флюида вблизи границы раздела, u_{bf} — воображаемая скорость (то есть результат экстраполяции), c_k — единичный вектор в направлении k, χ — весовой коэффициент, зависящий от Δ. Подставляя (43) в (42) и принимая во внимание неподвижность твердого блока ($u_{\mathrm{w}} = 0$), получаем следующее выражение:

$$\tilde{f}_{\bar{k}}\left(r_{\mathrm{b}}, t\right) = \tilde{f}_k\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) - \chi\left[\tilde{f}_k\left(r_{\mathrm{f}}, t\right) - f_k^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{f}}, t\right)\right] + \omega_k \rho\left(r_{\mathrm{f}}, t\right)\frac{3}{c^2} c_k \chi\left(u_{\mathrm{bf}} - u_{\mathrm{f}}\right). \tag{47}$$

В работе [33] было показано, что этот метод обеспечивает граничное условие прилипания потока со вторым порядком точности по пространственным координатам.

3.2.3. Условия для температуры на криволинейной границе

Для задания тепловых условий на криволинейной границе применим способ, предложенный в работе [35]. При этом будем использовать экстраполяцию со вторым порядком точности. Функция распределения температуры делится на равновесную и неравновесную части:

$$g_{\bar{k}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)=g_{\bar{k}}^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)+g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right). \tag{48}$$

Подстановка (48) в (18) дает выражение:

$$\tilde{g}_{\bar{k}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)=g_{\bar{k}}^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)+\left(1-\frac{1}{\tau_{\mathrm{g}}}\right)g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right). \tag{49}$$

Очевидно, что для вычисления функции $\tilde{g}_{\bar{k}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ необходимо знать $g_{\bar{k}}^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ и $g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$.

Равновесная часть распределения температуры $g_{\bar{k}}^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ описывается через приближение BGK как

$$g_{\bar{k}}^{\mathrm{eq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)=\omega_{\bar{k}}T_{\mathrm{b}}\left(1+3\frac{c_{\bar{k}}u_{\mathrm{b}}}{c^2}\right), \tag{50}$$

где $u_{\mathrm{b}}=u\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ и $T_{\mathrm{b}}=T\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ — соответственно скорость и температура в узлах твердотельной области, которые имеют следующие приближения [35]:

$$u_{\mathrm{b}}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)\left(\Delta-1\right)u_{\mathrm{f}} & \text{при }\ \Delta\geq\dfrac{3}{4},\\[2ex] \left(\Delta-1\right)u_{\mathrm{f}}-\dfrac{\left(1-\Delta\right)^2}{1+\Delta}u_{\mathrm{ff}} & \text{при }\ \Delta<\dfrac{3}{4},\end{cases}$$

$$T_{\mathrm{b}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}\left[T_{\mathrm{w}}+\left(\Delta-1\right)T_{\mathrm{f}}\right] & \text{при }\ \Delta\geq\dfrac{3}{4},\\[2ex] \left[T_{\mathrm{w}}+\left(\Delta-1\right)T_{\mathrm{f}}\right]+\dfrac{1-\Delta}{1+\Delta}\left[2T_{\mathrm{w}}+\left(\Delta-1\right)T_{\mathrm{ff}}\right] & \text{при }\ \Delta<\dfrac{3}{4},\end{cases} \tag{51}$$

где $T_{\mathrm{f}}, T_{\mathrm{ff}}, u_{\mathrm{f}}$ и u_{ff} — температура и скорость в узлах сетки f и ff соответственно.

Температура T_{w} является суммой величин $g_k\left(r_{\mathrm{w}},t\right)$ по всем девяти направлениям [36], которые получены из выражения (40):

$$T_{\mathrm{w}}=\sum_{k=0}^{k=8}g_k\left(r_{\mathrm{w}},t\right). \tag{52}$$

Неравновесная функция распределения для узлов решетки на границе раздела $g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)$ аппроксимируется выражениями:

$$g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{b}},t\right)=\begin{cases}g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{f}},t\right) & \text{при }\ \Delta\geq\dfrac{3}{4},\\[2ex] \Delta g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{f}},t\right)+(1-\Delta)g_{\bar{k}}^{\mathrm{neq}}\left(r_{\mathrm{ff}},t\right) & \text{при }\ \Delta<\dfrac{3}{4}.\end{cases} \tag{53}$$

При этом используется схема Чепмена – Энскога и разложение в ряд Тейлора, как было предложено в работе [35].

3.2.4. Верификация расчетов

Реализация граничных условий на криволинейных границах — непростая задача, поэтому для верификации использовались три различных теста. Чтобы оценить точность предложенного метода моделирования, проводилось сравнение с аналитическими, экспериментальными и численными результатами, известными из литературных источников.

Первый вариант верификации основан на решении комбинированной задачи теплопроводности между тремя концентрическими цилиндрами. Внутренний цилиндр имеет радиус r'_1 = 3,2 мм и поддерживается при температуре $T_1 = T_\mathrm{h}$ = 60 °C, при этом внешний цилиндр радиусом r'_3 = 16 мм поддерживается при температуре $T_3 = T_\mathrm{c}$ = 20 °C. Промежуточный цилиндр радиусом r'_2 = 9,6 мм отделяет две различных твердых среды с теплопроводностями k_2 и k_3 ($k_\mathrm{r} = k_2/k_3$ — отношение теплопроводностей двух сред). Общий вид этой задачи теплопроводности показан на рис. 8.

Можно видеть, что задача на рис. 8 имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{cases} T(r') = A_1 \ln(r') + B_1 & \text{для } \; r'_1 \le r' \le r'_2, \\ T(r') = A_2 \ln(r') + B_2 & \text{для } \; r'_2 \le r' \le r'_3, \end{cases} \tag{54}$$

где

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{T_1 - T_3}{k_\mathrm{r} \ln\left(r'_2/r'_3\right) + \ln\left(r'_1/r'_2\right)}, \\ B_1 = T_1 \dfrac{T_1 - T_3}{k_\mathrm{r} \ln\left(r'_2/r'_3\right) + \ln\left(r'_1/r'_2\right)}, \\ A_2 = k_\mathrm{r} \cdot A_1, \\ B_2 = T_3 - k_\mathrm{r} \cdot A_1 \ln(r'_3), \end{cases} \tag{55}$$

здесь r' — радиальная координата от общей оси цилиндров.

Численное моделирование для температурного профиля между двумя изотермическими цилиндрами представлено на рис. 9*a* – 9*d* для различных величин параметра k_r (на рис. 9*a* — для k_r = 0,1 и 10, на рис. 9*b* — для k_r = 0,5 и 2 на рис. 9*c* — для k_r = 0,2 и 5, на рис. 9*d* — для k_r = 0,001, 1 и 1000). Видно хорошее согласование между аналитическим и численным решениями, включая прерывистость градиента температуры на границе раздела фаз (то есть на промежуточном цилиндре).

Из-за отсутствия доступных экспериментальных данных для задачи сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса для круговых конфигураций для верификации предложенной программы проводилось сравнение с экспериментальными результатами работы [37] для случая конвекции между концентрическими круговыми цилиндрами. Безразмерные температурные профили для воздуха

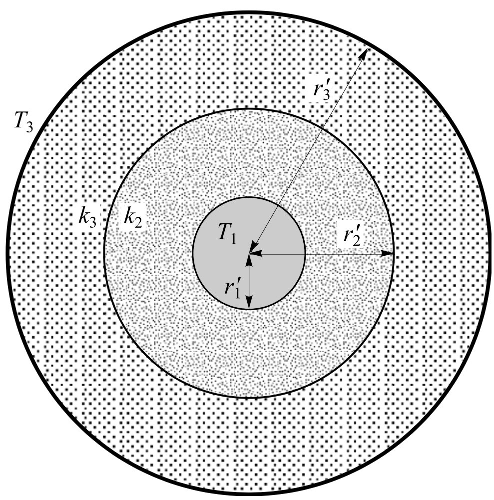

Рис. 8. Схема задачи теплопроводности для многодоменной геометрии.

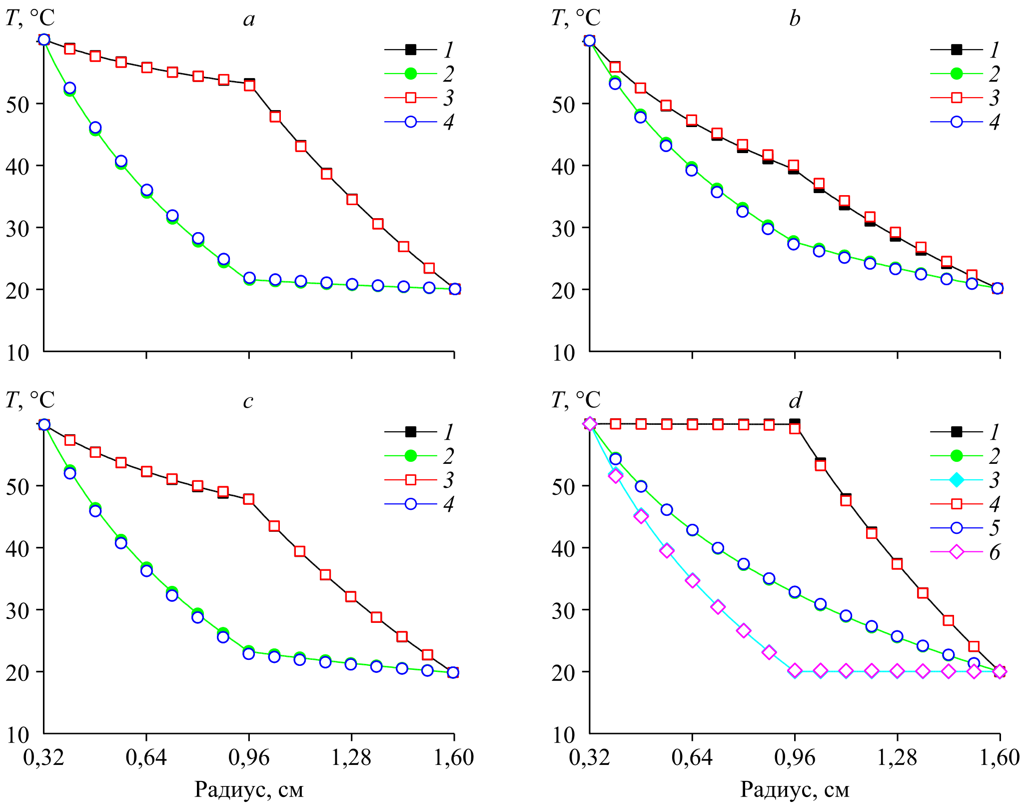

Рис. 9. Сравнение аналитических и численных решений в терминах температурного профиля вдоль радиуса при различных величинах k_r.

Аналитические решения: *a* — k_r = 10 (*1*), 0,1 (*2*), *b* — k_r = 2 (*1*), 0,5 (*2*), c — k_r = 5 (*1*), 0,2 (*2*), *d* — k_r = 1000 (*1*), 1 (*2*), 0,001 (*3*); численные решения: *a* — k_r = 10 (*3*), 0,1 (*4*), b — k_r = 2 (*3*), 0,5 (*4*), *c* — k_r = 5 (*3*), 0,2 (*4*), *d* — k_r = 1000 (*1*), 1 (*2*), 0,001 (*3*).

при параметрах Ra = $4{,}7\cdot10^4$ и Pr = 0,706 приведены для сравнения на рис. 10. На рис. 11 представлены вычисленные с помощью предлагаемой авторами программы изотермы (на левой половине рисунка) и экспериментальная визуализация среды — интерферограмма (на правой половине рисунка) [37]. Оба рисунка подтверждают хорошее количественное согласование между данными численного моделирования и результатами эксперимента.

Далее проводилась верификация путем сравнения с численными результатами, известными из литературных источников. Например, количественная верификация с данными работы [38] (см. рис. 12) и сравнение с результатами исследования [39] (см. табл. 2 и 3 для параметров k_r = 0,1, 1 и 10) показывают хорошее согласование. Действительно, максимальная относительная разница с результатами из публикации [39] (сравнение по критериям Nu и ψ_{max}) не превышает 0,9 и 0,3 % соответственно.

Верификация предложенного метода по аналитическому и экспериментальному направлениям в целом была проведена успешно. Это подтверждает возможность применения нового подхода для решения задач конвекции при наличии поверхности раздела твердое тело – флюид.

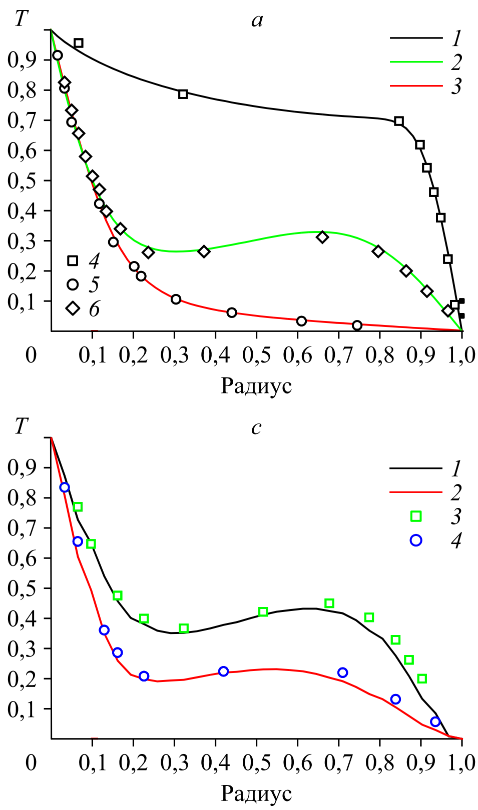

Рис. 10. Безразмерная температура как функция безразмерной радиальной координаты.

Данные настоящей работы (сплошные линии) при: *a* — *T* = 0 (*1*), 90 (*2*), 180 (*3*), *b* — *T* = 30 (*1*), 150 (*2*), *c* — *T* = 60 (*1*), 120 (*2*); результаты экспериментов [37]: *a* — *T* = 0 (*1*), 90 (*2*), 180 (*3*), *b* — *T* = 30 (*1*), 150 (*2*), *c* — *T* = 60 (*1*), 120 (*2*).

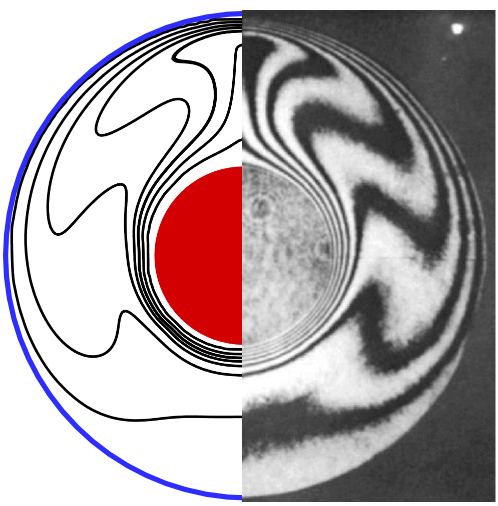

Рис. 11. Экспериментальная верификация по изотермам при Ra = 47000 и Pr = 0,706.

Слева — результаты настоящей работы, справа — экспериментальные данные [37].

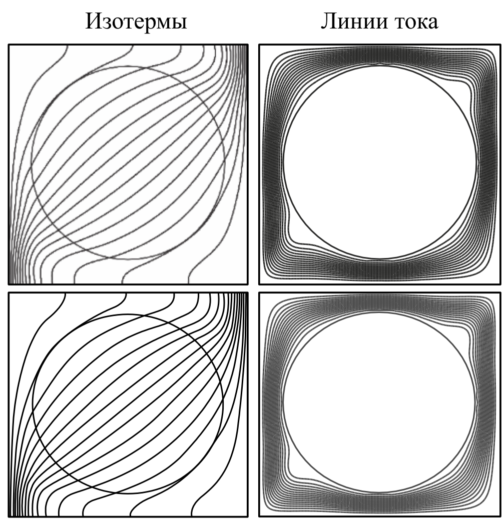

Рис. 12. Сравнение результатов настоящего моделирования (сверху) и данных работы [38] (внизу) при обтекании горизонтального округлого блока при $D = 0{,}8$, $k_r = 1$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$.

Таблица 2

Верификация моделирования по среднему числу Нуссельта для случая R = 0,2, Ra = 10^5 (при различных величинах k_r)

Источник данных	k_r = 0,1	Ошибка, %	k_r = 1	Ошибка, %	k_r = 10	Ошибка, %
Работа [39]	4,6046	0,9	4,5347	0,14	4,4041	0,1
Настоящая работа	4,5637		4,5285		4,3995	

Таблица 3

Верификация моделирования по максимальной функции тока ($|\psi|_{max}$) для параметров k_r = 10^5, Ra = 10^5 (при различных диаметрах R)

Источник данных	R = 0,1	Ошибка, %	R = 1	Ошибка, %	R = 10	Ошибка, %
Работа [39]	9,448	0,3	8,6912	0,06	8,1459	0,18
Настоящая работа	9,4201		8,6961		8,1604	

4. Сопряженный конвективно-кондуктивный теплоперенос для воздушной полости с теплопроводным блоком круглого сечения

Рассмотрим, каким образом новый новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана для тепловых задач был применен для численного моделирования задачи сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса для случая заполненной воздухом полости с размещенным внутри теплопроводным блоком круглого сечения. Численные результаты были получены для трех вариантов диаметра блока ($D = d/L$ = = 0,2, 0,4 и 0,6), для трех величин числа Рэлея (Ra = 10^5, 10^6 и 10^7) и трех величин относительной теплопроводности ($k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3). Результаты моделирования представлены в виде картин линий тока, изотерм, а также максимума функции тока и среднего числа Нуссельта.

Авторы также изучали чувствительность численного решения к числу ячеек решетки для случая обтекания блока с круглым сечением и с высокой относительной теплопроводностью ($k_r = 10^3$) для чисел Рэлея Ra = 10^5 и 10^7. Влияние сеточного разрешения на среднее число Нуссельта и на максимум функции тока был протестирован для трех вариантов сетки: 120×120, 240×240 и 360×360. Сравнение результатов приведено в табл. 4. Оно демонстрирует хорошее согласование данных расчета на сетке размером 240×240 с расчетом на более мелкой сетке — 360×360. Отклонения результатов моделирования на двух сетках для чисел Рэлея Ra = 10^5 и Ra = 10^7 оказалось менее чем 0,5 и 0,3 %, а также 0,3 и 0,45 % в терминах ψ_{max} и Nu соответственно. Таким образом, расчетную сетку размером 240×240 можно считать досточно удобной для вычислений с высокой точностью для указанных интервалов основных параметров задачи.

Таблица 4

Влияние разрешения сетки на Nu и ψ_{max} при $k_r = 10^3$ и Ra = 10^5, 10^7 (для случая горизонтального блока с диаметром D = 0,4)

Сетка	Ra = 10^5		Ra = 10^7	
	ψ_{max}	Nu	ψ_{max}	Nu
120×120	9,5501	4,4610	31,5658	16,6345
240×240	9,7981	4,3797	32,2724	16,2163
360×360	9,8440	4,3690	32,1693	16,1486

Далее исследовалось влияние относительной теплопроводности k_r и диаметра D центрального блока на результаты численного моделирования при Ra = 10^5, 10^6 и 10^7. Тесты показали, что при каждой величине числа Рэлея относительная теплопроводность и диаметр блока увеличиваются в соответствующих интервалах: влияние этих параметров на картину линий тока, изотермы, максимумы функции тока и среднее число Нуссельта приведены на рис. 13 – 18.

Что касается общей картины течения, то данные на рис. 13 – 18 показывают, что Архимедова сила толкает вверх/вниз флюид, расположенный вблизи левой/правой стенки, что приводит к вращению (по часовой стрелке) основной ячейки течения в свободном пространстве между твердотельным блоком и границей полости. В основной ячейке течения также присутствуют две ячейки со вторичным течением, которое имеет контакт с твердым блоком. Как и ожидалось, увеличение числа Рэлея с 10^5 до 10^7 приводит к усилению циркуляции флюида в полости и к образованию тонких тепловых пограничных слоев вблизи вертикальных стенок, что усиливает явление естественной конвекции. С точки зрения количественных оценок, при k_r = 1 и D = 0,2, 0,4 и 0,6 интенсивность потока усиливается соответственно в 3,17, 3,38 и 3,89 раз, а интенсивность теплопереноса (оценка числа Nu) усиливается на 265, 265 и 273 % при приросте числа Ra от 10^5 до 10^7.

Следует отметить, что размер блока существенно влияет на размер и форму ячеек вторичного течения, генерируемых внутри основной ячейки. Например, поток с числом Рэлея

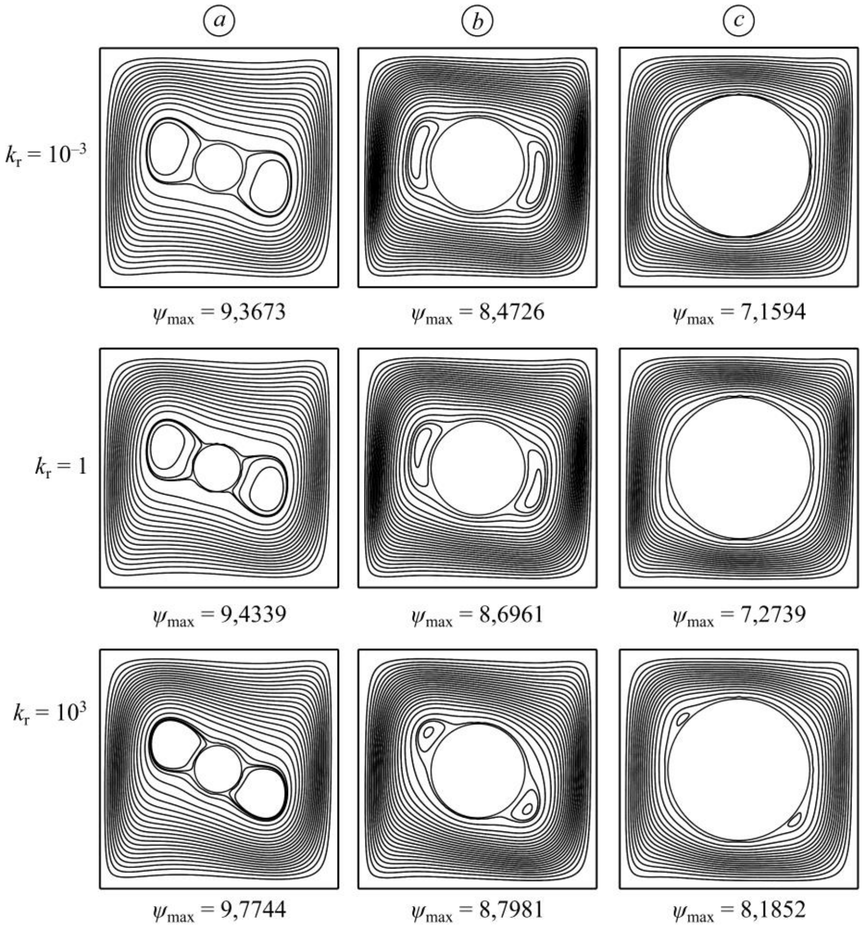

Рис. 13. Линии тока для течения с Ra = 10^5 при $k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

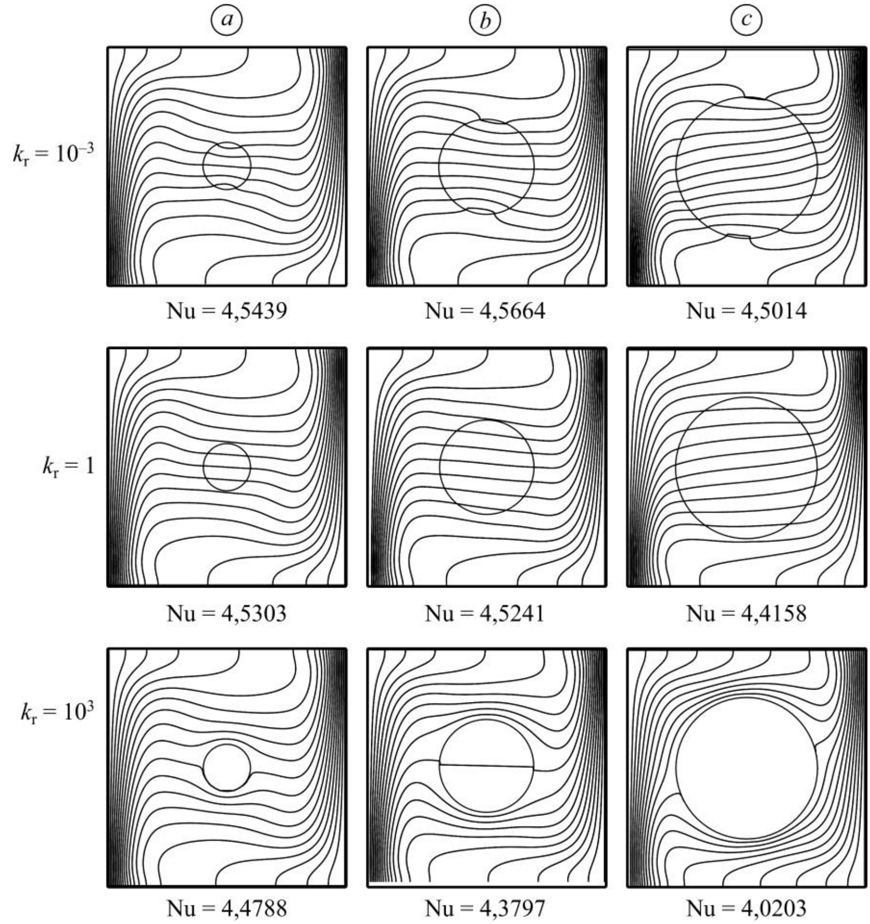

Рис. 14. Изотермы течения с Ra = 10^5 при $k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

Ra = 10^5 (рис. 13) демонстрирует уменьшение размеров ячеек вторичного течения при увеличении D. Для вариантов с низкой теплопроводностью ($k_r = 10^{-3}$ и $k_r = 1$) ячейки полностью исчезают при D = 0,6. На рис. 15 и 17 изображены картины течения соответственно при Ra = 10^6 и Ra = 10^7. Здесь ячейки вторичного течения все еще присутствуют при диаметре D = 0,6, но их геометрия изменилась по сравнению с течением при D = 0,2. Как видно из картины изотерм на рис. 14, 16 и 18, самые существенные перемены в картинах течения наблюдаются при изменении параметра D для случая блока с высокой теплопроводностью ($k_r = 10^3$). Этот блок разрушает тепловую стратификацию всей области течения. Влияние размера твердотельного блока на интенсивность течения зависит от числа Рэлея и отношения теплопроводностей двух сред. Как видно, при Ra = 10^5 рост диаметра D уменьшает интенсивность потока при всех доступных величинах параметра k_r (за исключением $k_r = 10^3$, для которого увеличение D от 0,2 до 0,4 ведет к несущественному приросту параметра ψ_{max} (менее 0,2 %)). С точки зрения количественных оценок, при $k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3 ψ_{max} уменьшается на 23,5, 22,9 и 16,3 % при росте диаметра D от 0,2 до 0,6. В случае низких отношений теплопроводностей ($k_r = 10^{-3}$ и 1) моделирование при Ra = = 10^6 и 10^7 и увеличении диаметра D уменьшает интенсивность течения. С другой стороны,

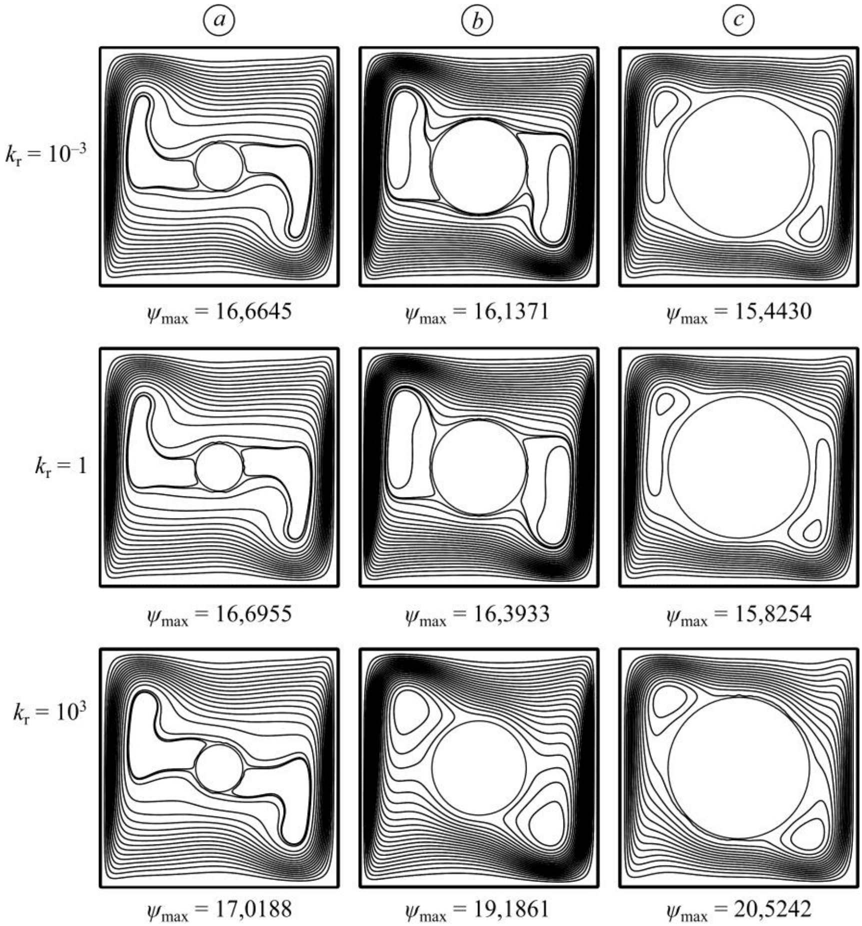

Рис. 15. Линии тока для течения с Ra = 10^6 при $k_r = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

для случая блока с высокой теплопроводностью ($k_r = 10^3$), величина ψ_{max} повышается с ростом диаметра D. В действительности увеличение диаметра D сказывается негативно на интенсивности течения, поскольку из-за увеличения контакта с окружающим флюидом происходит усиление трения между флюидом и твердым блоком. Однако положительным эффектом является то, что увеличение размера высокотеплопроводного блока создает преимущество при передаче тепла от верхней части полости к нижней ее части. При этом возникает явление, которое обеспечивает предварительный нагрев флюида, движущегося к горячей стенке. В результате уменьшается плотность рядом с горячей стенкой и таким образом происходит усиление течения за счет сил плавучести. В целом при высоких величинах числа Рэлея положительный эффект от дополнительного нагрева за счет теплопроводного блока для жидкости, направленной к горячей стенке, противостоит отрицательному эффекту трения на поверхности раздела. Это обеспечивает усиление течения при росте диаметра D. Например, для потока с Ra = 10^7 параметр ψ_{max} уменьшается на 6,7 % для случая блока с $k_r = 10^{-3}$ и возрастает на 25 % для случая с k_r = $= 10^3$ при росте диаметра D от 0,2 до 0,6. Эффекты такого же порядка наблюдаются в случае потока при Ra = 10^6. Заметим, что для блока любого размера влияние k_r на интенсивность потока незначительно при изменении этого параметра в пределах от 10^{-3} до 1.

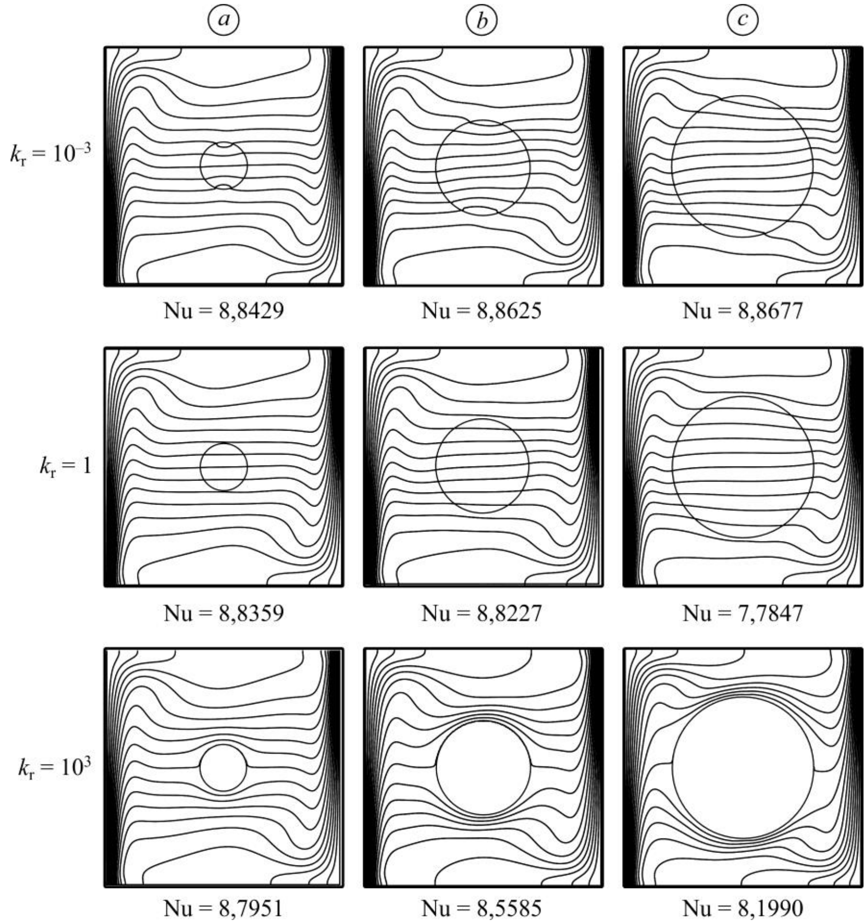

Рис. 16. Изотермы для течения с Ra = 10^6 при $k_г = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

При этом для обоих вариантов размера блока — D = 0,4 и 0,6 — параметр $\psi_{\max}$ демонстрирует существенный рост при увеличении $k_г$ от 1 до 10^3. Например, для течения с Ra = 10^7 и при диаметре D = 0,6 увеличение $k_г$ порождает усиление потока на 34 %.

Относительно изменения теплообмена при различных размерах центрального блока и отношения теплопроводностей двух сред анализ показал, что число Нуссельта существенно изменяется при возрастании величины $k_г$ с 10^{-3} до 1 при любой величине диаметра D. Кроме того, при низких величинах параметра $k_г$ (10^{-3} или 1) изменение диаметра D в указанных границах почти не влияет на число Нуссельта. Например, при $k_г$ = 1 и Ra = 10^5, 10^6 и 10^7 число Нуссельта понижается соответственно всего на 2,5, 0,6 и 0,44 % если D увеличивается с 0,2 до 0,6. С другой стороны, при высокой теплопроводности блока ($k_г = 10^3$) возникает эффект, подобный короткому замыканию, что существенно изменяет картину теплопереноса при большом диаметре блока. В плане количественных оценок можно отметить следующее: при D = 0,2, 0,4 и 0,6 увеличение параметра $k_г$ с 10^{-3} до 10^3 вызывает уменьшение числа Нуссельта на 1,4, 4,3 и 10,7 %; 0,5, 3,4 и 7,5 %; 0,4, 2,1 и 6,3 % для Ra = 10^5, 10^6 и 10^7 соответственно. Для блока с теплопроводностью $k_г = 10^3$ моделирование ситуации с увеличением размера D от 0,2 до 0,4 (и до 0,6) показывает уменьшение теплопереноса на 2,2 и 10,2 %; 2,7 и 6,7 %; 1,8 и 6 %

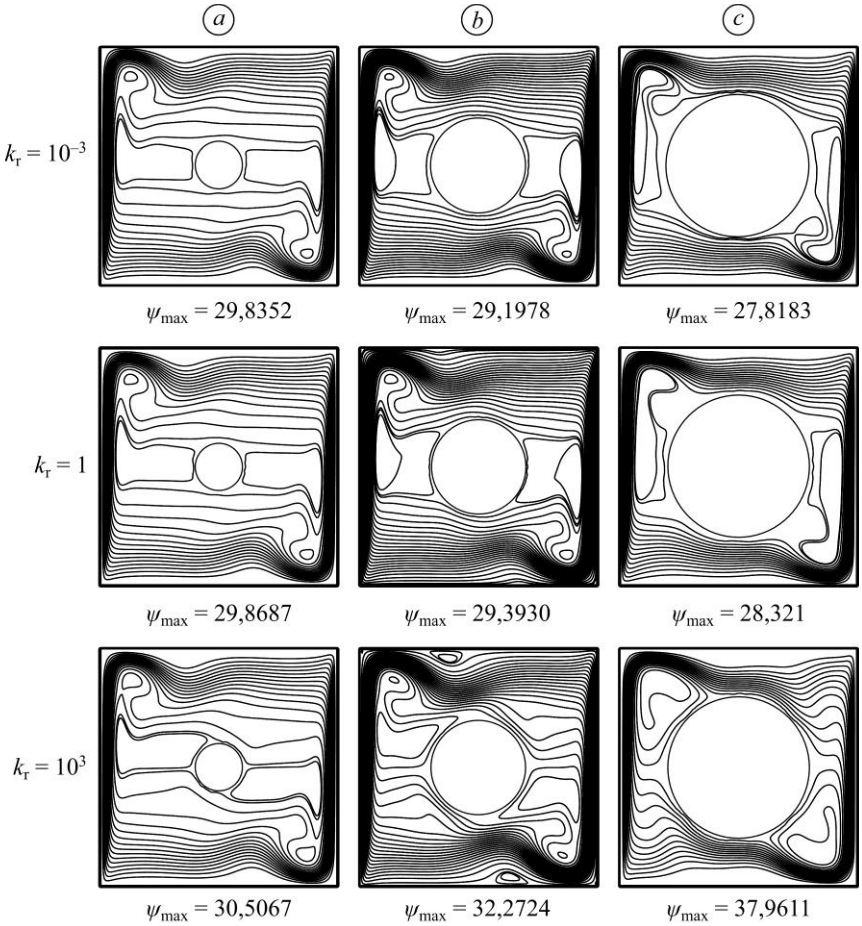

Рис. 17. Линии тока для течения с Ra = 10^7 при $k_г = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

соответственно при числах Рэлея Ra = 10^5, 10^6 и 10^7. В заключение отметим, что анализ всех результатов показывает: все комбинации параметров ($k_г$, D) демонстрируют примерно одинаковый уровень теплопереноса, за исключением существенного его падения для комбинации (10^3, 0,6). В результате моделирования получены максимальные оценки уменьшения теплопереноса, составившие соответственно 11,8, 7,5 и 6,3 % для течения с Ra = 10^5, 10^6 и 10^7.

В работе также проводилось сравнение данных для течения с наличием блока в центре полости и без него (что соответствует классической задаче для течения в полости с неоднородным нагревом [40]) для чисел Рэлея Ra = 10^5, 10^6. Сравнение показало, что интенсивность потока остается неизменной при малых размерах блока вплоть до D = 0,2. Присутствие блока влияет на теплоперенос только если его большой размер сочетается с высоким значением его теплопроводности (например, D = 0,6 и $k_г = 10^{-3}$). Это обуславливает различие в числе Нуссельта на 11 и 7 % для потока с Ra = 10^5 и 10^6. Для потока с Ra = 10^7 сравнение с соответствующими данными работы [41] показало, что интенсивность потока для полости без блока довольно близка к случаю с геометрией D = 0,2 или 0,4. Что касается теплопереноса, то для любых комбинаций параметров (D, $k_г$) удовлетворительные результаты моделирования получаются при рассмотрении только полости

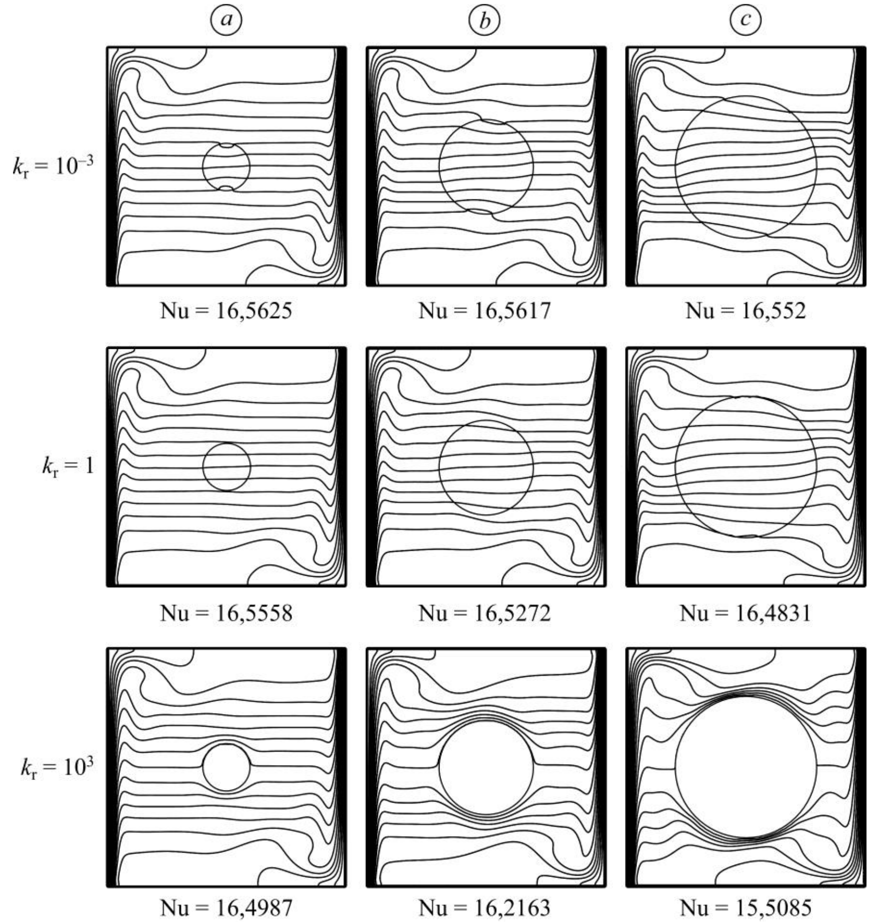

Рис. 18. Изотермы для течения с Ra = 10^7 при $k_{\text{г}} = 10^{-3}$, 1 и 10^3 и D = 0,2 (*a*), 0,4 (*b*), 0,6 (*c*).

без блока. При этом погрешность составляет менее 2 %, за исключением данных моделирования для комбинации параметров (D = 0,6, $k_{\text{г}} = 10^3$), для которой различие между двумя подходами будет на уровне 6,1 %. На практике, если инженеру требуется точность оценок на уровне 11 %, можно пользоваться результатами расчетов для полости без внутреннего блока для всех интервалов параметров D, $k_{\text{г}}$ и Ra, рассмотренных в настоящем исследовании. Следует отметить, что при течении без обтекания блока возникает квазизастойная зона (ее размер увеличивается с ростом Ra) в активной области полости при сравнительно высоком числе Рэлея. Поэтому если рассматривать блок при $k_{\text{г}}$ = 1 (то есть при одинаковой теплопроводности двух сред) в такой квазизастойной зоне, пренебрегая при этом трением, то этот блок будет оказывать ничтожно малое влияние на гидродинамику и на теплоперенос. Впрочем, при высоких значениях $k_{\text{г}}$, когда твердотельный блок имеет более высокий коэффициент теплопроводности по сравнению с флюидом, наблюдается изменение температурного поля и, следовательно, картины течения (из-за включения подъемной силы), даже если блок оказался в квазизастойной зоне. В целом влияние параметров на изменение результатов моделирования зависит также от числа Рэлея и того, какую часть зоны квазизастоя занимает твердый блок.

Выводы

В статье представлен новый подход в методе решеточных уравнений Больцмана в приложении к задаче описания граничных условий на границе раздела флюид – твердое тело с целью получения единого теплового решения для вычисления температурного поля. Точность и надежность предложенного TLBM проверялись путем сравнения полученных результатов с доступными числовыми, аналитическими и экспериментальными данными. Предложенный для численного моделирования подход подходит для решения задачи сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса при отношении теплопроводностей двух соседних сред в пределах от 10^{-3} до 10^{3}. В методе решеточных уравнений Больцмана он может оказаться удобным методом для вычисления тепловых граничных условий на границе раздела флюид – твердое тело при сопряженном теплопереносе. В представленной работе продемонстрировано успешное применение этого метода к задаче сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса для воздушной полости с размещенным внутри теплопроводным блоком с круглым сечением. При этом исследовалось влияние диаметра блока, отношения теплопроводностей двух сред и числа Рэлея на картину потока и теплопереноса. Результаты показали, что присутствие блока в полости может повлиять на среднее число Нуссельта только в случае большого размера указанного тела и высокой теплопроводности (D = 0,6, $k_{\mathrm{r}} = 10^{3}$).

Конфликты интересов

Авторы заявляют, что у них отсутствуют какие-либо финансовые интересы или персональные предпочтения, которые могли бы повлиять на результаты работы, изложенные в данной статье.

Обозначения

BGK — оператор Батнагара – Гросса – Крука (Bhatnagar – Gross – Krook),
MRT — Multi – Relaxation – Time,
SRT — приближение единого времени релаксации (Single – Relaxation – Time),
LBM — метод решеточных уравнений Больцмана,
LGA — метод решетчатого газа,
c — скорость решетки (c = 1),
c_k — вектор дискретной скорости,
c_{ky} — проекция микроскопической скорости c_k на ось y,
c_{kx} — проекция микроскопической скорости c_k на ось x,
c_{s} — скорость звука,
D — диаметр округлого тела,
e — кинетическая энергия,
$f(r, t)$ — функция распределения плотности,
$f_k(r, t)$ — дискретная функция распределения плотности,
$f_k^{\mathrm{eq}}(r, t)$ — дискретная равновесная функция распределения плотности,
F — суммарная сила,
g — ускорение силы тяжести, м/с^2,
$q(r, t)$ — функция распределения температуры,
m — вектор момента для функции распределения плотности,
M — проходная матрица, связанная с плотностью,
Ma — число Маха,
n — число решеток,
Nu — среднее число Нуссельта,
p — давление,
$\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$ — число Прандтля,
p_{xx} — диагональный компонент тензора вязких напряжений,
p_{xy} — недиагональные элементы тензора вязких напряжений,
(q_x, q_y) — плотность теплового потока (декартовы компоненты),
r' — радиус округлого тела, м,
$r(x, y)$ — координаты частицы,
R — безразмерный радиус округлого тела,
Ra — число Рэлея,
S_{f} — векторы скорости релаксации,
$S_{\mathrm{f},k}$ — число столкновений (в единицу времени) в потоке,
t — размерное время, с,
$T = (T' - T'_0)/(T'_{\mathrm{h}} - T'_{\mathrm{c}})$ — безразмерная температура,
T' — температура, K,
$T'_0 = (T'_{\mathrm{h}} - T'_{\mathrm{c}})/2$ — размерная эталонная температура, K,

$q_k(r, t)$ — дискретная функция распределения температуры,
$q_k^{eq}(r, t)$ — дискретная равновесная функция распределения температуры,
Gr — число Грасгофа,
(j_x, j_y) — декартовы компоненты количества движения,
k_r — отношение теплопроводностей,
k — коэффициент теплопроводности,
L — длина полости,
$T_0 = (T_h - T_c)/2$ — безразмерная эталонная температура,
u — вектор макроскопической скорости, м/с,
u_x — величина скорости в направлении x, м/с,
u_y — величина скорости в направлении y, м/с,
U — безразмерная скорость в направлении X,
V — безразмерная скорость в направлении Y,
(x, y) — размерные декартовы координаты, м,
(X, Y) — безразмерные декартовы координаты.

Греческие символы

α — коэффициент температуропроводности, м^2/с,
β — коэффициент теплового расширения, К$^{-1}$,
ε — квадрат кинетической энергии e,
$\Delta T' = T'_h - T'_c$ — размерная разница температур, К,
$\Delta T = T_h - T_c$ — безразмерная разница температур,
Δx — шаг в направлении x, м,
Δt — шаг по времени, с,
ω_k — веса,
ν — кинематическая вязкость, м^2/с,
ρ — плотность, кг/м^3,
ρ_0 — стандартная плотность, кг/м^3,
τ_r — динамическое время релаксации,
τ_g — время релаксации для температуры,
ψ — безразмерная функция тока,
Ω — оператор столкновений.

Индексы

h — горячий,
c — холодный,
f — жидкость,
s — твердое тело,
max — максимум.

Список литературы

1. **Ostrach S.** Natural convection in enclosures // J. Heat Transfer. 1988. Vol. 110. P. 1175–1191.
2. **Сабери А.Х., Калтех М.** Моделирование сопряженного теплообмена в микроканале методом двухфазных решеточных уравнений Больцмана // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 3. С. 429–448.
3. **Бердников В.С., Кислицин С.А.** Численные исследования нестационарного конвективного теплообмена в вертикальных слоях жидкости и газа, разделенных металлической перегородкой // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 1. С. 107–119.
4. **Бердников В.С., Гришков Н.А., Шумилов Н.А.** Развитие нестационарной конвекции в прямоугольной полости при внезапном нагреве вертикальной стенки // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4. С. 555–563.
5. **Baïri A., Zarco-Pernia E., García De María J.M.** A review on natural convection in enclosures for engineering applications. the particular case of the parallelogrammic diode cavity // Appl. Therm. Engng. 2014. Vol. 63. P. 304–322.
6. **Ray S., Chatterjee D.** MHD mixed convection in a lid-driven cavity including heat conducting circular solid object and corner heaters with Joule heating // Intern. Commun. Heat Mass Transf. 2014. Vol. 57. P. 200–207.
7. **Kaminski D.A., Prakash C.** Conjugate natural convection in a square enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls // Intern. J. Heat Mass Transf. 1986. Vol. 29, Iss. 12. P. 1979–1988.
8. **House J.M., Beckermann C., Smith T.E.** Effect of a centered conducting body on natural convection heat transfer in an enclosure // Numer. Heat Transf. Part A Appl. 1990. Vol. 15, Iss. 2. P. 213–225.
9. **Oh J.Y., Ha M.Y., Kim K.C.** Numerical study of heat transfer and flow of natural convection in an enclosure with a heat-generating conducting body // Numerical. Heat Transf. Part A: Appl 1997. Vol. 31, Iss. 3. P. 289–303.
10. **Ho C.J., Yih Y.L.** Conjugate natural convection heat transfer in an air-filled rectangular cavity // Intern. Commun. Heat Mass Transf. 1987. Vol. 14. P. 91–100.
11. **Yu D., Mei R., Luo L.S., Shyy W.** Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // Prog. Aerosp. Sci. 2003. Vol. 39, Iss. 5. P. 329–367.
12. **Succi S., Benzi R., Massaioli F.** A review of the lattice Boltzmann method // Intern. J. Mod. Phys. C. 1993. Vol. 4, No. 2. P. 409–415.
13. **Rehhali K., Hasnaoui M., Raji A., El Mansouri A., Beji H., Amahmid A., Dahani Y.** Lattice Boltzmann approach for natural convection and radiation in a tilted square cavity // J. Thermophys. Heat Transf. 2019. Vol. 33, Iss. 2. P. 322–333.
14. **El Abdallaoui M., Hasnaoui M., Amahmid A.** Lattice-Boltzmann modeling of natural convection between a square outer cylinder and an inner isosceles triangular heating body // Numerical Heat Transf., Part A: Appl. 2014. Vol. 66. P. 1076–1096.
15. **Mezrhab A., Bouali H., Amaoui H., Bouzidi M.** Computation of combined natural-convection and radiation heat-transfer in a cavity having a square body at its center // Appl. Energy. 2006. Vol. 83, Iss. 9. P. 1004–1023.

16. **Jami M., Mezrhab A., Bouzidi M., Lallemand P.** Lattice Boltzmann method applied to the laminar natural convection in an enclosure with a heat-generating cylinder conducting body // Intern. J. Thermal. Sci. 2007. Vol. 46, Iss. 1. P. 38–47.
17. **Mohammed J., Ahmed M., Hassan N.** Numerical study of natural convection in a square cavity containing a cylinder using the lattice Boltzmann method // Engng Computers. 2008. Vol. 25. P. 480–489.
18. **El Mansouri A., Hasnaoui M., Amahmid A., Alouah M.** Numerical analysis of conjugate convection-conduction heat transfer in an air-filled cavity with a rhombus conducting block subjected to subdivision: cooperating and opposing roles // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2020. Vol. 150. Art. 119375.
19. **Wang J., Wang M., Li Z.** A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer // Intern. J. Therm. Sci. 2007. Vol. 46, Iss.3. P. 228–234.
20. **Imani G.** Lattice Boltzmann method for conjugate natural convection with heat generation on non-uniform meshes // Comput. Math. with Appl. 2020. Vol. 79. P. 1188–1207.
21. **Meng F., Wang M., Li Z.** Lattice Boltzmann simulations of conjugate heat transfer in high-frequency oscillating flows // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2008. Vol. 29, No. 4. P. 1203–1210.
22. **Wang L., Zhao Y., Yang X., Shi B., Chai Z.** A lattice Boltzmann analysis of the conjugate natural convection in a square enclosure with a circular cylinder // Appl. Math. Model. 2019. Vol. 71, No. 4. P. 31–44.
23. **He X., Luo L.-S.** Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 6811–6817.
24. **Moussaoui M.A., Mezrhab A., Naji H.** A computation of flow and heat transfer past three heated cylinders in a vee shape by a double distribution MRT thermal lattice Boltzmann model // Intern. J. Therm. Sci. 2011. Vol. 50. P. 1532–1542.
25. **D'Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.S.** Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions // Philos. Trans. Royal Soc. a Math. Phys. Engng Sci. 2002. Vol. 360, No. 1792. P. 437–451.
26. **Dahani Y., Hasnaoui M., Amahmid A., El Mansouri A., Hasnaoui S.** Lattice Boltzmann simulation of combined effects of radiation and mixed convection in a lid-driven cavity with cooling and heating by sinusoidal temperature profiles on one side // Heat Transf. Engng. 2020. Vol. 41, No. 5. P. 433–448.
27. **Chapman S., Cowling T.G., Park D.** The mathematical theory of non-uniform gases // Am. J. Phys. 1962. Vol. 30. P. 389–389.
28. **Lallemand P., Luo L.S.** Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 6546–6562.
29. **Mohamad A.A.** Lattice Boltzmann method, in fundamentals and engineering applications with computer codes. 2019. 228 p.
30. **Luo L.** Lattice-gas automata and lattice Boltzmann equations for two-dimensional hydrodynamics. Georgia Institute of Technology, 1993.
31. **Алинеджад Д., Эсфахани Д.А.** Моделирование теплообмена при трехмерной естественной конвекции наножидкостей CuO/вода с помощью решеточного метода Больцмана // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 1. С. 95–108.
32. **Raji A., Hasnaoui M., Naïmi M., Slimani K., Ouazzani M.T.** Effect of the subdivision of an obstacle on the natural convection heat transfer in a square cavity // Comput. Fluids. 2012.Vol. 68. P. 1–15.
33. **Mei R., Luo L.S., Shyy W.** An accurate curved boundary treatment in the lattice boltzmann method // J. Comput. Phys. 1999. Vol. 155, Iss. 2. P. 307–330.
34. **Filippova O., Hänel D.** Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-bgk models // Intern. J. Mod. Phys. C. 1998. Vol. 9. P. 1271–1279.
35. **Yan Y.Y., Zu Y.Q.** Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder — a LBM approach // Intern. J. Heat Mass Transf. 2008. Vol. 51, No. 9–10. P. 2519–2536.
36. **Huang H., Lee T.S., Shu C.** Thermal curved boundary treatment for the thermal lattice Boltzmann equation // Intern. J. Mod. Phys. C. 2006. Vol. 17, No. 5. P. 631–643.
37. **Kuehn T.H., Goldstein R.J.** An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 36. P. 695–719.
38. **Costa V.A.F., Raimundo A.M.** Steady mixed convection in a differentially heated square enclosure with an active rotating circular cylinder // Intern. J. Heat Mass Transf. 2010. Vol. 53, No. 5. P. 1208–1219.
39. **Roslan R., Saleh H., Hashim I.** Natural convection in a differentially heated square enclosure with a solid polygon // Sci. World J. 2014. Vol. 2014. Art. 617492.
40. **De Vahl Davis G.** Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1983. Vol. 3. P. 249–264.
41. **Le Quere P., De Roquefortt T.A.** Computation of natural convection in two-dimensional cavities with Chebyshev polynomials // J. Comput. Phys. 1985. Vol. 57. P. 210–228.

Статья поступила в редакцию 22 января 2022 г.,
после доработки — 4 августа 2022 г.,
принята к публикации 2 сентября 2022 г.,
после дополнительной доработки — 9 июля 2023 г.