ПМТФ, № 4, 1971

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

В. К. Востров

(Фрунзе)

Рассматривается осесимметричная задача определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства для случая наличия на граничной плоскости $z = 0$ круговой линии раздела граничных условий. Предполагается, что на всей границе $z = 0$ касательное напряжение $\tau_{rz} = 0$, в то время как внутри круга $r \leqslant a$ $(z = 0)$ известно нормальное перемещение u_z, а вне его — нормальное напряжение σ_z. Кроме того, предполагается, что в полупространстве действуют объемные силы. Изучение подобного рода задач представляет интерес в связи с применением метода упругих решений А. А. Ильюшина к задаче вдавливания штампов в нелинейно-упругое, в частности в упруго-пластическое полупространство.

Пусть в полупространстве $\Omega = (0 \leqslant z < \infty;\ 0 \leqslant r < \infty)$ осевой силой P вдавливается жесткий осесимметричный штамп, имеющий в цилиндрической системе координат r, φ, z форму $z = -\chi(r)$. Система координат здесь выбрана таким образом, чтобы полупространство занимало область Ω, а ось z совпадала с линией действия силы P.

Обозначим через T_e и Γ_e, $T_e = G\,\Gamma_e$, G — упругий модуль сдвига, характерное напряжение и характерную деформацию соответственно и перейдем к величинам

$$\sigma_{ij} = 2T_e\sigma_{ij}', \quad \varepsilon_{ij} = \Gamma_e\varepsilon_{ij}', \quad u_r = a\Gamma_e u_r' \tag{1}$$
$$u_z = a\Gamma_e u_z', \quad r = ar', \quad z = az', \quad p = P / 2T_e\pi a^2$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, u_r, u_z — компоненты вектора перемещений. В силу осевой симметрии

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = u_\varphi = 0$$

а оставшиеся компоненты не зависят от координаты φ.

Всюду в дальнейшем будут использоваться безразмерные величины σ_{ij}', ε_{ij}', u_r', u_z', r', z', причем для простоты штрихи будут опускаться.

В полупространстве Ω имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = f_1(r, z) \tag{2}$$
$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = f_2(r, z)$$

соотношения закона Гука (ν — коэффициент Пуассона)

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} \tag{3}$$

и соотношения, связывающие компоненты ε_{ij}, u_r, u_z

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{4}$$

На границе $z = 0$ и на бесконечности должны быть выполнены граничные условия

$$\tau_{rz}\big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_z\big|_{\substack{z=0\\ r>1}} = h(r) \tag{5}$$

$$u_z\big|_{\substack{z=0\\ r<1}} = \frac{1}{\Gamma_e}\left[\frac{\delta}{a} - \frac{\chi(ar)}{a}\right] \equiv \theta(r) \tag{6}$$

$$\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ u_r,\ u_z \to 0 \quad \text{при } r^2 + z^2 \to \infty \tag{7}$$

где δ — осевое перемещение штампа, $\varepsilon = a\,/\,r$. Неизвестный радиус площадки контакта a определяется из условия непрерывности нормальных напряжений σ_z в точках окружности $r = 1$ $(z = 0)$.

Относительно функций $f_1(r, z)$, $f_2(r, z)$, $h(r)$ предполагается, что для любого $z \geqslant 0$ преобразования Ханкеля

$$\varkappa_\lambda(z) = \int_0^\infty f_1(r, z)\, J_1(\lambda r)\, r dr, \qquad H(\lambda) = \int_0^\infty h(r)\, J_0(\lambda r)\, r\, dr$$

$$s_\lambda(z) = \int_0^\infty f_2(r, z)\, J_0(\lambda r)\, r\, dr \tag{8}$$

существуют и допускают соответствующие обращения. Кроме того, каждая из функций $s_\lambda(z)$, $\varkappa_\lambda(z)$ должна удовлетворять условиям исчезновения на бесконечности функций (15).

Компоненты u_r, u_z будем искать в виде интегральных разложений Ханкеля

$$u_r = \int_0^\infty A_\lambda(z)\, J_1(\lambda r)\, d\lambda, \qquad u_z = \int_0^\infty B_\lambda(z)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{9}$$

Тогда соотношения (3), (4) определяют компоненты ε_{ij}, σ_{ij}; вставляя последние в уравнения равновесия (2), придем к тому, что функции $A_\lambda(z)$, $B_\lambda(z)$ должны удовлетворять системе двух неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(1 - 2\nu)\, A_\lambda''(z) - \lambda B_\lambda'(z) - 2(1 - \nu)\, \lambda^2 A_\lambda(z) = 2(1 - 2\nu)\, \lambda \varkappa_\lambda(z) \tag{10}$$
$$2(1 - \nu)\, B_\lambda''(z) + \lambda A_\lambda'(z) - (1 - 2\nu)\, \lambda^2 B_\lambda(z) = 2(1 - 2\nu)\, \lambda s_\lambda(z)$$

Решение $A_\lambda(z)$, $B_\lambda(z)$ системы (10) зависит от четырех произвольных функций

$$A_\lambda(0),\ A_\lambda'(0),\ B_\lambda(0),\ B_\lambda'(0) \tag{11}$$

параметра λ, для определения которых имеются следующие соотношения:

$$A_\lambda'(0) = \lambda B_\lambda(0) \tag{12}$$

$$\int_0^\infty B_\lambda(0)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = \theta(r) \qquad (0 \leqslant r < 1)$$

$$\int_0^\infty [\nu\lambda A_\lambda(0) + (1 - \nu)\, B_\lambda'(0)]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = (1 - 2\nu)\, h(r) \quad (r > 1) \tag{13}$$

$$A_\lambda(z),\ B_\lambda(z) \to 0 \quad \text{при } z \to \infty \tag{14}$$

вытекающие из граничных условий (5) — (7).

Общее решение системы уравнений (10) записывается в виде

$$\begin{aligned} A_\lambda(z) &= [\varphi_1(\lambda, z) + z\varphi_2(\lambda, z)]\, e^{\lambda z} + [\varphi_3(\lambda, z) + z\varphi_4(\lambda, z)]\, e^{-\lambda z} \\ B_\lambda(z) &= [\psi_1(\lambda, z) - z\varphi_2(\lambda, z)]\, e^{\lambda z} + [\psi_3(\lambda, z) + z\varphi_4(\lambda, z)]\, e^{-\lambda z} \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\varphi_1(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_1(\lambda)}{1-2\nu} + \lambda\int_0^z \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi - \right.$$
$$\left. - (3-4\nu)\int_0^z e^{-\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\varphi_2(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_2(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi\right]$$

$$\varphi_3(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_3(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi + \right.$$
$$\left. + (3-4\nu)\int_0^z e^{\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\varphi_4(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_4(\lambda)}{1-2\nu} + \lambda\int_0^z e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi\right]$$

$$\psi_1(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{H_1(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi - \right.$$
$$\left. - (3-4\nu)\int_0^z e^{-\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\psi_3(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{H_3(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi + \right.$$
$$\left. + (3-4\nu)\int_0^z e^{\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$h_1(\lambda) = (1-2\nu)[2(1-\nu)A_\lambda(0) + (1-2\nu)B_\lambda(0)]$$
$$h_2(\lambda) = (1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) + (1-\nu)B_\lambda'(0) + (1-\nu)\lambda A_\lambda(0) \qquad (16)$$
$$H_1(\lambda) = \frac{1-\nu}{\lambda}[2(1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) + (3-4\nu)B_\lambda'(0) + \lambda A_\lambda(0)]$$

$$h_3(\lambda) = h_1(\lambda) - 2(1-2\nu)^2 B_\lambda(0)$$
$$h_4(\lambda) = 2(1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) - h_2(\lambda) \qquad (17)$$
$$H_3(\lambda) = 4(1-\nu)(1-2\nu)B_\lambda(0) - H_1(\lambda)$$

Из граничных условий (14) сразу же следуют асимптотические соотношения

$$\varphi_1(\lambda, z),\ \varphi_2(\lambda, z),\ \psi_1(\lambda, z) \to 0 \quad \text{при} \quad z\to\infty \qquad (18)$$

которые могут быть удовлетворены тогда и только тогда, когда функции $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ будут выбраны следующим образом:

$$h_1(\lambda) = (1-2\nu)(3-4\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi - \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi$$

$$h_2(\lambda) = \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi \qquad (19)$$

$$H_1(\lambda) = (1-2\nu)(3-4\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi + \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi$$

Выбор функций $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ в виде (19) необходим, но не достаточен для выполнения асимптотических соотношений (14); последние будут удовлетворены, если потребовать, например, чтобы $s_\lambda(z)$, $\varkappa_\lambda(z)$ принадлежали классу функций k такому, что для любой $U(z) \in k$ выполняются асимптотические равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_z^\infty (z-\xi)\, e^{\lambda(z-\xi)} U(\xi)\, d\xi = O(1) \quad \text{при } z \to \infty \\ \int\limits_0^z (z-\xi)\, e^{-\lambda(z-\xi)} U(\xi)\, d\xi = O(1) \quad \text{при } z \to \infty\end{gathered} \tag{20}$$

В частности, равенства (20) будут выполнены, если объемные силы действуют в некоторой ограниченной области полупространства Ω.

Таким образом, для определения четырех искомых функций (11) имеется система четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений (12), (16) и парные интегральные уравнения (13). Определитель системы (16), связывающей три функции $A_\lambda(0)$, $B_\lambda(0)$, $B_\lambda'(0)$, равен нулю, следовательно, для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы правые части $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ удовлетворяли определенному соотношению, которое в данном случае имеет вид

$$\lambda\,[H_1(\lambda) + h_1(\lambda)] = (3-4\nu) h_2(\lambda) \tag{21}$$

Но, как нетрудно видеть, функции (19) удовлетворяют соотношению (21). Следовательно, одна из функций (11) — пусть это будет $B_\lambda(0) = B(\lambda)$ — остается произвольной; $A_\lambda'(0)$, $A_\lambda(0)$, $B_\lambda'(0)$ выражаются через $B(\lambda)$ формулами

$$\begin{gathered}A_\lambda'(0) = \lambda B(\lambda) \\ A_\lambda(0) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[\frac{h_1(\lambda)}{1-2\nu} - (1-2\nu) B(\lambda)\right] \\ B_\lambda'(0) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[2h_2(\lambda) - \frac{\lambda h_1(\lambda)}{1-2\nu} - (1-2\nu)\lambda B(\lambda)\right]\end{gathered} \tag{22}$$

Оставшийся произвол в выборе функции $B(\lambda)$ позволяет удовлетворить граничному условию (6) на площадке контакта. Другими словами, функция $B(\lambda)$ должна быть решением парных интегральных уравнений (13), которые с учетом равенств (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty E(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = M(r) \quad (0 \leqslant r < 1) \\ \int\limits_0^\infty \lambda E(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > 1)\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$2(1-\nu) E(\lambda) = B(\lambda) - \frac{1}{1-2\nu}\left[\frac{2(1-\nu)}{\lambda} h_2(\lambda) - h_1(\lambda)\right] + 2(1-\nu) H(\lambda) \tag{24}$$

$$\begin{gathered}2(1-\nu) M(r) = \theta(r) + 2(1-\nu)\int\limits_0^\infty H(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda - \\ - \frac{1}{1-2\nu}\int\limits_0^\infty \left[\frac{2(1-\nu)}{\lambda} h_2(\lambda) - h_1(\lambda)\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda\end{gathered} \tag{25}$$

Метод решения парных интегральных уравнений типа (23) изложен, например, в монографии [1]. Согласно [1] решение $E(\lambda)$ уравнений (23) определяется через интеграл

$$E(\lambda)=\int_0^1 \varphi(t)\cos\lambda t\,dt \tag{26}$$

где

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\left[M(0)+t\int_0^{\pi/2} M'(t\sin\psi)\,d\psi\right] \tag{27}$$

Выражение для компоненты σ_z на площадке контакта $r<1$ $(z=0)$ записывается следующим образом:

$$\sigma_z\big|_{\substack{z=0\\ r<1}}=-\int_0^\infty \lambda E(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,d\lambda=\int_r^1\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt-\frac{\varphi(1)}{\sqrt{1-r^2}} \tag{28}$$

Следовательно, из требования непрерывности σ_z на контуре $z=1$ $(z=0)$ площадки контакта вытекает условие $\varphi(1)=0$, или

$$M(0)=-\int_0^{\pi/2} M'(\sin\psi)\,d\psi \tag{29}$$

Равенство (29) определяет зависимость между величиной a неизвестного радиуса площадки контакта и глубиной δ осевого погружения штампа.

Интегрируя выражение (28) по площади круга радиуса 1, нетрудно получить замыкающее соотношение

$$p=\frac{P}{2T_e\pi a^2}=-2\int_0^1 r\sigma_z\big|_{z=0}\,dr=2\int_0^1\varphi(t)\,dt \tag{30}$$

связывающее входную величину — осевую силу P — с радиусом a площадки контакта.

Если массовые силы и нормальное напряжение вне площадки контакта отсутствуют $(H(\lambda)=\varkappa_\lambda(z)=з_\lambda(z)=0)$, то приходим к хорошо изученной, например [1–10], задаче о внедрении жесткого штампа без трения в упругое полупространство. Для случая, когда штамп имеет форму параболоида вращения $\chi(r)=r^2/2R$, интегралы, через которые выражено решение рассматриваемой задачи в работе [10], вычисляются в замкнутой форме; для определения компонент σ_{ij}, u_r, u_z получаются следующие формулы $(r>0,\ z>0)$:

$$u_r=\frac{z}{r}\left[z\left(V-\frac{1}{V}\right)+\left(V^2+\frac{1}{2}z^2\left(1+\frac{1}{V^2}\right)\right)\frac{\partial V}{\partial z}+\right.$$
$$\left.+\frac{r^2}{2}\arcsin W+\frac{zr^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-W^2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right]-$$
$$-\frac{1-2\nu}{r}\left[\frac{1}{3}(1-V^3)-\frac{1}{2}z^2\left(V-\frac{1}{V}\right)-\frac{zr^2}{2}\arcsin W\right]$$

$$u_z=zZ+(1-\nu)\left[\frac{\pi}{2}-z+z^2\operatorname{arctg}\frac{1}{z}-\operatorname{arctg}z\right]+$$
$$+2(1-\nu)\int_0^r\tau\ln\frac{r}{\tau}\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\arcsin W-\frac{z}{\sqrt{1-W^2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right]d\tau$$