

$\div 0,47$). Это обстоятельство, на наш взгляд, свидетельствует о представительности отбираемой пробы и подтверждает правомерность использования отборников указанных типов.

Поступила в редакцию
11/XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Tine. Gas Sampling and Chemical Analysis in Combustion Processes, N.—Y., Pergamon Press, 1961.
2. R. Fristrom, A. Westenberg. Flame Structure, N.—Y., McGraw—Hill Book Company, 1965.
3. T. Howells. Sampling of Combustion Gases Fuel Soc. J., 1964, 15, 3.
4. Н. М. Белянин. ИФЖ, 1964, 7, 3.
5. А. И. Зубков, Л. И. Соркин. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1961, 1, 114.
6. I. Schetz, S. Favip. Comb. and Flame, 1967, 11, 5, 397.
7. Е. С. Щетинков. Физика горения газов. М., «Наука», 1965.

УДК 536.468

К ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ГЕТЕРОГЕННОГО ВОСПЛАМЕНЕНИЯ

А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, Т. М. Мартемьянова
(Москва)

Под гетерогенным воспламенением обычно понимают приводящий к горению нестационарный процесс теплового самоускорения реакции, протекающий на поверхности раздела горючего и окислителя. Развитие этого процесса определяется кинетикой гетерогенной реакции и условиями тепло- и массообмена на поверхности горючего и окислителя.

Математическое описание этого процесса в общем случае приводит к необходимости решения многопараметрической системы нелинейных дифференциальных уравнений [1—4], что в сильной степени затрудняет анализ картины развития процесса и использование полученных результатов для различного рода оценок.

Основной момент, приводящий к сложности математической постановки задачи заключается в необходимости учета диффузии исходных компонентов и продуктов реакции. Известно [5], что роль диффузии изменяется в ходе развития процесса. На начальных стадиях процесс протекает в кинетической области; с ростом температуры роль диффузионных факторов увеличивается и при горении (в случае пространственно разделенных реагентов) становится определяющей.

В связи с этим решение задачи о гетерогенном воспламенении без учета процессов диффузии (допущение гетерогенной реакции нулевого порядка) представляет определенный интерес, поскольку позволяет за счет существенного упрощения математической модели получить ясную физическую картину различных сторон явления. Эта модель использована для рассмотрения гетерогенного воспламенения тела неограниченных размеров [6, 7]. Естественно, что режимы горения и потухания без учета диффузии описаны быть не могут.

В настоящей работе в рамках такой простейшей нестационарной модели рассматривается гетерогенное воспламенение тела конечных размеров. Основной целью работы было выяснение вопроса о режимах воспламенения в зависимости от интенсивности поверхностной реакции и условий теплообмена с окружающей средой и, в частности, определение области изменения параметров, в которой конечность размеров можно не принимать во внимание.

Учет размеров и стадии прогрева, проведенный для гомогенных реакций [8, 9], привел к исследованию закономерностей перехода от самовоспламенения к зажиганию и способствовал уточнению основных понятий теории воспламенения. Рассмотрение аналогичных вопросов с выявлением специфики гетерогенной реакции представляет определенный интерес.

С учетом сделанных выше допущений в безразмерных переменных

$$\theta = \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \quad \tau = \frac{\lambda t}{c\rho x_*^2}$$

(где T_* и x_* — масштабные температура и координата соответственно) задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{n}{\xi - \xi_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\tau = 0, \quad \theta = -\theta_h, \quad (2)$$

$$\xi = 0, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \omega_s = \omega_0 + Bi(\theta_0 - \theta) + \frac{\delta}{\xi_0} \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right), \quad (3)$$

$$\xi = \xi_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0. \quad (4)$$

Здесь n — показатель формы ($n=0$ — плоскость, $n=1$ — цилиндр, $n=2$ — сфера), $\beta = \frac{RT_*}{E}$, $Bi = \frac{\alpha x_*}{\lambda}$, $\xi_0 = \frac{r_0}{x_*}$, $\theta_0 = \frac{E}{RT_*^2} (T_0 - T_*)$, $\theta_h = \frac{E}{RT_*^2} (T_* - T_h)$, $\omega_0 = \frac{q_0 x_*}{\lambda} \cdot \frac{E}{RT_*^2}$, $\delta = \frac{Q_s \cdot k_0}{\lambda} \cdot \frac{E}{RT_*^2} r_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right)$ —

безразмерные параметры, λ , c , ρ — теплопроводность, теплоемкость и плотность горючего соответственно, k_0 — предэкспоненциальный множитель, Q_s — тепловой эффект реакции на единицу поверхности, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, T_s — температура поверхности, T_h — начальная температура образца, T_0 — температура окислителя, q_0 — постоянный тепловой поток из внешней среды к поверхности раздела, r_0 — полутолщина воспламеняемого образца, α — коэффициент теплоотдачи.

Система (1) — (4) описывает изменение температурного поля в веществе при различных значениях исходных параметров. В зависимости от величин этих параметров может быть получено либо стационарное распределение температуры, когда тепло, выделяемое поверхностью источником, будет успевать отводиться во внешнюю среду, либо воспламенение.

В стационарном режиме распределение температуры в веществе отсутствует, а ее значение может быть вычислено из трансцендентного соотношения

$$\theta_{ct} = \ln \frac{Bi(\theta_{ct} - \theta_0) - \omega_0}{\delta} \cdot \xi_0. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем полагаем, как это принято в теории воспламенения и горения, $\beta=0$.

Анализ условия (5) позволяет найти ту предельную связь между параметрами, при которой еще возможно существование стационарного режима

$$\delta_{kp} = \xi_0 \cdot Bi \cdot \exp \left[- \left(1 + \theta_0 + \frac{\omega_0}{Bi} \right) \right]. \quad (6)$$

При этом критический разогрев системы

$$\theta_{kp} = 1 + \theta_0 + \frac{\omega_0}{Bi}. \quad (7)$$

Если $\omega_0=0$ (ニュтоновский теплообмен), то, как и в случае объемной реакции [5], критический разогрев системы равен одному характеристическому температурному интервалу $T_{kp} - T_0 = \frac{RT_{kp}^2}{E}$. Поэтому при анализе картины явления вблизи предела воспламенения удобно в качестве масштабной температуры T_* использовать температуру внешней среды T_0 , т. е. положить $\theta_0=0$. Тогда на пределе воспламенения связь между параметрами определится из соотношения:

$$\frac{Q_s \cdot k_0}{\alpha} \cdot \frac{E}{RT_0^2} \exp \left(- \frac{E}{RT_0} \right) = \frac{1}{e} \approx 0,368. \quad (6')$$

Условие (6') по виду идентично полученному Семеновым [10] для случая объемной гомогенной реакции. Однако в связи с тем, что при гетерогенной реакции скорость тепловыделения отнесена к единице поверхности, в (6') не входит ни размер, ни коэффициенты, зависящие от формы воспламеняющего образца.

Если $\omega_0 \neq 0$, то величина δ_{kp} зависит от отношения $\frac{\omega_0}{Bi}$ по формуле

$$\delta_{kp}(\omega_0) = \delta_{kp}(0) \cdot \exp \left(- \frac{\omega_0}{Bi} \right).$$

Решение нестационарной задачи (1) — (4) проводилось как с помощью электронно-вычислительной машины (при $\omega_0=0$), так и приближенно-аналитически. Установлено, что в надкритических условиях существуют, как и в случае объемных реакций, два различных режима воспламенения: «самовоспламенение» и зажигание.

Анализ результатов решения задачи численным методом

Расчет на ЭВМ позволяет проанализировать пространственно-временные распределения температуры при различных значениях исходных параметров. Рассмотрим характерные картины развития процесса (при $\omega_0=0$) при различных удалениях от предела воспламенения (6), выбрав при этом в качестве масштабных следующие величины: $T_*=T_0$, $x_*=r_0$, т. е. $\theta_0=0$, $\xi_0=1$.

На рис. 1, а, г представлена картина воспламенения при δ , близких к δ_{kp} . Видно, что вблизи предела воспламенения тепло, получаемое телом от источника и поверхностной реакции, успевает распределиться по всему объему. Процесс в течение почти всего периода индукции развивается квазигомогенно, и только перед самым моментом воспламенения (примерно за отрезок времени, равный 1—3% периода индукции) рост температуры на стенке начинает сильно превышать рост температуры в центре. Такой процесс можно условно назвать гетерогенным «самовоспламенением».

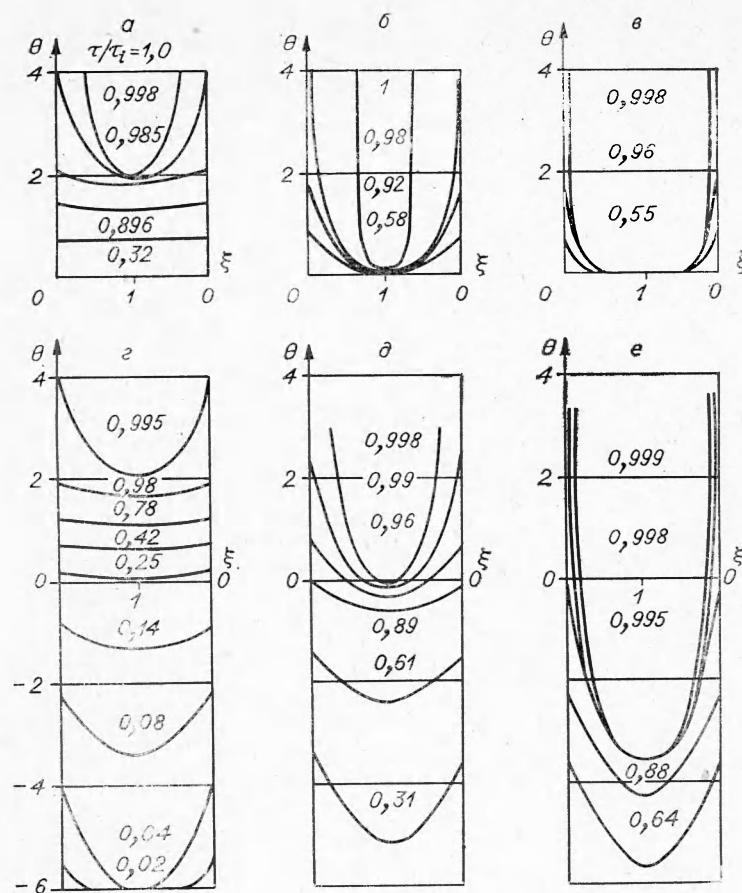


Рис. 1. Распределение температуры в образце в различные моменты времени τ/τ_i при следующих значениях исходных параметров:

а) $\theta_H=0$; $\delta/\delta_{kp}=1,05$; б) $\theta_H=0$, $\delta/\delta_{kp}=5$; в) $\theta_H=0$, $\delta/\delta_{kp}=10$;

г) $\theta_H=6$, $\delta/\delta_{kp}=1,08$; д) $\theta_H=6$, $\delta/\delta_{kp}=5$; е) $\theta_H=6$, $\delta/\delta_{kp}=10$.

При дальнейшем увеличении δ температура не успевает выравниваться по объему (см. рис. 1, б, в, д, е) и при больших δ процесс развивается вблизи поверхности; $\delta \rightarrow \infty$ асимптотически приводит к режиму гетерогенного зажигания. Если при объемной реакции режим зажигания возможен только при $\theta_H > 0$, т. е. при превышении температуры окружающей среды над начальной, то в случае гетерогенного воспламенения он имеет место и при равенстве температур окислителя и горючего (гипергольное воспламенение).

Переход от «самовоспламенения» к зажиганию при изменении параметров происходит непрерывно, однако условно их можно разграничить. Рассмотрим изменение некоторых характеристик температурного поля в зависимости от значений параметра δ . На рис. 2 изображены: толщина слоя ξ_{2i}^0 , прогретого до температуры окружающей среды за период индукции τ_i ; температура поверхности θ_s^0 в момент, когда температура центра θ_1 достигнет температуры окружающей среды, т. е. при $\theta_1=0$; θ_{1i} — температура в центре образца к моменту воспламенения τ_i при различных удалениях от предела воспламенения. Все эти величины характеризуют неравномерность температурного поля к моменту воспламенения. Из рисунка видно, что при некотором значении δ_{kp} наблюдается характерное изменение зависимости выбранных па-

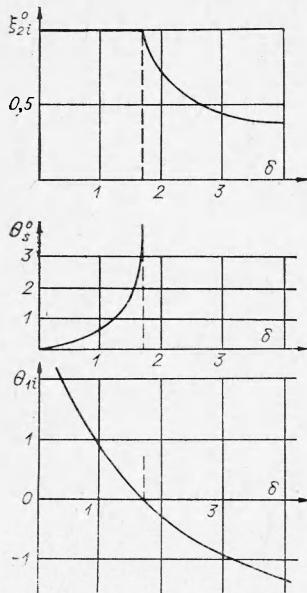


Рис. 2. Зависимость ξ_{2i}^0 , θ_s^0 и θ_{1i} от параметра δ при $\theta_n=6$.

раметров от δ , поэтому δ_{kp} можно условно принять за величину, ограничивающую сверху область «самовоспламенения», так как только при $\delta < \delta_{kp}$ процесс протекает с существенным участием всего объема образца.

Проведенные на ЭВМ расчеты показывают, что δ_{kp} практически не зависит от θ_n (проверка проводилась при $0 \leq \theta_n \leq 25$) и от геометрической формы образца, а от параметра B_i зависит линейно. На рис. 3 видно, что прямая 2, построенная по уравнению (41) при $m=4$, совпадает с прямой 1, полученной путем расчетов на ЭВМ при $n=0$.

При $\delta > \delta_{kp}$ с увеличением δ к моменту воспламенения температура в центре θ_{1i} успевает повыситься на все меньшую величину и, наконец, начиная с некоторого δ_{kp} $\theta_{1i} = -\theta_n$, т. е. прогретый слой становится меньше характерного размера образца, и процессы, происходящие в поверхностных слоях, совершенно не влияют на θ_{1i} . Условно можно считать, что при $\delta > \delta_{kp}$ осуществляется режим зажигания, а при $\delta_{kp} < \delta < \delta_{kp}$ имеет место переходный режим от «самовоспламенения» к зажиганию.

Рассмотрим особенности протекания процесса в каждой из отмеченных выше областей. В режиме «самовоспламенения» ($\delta_{kp} < \delta < \delta_{kp}$ в моменты времени, предшествующие взрыву, температура успевает выравниваться по всему объему тела. Это обстоятельство позволяет формально не принимать во внимание специфику гетерогенной реакции, а отнести тепло, выделяющееся на поверхности, к единице объема и для анализа закономерностей протекания процесса использовать результаты, полученные в нестационарной теории теплового взрыва [11] (при пересчете на объемную реакцию необходимо положить $Q_v = Q_s \frac{S}{V} = Q_s \cdot \frac{n+1}{r_0}$). Такое сопоставление по пересчитанным соответствующим образом периодам индукции, полученным на ЭВМ из решения системы (1) — (4), с результатами [11] приведено на рис. 4, откуда видно, что при малых удалениях от предела ($\frac{\delta}{\xi_{kp}} = 1$) теория теплового взрыва дает хорошее совпадение с результатами расчетов для гетерогенной реакции. Для малых значений B_i это соответствие наблюдается и при достаточно больших удалениях от предела, так как прогрев системы в этом случае осуществляется более равномерно.

При анализе закономерностей зажигания удобно использовать другие масштабные величины перевода к безразмерным переменным. Введем в рассмотрение масштаб координаты

$$x_* = \frac{r_0}{\delta} = \frac{\lambda}{Q_s \cdot k_0} \cdot \frac{RT_2^*}{E} \exp(E/RT_*)$$

Эта величина приближенно характеризует эффективную ширину прогретого слоя при

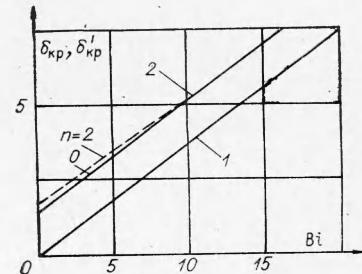


Рис. 3. Зависимость δ_{kp} (1) и δ'_{kp} (2) от B_i .

наличии химической реакции, т. е. такое расстояние от поверхности, где температура на один характеристический интервал $\frac{RT_*^2}{E}$ меньше, чем на поверхности (формально x_* соответствует точке с температурой T_* , при которой скорость реакции была бы в e раз меньше, чем при T_s). Тогда $\xi_0 = \delta$ и граничное условие (4) запишется

$$\xi = \xi_0 = \delta, \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \rightarrow 0. \quad (4')$$

Поскольку зажигание есть предельный режим воспламенения при $\delta \rightarrow \infty$ (т. е. при $\frac{x_*}{\tau_0} \rightarrow 0$), то из уравнения (1) следует, что при зажигании ни размеры, ни форма воспламеняющего образца не должны оказывать существенного влияния на протекание процесса $\left(\frac{n}{\xi - \xi_0} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \simeq -\frac{n}{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \right)$. Все исследуемые характеристики должны иметь значения, близкие аналогичным значениям, полученным при зажигании плоской пластины ($n=0$).

Остановимся на выборе масштабной температуры. Так как температура, при которой становится существенным теплоприход от химической реакции, зависит от условий теплообмена с окружающей средой, то в качестве масштабной удобно выбрать температуру, при которой скорость реакции становится сравнимой со скоростью теплоприхода из внешней среды, т. е. определить T_* из условия

$$q_0 + \alpha(T_0 - T_*) = Q_s \cdot k_0 \left[\exp \left(-\frac{E}{RT_*} \right) - \exp \left(-\frac{E}{RT_n} \right) \right] = K(\theta_n) \cdot Q_s \cdot k_0 \exp \left(-\frac{E}{RT_*} \right). \quad (8)$$

Граничное условие (3) примет вид:

$$\xi = 0, -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = K(\theta_n) \cdot (1 - H\theta) + \exp \left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta} \right), \quad (9)$$

где $K(\theta_n) = 1 - \exp \left(-\frac{\theta_n}{1 + \beta\theta_n} \right)$, $H = \frac{RT_*^2}{E} \cdot \frac{\alpha}{q_0 + \alpha(T_0 - T_*)}$.

При достаточно больших θ_n можно считать $K(\theta_n) \simeq 1$.

Таким образом, решение задачи (1), (2), (4'), (9) будет зависеть лишь от двух параметров H и θ_n (зависимость от β слабая, поэтому, как и ранее, ислагаем $\beta=0$). Наибольший интерес представляет время задержки зажигания $\tau_i(H, \theta_n)$. При $H \rightarrow 0$ будет осуществляться режим зажигания постоянным тепловым потоком, т. е. $q_0 = \text{const}$, а при $q_0 = 0$ $H = 1/\theta_0$, где

$$\theta_0 = \frac{E}{RT_*^2} (T_0 - T_*) = \frac{\lambda}{\alpha x_*}.$$

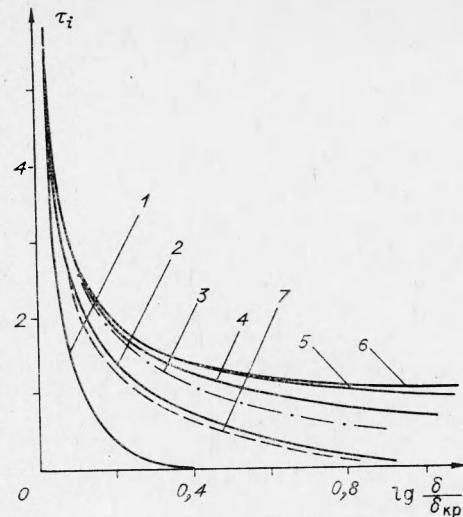


Рис. 4. Зависимость периода индукции τ от δ/δ_{kp} при $\theta_n=0$.

1 — $\text{Bi}=25$; 2 — $\text{Bi}=1$; 3 — воспламенение сферического образца ($n=2$) при $\text{Bi}=1$, $\theta_n=0$; 4 — $\text{Bi}=0.1$; 5 — $\text{Bi}=0.01$; 6 — построена по формулам теории теплового взрыва [11]; 7 — рассчитана по приближенным формулам при $\text{Bi}=1$, $\theta_n=0$, $m=4$.

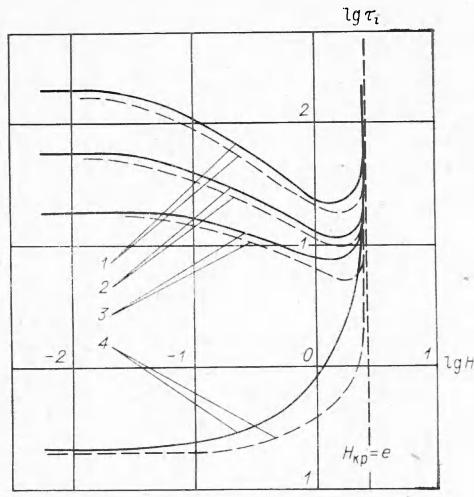


Рис. 5. Зависимость $\tau_i(H)$ в режиме зажигания при различных θ_n (сплошные кривые — результаты расчетов на ЭВМ, штриховые построены по приближенным формулам): 1—20; 2—10; 3—5; 4—0.

цесса в каждом из рассмотренных выше предельных режимов. Однако физическая картина становится более наглядной при использовании приближенных аналитических методов расчета основных характеристик. В настоящей работе для такого анализа применен метод интегральных соотношений [12], согласно которому в рассмотрение вводится тепловой пограничный слой $\xi_2(\tau)$, причем толщина его определяется из условия (4), т. е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi_2) = 0, \quad \theta(\xi_2) = \theta_2. \quad (10)$$

Учитывая, что уравнение (1) формально может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{(\xi - \xi_0)^n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi - \xi_0)^n \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right], \quad (10')$$

запишем его первый интеграл

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{\xi_0^n} \cdot \int_0^{\xi_2} (\xi - \xi_0)^n \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot d\xi = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0) = \omega_s. \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) необходимо приближенно аппроксимировать профиль температуры в пограничном слое. Конкретный вид такой аппроксимации зависит от рассматриваемой задачи и представляет собой обычно полином некоторой степени по ξ с коэффициентами, зависящими от времени. Наиболее простое выражение для профиля температуры в пограничном слое, удовлетворяющее граничным условиям (3) и (10), имеет вид:

$$\theta(\xi) = \theta_2 + (\theta_s - \theta_2) \cdot \left(1 - \frac{\xi}{\xi_2}\right)^m. \quad (12)$$

Из (12) и (3) можно определить связь между ξ_2 , θ_2 , θ_s и ω_s :

$$\xi_2 = \frac{m(\theta_s - \theta_2)}{\omega_s}. \quad (13)$$

Полученная расчетом на ЭВМ для случая $q_0=0$, т. е. при $H=1/\theta_0$, зависимость $\tau_i(H)$ при различных θ_n приведена на рис. 5. В переменных (8) режиму зажигания при отсутствии теплообмена с окружающей средой (т. е. при $q_0=\alpha=0$) соответствует одна точка с параметрами $H=\theta_n=-0$, а режим «гипергольного» воспламенения описывается кривой с параметрами $\theta_n=0$, $H\neq 0$. Величины τ_i , полученные при $H=0$ и различных θ_n , соответствуют значениям, характерным для случая зажигания постоянным тепловым потоком, т. е. при $\alpha=0$, $q_0\neq 0$.

Приближенное решение задачи

Расчет на ЭВМ позволяет проанализировать все характерные особенности протекания процесса

В общем случае величины ξ_2 , θ_2 , θ_s и m могут являться функциями времени. Однако в зависимости от условий протекания процесса можно сделать те или иные допущения об этих величинах. Рассмотрим эти случаи.

Зажигание. По определению зажигание есть предельный режим воспламенения в полубесконечной области, и за пределами пограничного слоя температура меняется мало, т. е. можно принять

$$\theta_2 = -\theta_h = \text{const}. \quad (14)$$

Кроме того, в методе интегральных соотношений [12] обычно полагают $m = \text{const}$. Тогда, подставив (12) в (11) и произведя интегрирование, получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{m+1} \frac{d}{d\tau} \left\{ \xi_2 (\theta_s + \theta_h) \left[1 - \frac{n}{m+2} \frac{\xi_2}{\xi_0} \left(1 - \frac{n-1}{m+3} \cdot \frac{\xi_2}{\xi_0} \right) \right] \right\} = \omega_s, \quad (15)$$

которое совместно с (13) позволяет определить искомую связь $\theta_s(\tau)$, а следовательно, и все остальные характеристики процесса. Однако, прежде чем производить такие вычисления, отметим одну характерную особенность гетерогенного зажигания.

Из уравнения (15) видно, что вид функции $\theta_s(\tau)$ зависит от отношения ξ_2/ξ_0 . При $\frac{\xi_2}{\xi_0} \ll 1$ величина, стоящая в квадратных скобках, ≈ 1 , и ни форма, ни размеры воспламеняющегося образца не будут оказывать существенного влияния на зависимость $\theta_s(\tau)$. Поэтому важно оценить толщину прогретого слоя ξ_2 при зажигании. Это может быть сделано при помощи соотношения (13).

Из (13) следует, что при наличии гетерогенной реакции, т. е. при заданном законе (3) и $m = \text{const}$ зависимость $\xi_2(\theta_s)$ имеет вид, представленный на рис. 6. Как видно из рисунка, на начальной стадии процесса ξ_2 растет, а затем начинает уменьшаться. Такой характер зависимости $\xi_2(\theta_s)$ связан с наличием существенно нелинейного члена $\exp(\theta_s)$, описывающего скорость тепловыделения за счет химической реакции, в граничном условии (3). На начальной стадии процесса рост θ_s и ξ_2 происходит в основном за счет тепла, поступающего из внешней среды и связь между этими величинами аналогична получаемой в классической задаче теплопроводности: с ростом θ_s возрастает и ξ_2 . Когда же на поверхности начинается быстрый самоускоряющийся рост θ_s , то температура за счет теплопроводности успевает заметно измениться лишь в узком, прилежащем к поверхности, слое, причем толщина его будет тем меньше, чем интенсивнее рост θ_s . Происходит деформация профиля, что формально приводит (при $m = \text{const}$) к уменьшению эффективной толщины прогретого слоя ξ_2 . Таким образом, функция $\xi_2(\theta_s)$ проходит через максимум, координаты которого можно определить из условия

$$\frac{d\xi_2}{d\theta_s} (\theta_s^*) = 0. \quad (16)$$

Подставляя (13) в (16), получаем формулу для расчета θ_s^*

$$\omega_s^* - (\theta_s^* + \theta_h) \frac{d\omega_s}{d\theta_s} (\theta_s^*) = 0. \quad (17)$$

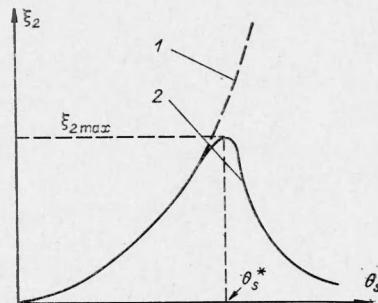


Рис. 6. Зависимость толщины прогретого слоя ξ_2 от температуры поверхности θ_s при ньютонаовском теплообмене с источником энергии.
1 — инертный образец; 2 — реагирующий на поверхности образец.

Соотношение (17) совместно с (3) дает возможность установить координаты максимального значения $\xi_{2\max}$

$$\xi_{2\max} = \frac{m(\theta_s^* + \theta_h - 1)}{\omega_0 + Bi\theta_0 - Bi(\theta_s^* - 1)}, \quad (18)$$

$$\theta_s^* = \ln \frac{\omega_0 + Bi(\theta_0 + \theta_h)}{\delta(\theta_s^* - \theta_h - 1)} \xi_0. \quad (19)$$

Как видно из (18), величина $\xi_{2\max}$, определяющая максимальную толщину прогретого слоя при гетерогенном зажигании, зависит от интенсивности теплообмена с внешней средой и начальной разности температур. Вычислив $\xi_{2\max}$, легко теперь, не решая уравнения (15), оценить влияние формы и размеров зажигаемого образца. Так, например, для сферы при $m=3$, если $\frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} = 0,5$, то величина, стоящая в квадратных скобках в (15) и характеризующая влияние формы, отличается от единицы не более чем на 18%; для цилиндрической симметрии это отличие еще меньше ($\approx 10\%$).

Строго говоря, уменьшения толщины прогретого слоя при увеличении θ_s не происходит. Такое поведение $\xi_2(\theta_s)$ связано с быстрым самоподобием реакции и деформацией профиля $\theta(\xi)$, которая при $m=\text{const}$ выражением (12) не учитывается. Более логично предположить, что, достигнув величины $\xi_{2\max}$, прогретый слой при дальнейшем росте θ_s изменяется очень незначительно (т. е. при $\theta_s > \theta_s^*$ можно положить $\xi_2 \approx \text{const} = \xi_{2\max}$), а бурный рост θ_s сопровождается деформацией профиля (12). Это обстоятельство математически можно описать с помощью того же выражения (12), положив в нем $\xi_2 = \xi_{2\max}$, а $m = l(\theta_s)$. Выражение, связывающее l и θ_s следует из (13) и имеет вид:

$$l = \xi_{2\max} \cdot \frac{\omega_s}{\theta_s + \theta_h}. \quad (20)$$

Время задержки зажигания τ_i оказывается возможным вычислить и в этом случае. Не приводя здесь формул для расчета τ_i (они даны в приложении), отметим, что учет деформации профиля в стадии быстрого роста θ_s дает небольшую поправку к значениям τ_i , определяемым по приведенной ниже формуле (27), полученной при $m=\text{const}$.

Перейдем к анализу временных характеристик. Подставив в (15) вместо ξ_2 его выражение из (13) и произведя интегрирование при $m=\text{const}$, получаем следующую формулу для расчета времени задержки зажигания

$$\tau_i = \frac{m}{m+1} \int_{-\theta_h}^{\infty} \frac{\theta_s + \theta_h}{\omega_s^2} \left\{ 1 - \frac{m \cdot n}{\xi_0(m+2)} \cdot \frac{\theta_s + \theta_h}{\omega_s} \left[1 - \frac{m(n-1)}{\xi_0(m+3)} \frac{\theta_s + \theta_h}{\omega_s} \right] \right\} d\theta_s. \quad (21)$$

В общем виде интеграл (21) не удается выразить с помощью аналитических функций. Можно, однако, выразить его приближенно, использовав асимптотическое представление ω_s при малых и больших θ_s соответственно

$$\omega_s = \omega_0 + Bi(\theta_0 - \theta_s) +$$

$$+ \frac{\delta}{\xi_0} \exp(\theta_s) = \begin{cases} \omega_0 + Bi(\theta_0 - \theta_s) & \text{при малых } \theta_s \\ \frac{\delta}{\xi_0} \exp(\theta_s) & \text{при больших } \theta_s. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда суммарное время зажигания τ_i можно приближенно представить как сумму времени прогрева τ_1 до некоторой температуры θ_s^0 , которое получается, если в (21) вместо ω_s подставить (22), и времени «гипергольного» воспламенения τ_2 от θ_s^0 до ∞ , которое следует из (21), если вместо ω_s подставить (23). Значения τ_1 и τ_2 легко вычисляются из (21), а величину θ_s^0 можно определить из условия «сшивки» (непрерывность функции $\theta_s(\tau)$), которое имеет вид [13]:

$$\frac{d\theta_s}{d\tau} \Big|_{\theta_s^0=0} = \frac{d\theta_s}{d\tau} \Big|_{\theta_s^0+\infty}. \quad (24)$$

Из (21) и (24) получаем следующее трансцендентное уравнение для определения θ_s^0 :

$$\omega_0 + Bi(\theta_0 - \theta_s^0) = \frac{\delta}{\xi_0} \exp(\theta_s^0). \quad (25)$$

Время задержки зажигания в общем виде можно вычислить по формуле, получаемой из (21):

$$\begin{aligned} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 &= \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{Bi^2} \left[Cy^3 - By^2 + Ay - D + \ln \frac{F}{y} \right] + \\ &+ \frac{m}{m+1} \frac{\xi_0^2}{\delta^2} \left[\frac{2z+1}{2^2} - \frac{P_1 \xi_0}{3^3 \cdot \delta} (3^2 \cdot z^2 + 6z + 2) \exp(-\theta_s^0) + \right. \\ &\left. + \frac{P_2}{4^4} \cdot \frac{\xi_0^2}{\delta^2} (4^3 z^3 + 3 \cdot 4^2 z^2 + 6 \cdot 4z + 6) \exp(-2\theta_s^0) \right] \exp(-2\theta_s^0), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$y = \frac{\omega_0 + Bi(\theta_0 + \theta_h)}{\omega_0 + Bi(\theta_0 - \theta_s^0)}; \quad z = \theta_s^0 + \theta_h; \quad P_1 = \frac{mn}{\xi_0(m+2)};$$

$$P_2 = \frac{m(n-1)}{\xi_0(m+3)} \cdot P_1; \quad A = 1 + \frac{2P_1}{Bi} + \frac{3P_2}{Bi^2}; \quad B = \frac{P_1 + 3P_2}{2Bi};$$

$$C = \frac{P_2}{3Bi^2}; \quad D = 1 + \frac{13P_1}{2Bi} + \frac{11P_2}{6Bi^2}; \quad F = 1 + \frac{P_1}{Bi} + \frac{P_2}{Bi^2}.$$

В частном случае воспламенения плоской пластины формула (26) значительно упрощается, так как при $n=0$ $P_1=P_2=B=C=0$, а $A=D=F=1$.

Кроме того, в безразмерных переменных (8) и (9) из (19) получаем ($Bi=H$, $\omega_0+Bi\theta_0=\delta/\xi_0=1$):

$$1 - H\theta_s^0 = \exp(\theta_s^0). \quad (27)$$

Это уравнение имеет единственное решение $\theta_s^0=0$ и формула (26) для расчета τ_i при $n=0$ станет

$$\tau_i = \frac{m}{m+1} \left[\frac{1}{H^2} (H\theta_h - \ln|1 + H\theta_h|) + \frac{1}{4} 1 + (2\theta_h) \right]. \quad (28)$$

В частности, при зажигании постоянным тепловым потоком ($H=0$) из (28) следует:

$$\tau_i = \frac{m}{4(m+1)} (2\theta_h^2 + 2\theta_h + 1). \quad (29)$$

Из (26) можно рассчитать и время «гипергольного воспламенения» (теплообмен с внешней средой отсутствует, т. е. $\omega_0 = Bi = 0$)

$$\tau_i = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{4} \exp(2\theta_n). \quad (30)$$

Приведенные выше формулы (26) — (30) позволяют проанализировать закономерности зажигания при различных законах теплообмена с внешней средой и сопоставить эти результаты с полученными путем расчетов на ЭВМ. Такое сопоставление проведено на рис. 5. Как видно из этого рисунка, описанный выше приближенный метод дает хорошее соответствие с результатами численного счета.

Воспламенение пластины конечной толщины $2\xi_0$. Картина развития процесса воспламенения пластины конечной толщины существенным образом зависит от толщины пластины. На начальной стадии идет прогрев поверхностных слоев (центр пластины не нагревается) и изменение температуры в веществе может быть описано с помощью выражений (12), (14) и (15). Однако теперь в зависимости от соотношения максимальной глубины прогретого слоя $\xi_{2\max}$ и ξ_0 могут осуществляться различные режимы протекания процесса.

Если $\xi_{2\max} < \xi_0$ (т. е. прогретый слой меньше полутолщины пластины), то за время воспламенения тепловая волна не доходит до центра и процесс идентичен рассмотренному выше процессу воспламенения полубесконечного образца (т. е. имеет место зажигание). Если же $\xi_{2\max} > \xi_0$, то через некоторое время τ' прогретый слой достигнет центра системы и температура в центре начнет возрастать. Тогда соотношения (14), а следовательно, и (15) становятся некорректными. Таким образом, условие

$$\xi_{2\max} = \xi_0 \quad (31)$$

ограничивает снизу область зажигания и разделяет два различных режима воспламенения: зажигание ($\xi_{2\max} < \xi_0$), при котором размеры воспламняемого образца не оказывают никакого влияния на характер развития процесса, и переходную область, в которой прогрев центра может привести к изменению закономерностей протекания процесса. Подставляя (31) в (18) и (19), находим критическое условие, определяющее нижнюю границу режима зажигания

$$\delta_{kp} = (m + Bi \cdot \xi_0) \exp \left[-1 + \frac{m\theta_n - \xi_0(\omega_0 + Bi\theta_0)}{m + Bi \cdot \xi_0} \right]. \quad (32)$$

Вследствие прогрева центра при $\delta < \delta_{kp}$ профиль температуры однозначной функцией описать не удается. Поэтому процесс оказывается удобным разбить на несколько стадий. В течение первой стадии ($0 < \xi_2 < \xi_0$) прогретый слой растет, приближаясь постепенно к центру образца. Размеры образца при этом не влияют на характер развития процесса, и нагрев вещества осуществляется по таким же законам, как и нагрев полубесконечного тела, т. е. по формулам (12) — (15).

Когда же прогретый слой достигает центра системы ($\xi_2 = \xi_0$), температура в центре θ_2 начинает возрастать, оказывая при этом влияние и на θ_s , а толщина прогретого слоя остается при этом постоянной и равной ξ_0 . В этой стадии профиль температуры удобно аппроксимировать тем же соотношением (12), только теперь

$$\xi_2 = \xi_0 = \text{const}; \quad \theta_2 = \theta_1(\tau). \quad (33)$$

Тогда из (12) и (13) можно получить связь

$$\theta_1 = \theta_s - \frac{\omega_s \cdot \xi_0}{m}. \quad (34)$$

Продолжительность второй стадии τ'' определяется отрезком времени, в течение которого растет температура в центре, заданная выражением (34). Функция $\theta_1(\theta_s)$ связывает изменение температуры в центре образца θ_1 с температурой на поверхности θ_s и имеет максимум, дающий возможность найти наибольшее значение θ_1'' , до которого может прогреться температура центра при данных условиях. Тогда для определения θ_s'' (и, следовательно θ_1'') имеем условие

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_s} (\theta_s'') = 0. \quad (35)$$

Из (34) и (35) с учетом (3) находим формулу для θ_s'' :

$$\theta_s'' = \ln \frac{m + Bi \xi_0}{\delta}. \quad (36)$$

В тот момент, когда прогретый слой только достигнет центра системы, температура в центре еще равна $-\theta_h$, а температуру на поверхности можно определить из условия (13)

$$\xi_0 = \frac{m(\theta_s' + \theta_h)}{\omega_s}. \quad (37)$$

Тогда продолжительность второй стадии τ'' будет определена тем отрезком времени, в течение которого температура в центре изменится от $-\theta_h$ до θ_1'' , а на поверхности — от θ_s' до θ_s'' . Подставив теперь (12) в (11) с учетом (34) и решая полученное уравнение, можно найти формулу для расчета $\theta_s(\tau)$ во второй стадии, согласно которой

$$\tau'' = \frac{\xi_0^2}{m} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \left[1 - \frac{n}{m+2} \left(1 - \frac{n-1}{m+3} \right) \right] \right) \ln \frac{\omega_s'}{\omega_s''} + \frac{\xi_0}{n+1} \int_{\theta_s}^{\theta_s''} \frac{d\theta_s}{\omega_s}. \quad (38)$$

В третьей стадии ($\theta_s > \theta_s''$) происходит настолько быстрый рост θ_s , что за это время температура в центре не успевает заметно измениться. Происходит деформация профиля температуры к более крутым, и его в этой стадии целесообразно аппроксимировать выражением типа (12), причем

$$m = \frac{\xi_0 \omega_s}{\theta_s - \theta_1} = l(\theta_s), \quad \xi_2 = \xi_0 = \text{const}, \quad \theta_2 = \theta_1'' = \text{const}. \quad (39)$$

Подставив (12) в (11) с учетом (39) находим связь $\theta_s(\tau)$, из которой определяем продолжительность третьей стадии τ''' (формула (46)), в которой необходимо подставить пределы интегрирования и положить $\xi_{2\max} = \xi_0$. Полное время воспламенения можно рассчитать

$$\tau_i = \tau' + \tau'' + \tau''. \quad (40)$$

Полученные выражения позволяют провести полный анализ картины развития процесса воспламенения образца правильной геометрической формы конечной толщины. Покажем это на проанализированном выше с помощью ЭВМ примере воспламенения в потоке горячего окислителя (ニュートンовский теплообмен), т. е. при $\omega_0 = 0$. В качестве масштабных величин выберем $T_* = T_0$, $x_* = r_0$, тогда в полученных уравнениях необходимо принять $\xi_0 = 1$, $\theta_0 = 0$. Определим основные характеристики и сравним их с полученными на ЭВМ.

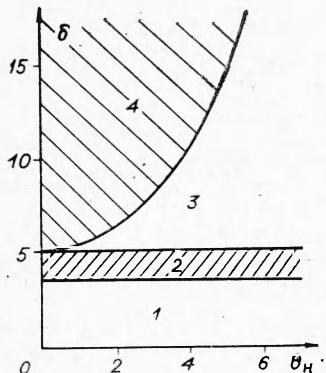


Рис. 7. Границы возможных режимов протекания процесса с гетерогенной реакцией на поверхности образца при $Bi=10$ и различных значениях параметров θ_n и δ .
1 — воспламенения нет (стационарное распределение); 2 — «самовоспламенение»; 3 — переходная область; 4 — зажигание.

2. Критическую связь между параметрами, определяющую нижнюю границу режима зажигания при заданных условиях, находим из (32)

$$\delta''_{kp} = \frac{m+Bi}{e} \exp\left(\frac{m\theta_n}{m+Bi}\right) = \delta'_{kp} \exp\left(\frac{m\theta_n}{m+Bi}\right). \quad (42)$$

Формула (42) разделяет область переходного режима воспламенения ($\delta'_{kp} < \delta < \delta''_{kp}$), в котором прогрев центра может еще оказывать влияние на характеристики воспламенения, от режима зажигания $\delta > \delta''_{kp}$, характерного для полубесконечного пространства. Из (42) видно, что при $\theta_n=0$ $\delta_{kp}'=\delta_{kp}''$, т. е. режим «самовоспламенения» при $\delta > \delta_{kp}''$ сразу же переходит в режим зажигания. Если же $\theta_n>0$, то между этими режимами существует переходная область $\delta_{kp}' < \delta < \delta_{kp}''$, размеры которой тем больше, чем большее значение θ_n (рис. 7).

3. В таблице приведено сравнение температуры в центре образца в момент воспламенения. Эту величину можно вычислить приближенно из формул (38) и (34). При $\delta_{kp}' < \delta < \delta_{kp}''$

$$\theta_{1i} = \left(1 + \frac{Bi}{m}\right) \left[\ln \frac{m+Bi}{\delta} - 1 \right]. \quad (43)$$

4. Полученные формулы, в частности (40), дают возможность рассчитать время воспламенения при различных режимах протекания процесса. Вид соотношений, по которым проводился такой расчет, приведен в приложении, а пример сопоставления с машинным счетом представлен на рис. 4, 7. Согласие результатов приближенных расчетов с полученными на ЭВМ довольно хорошее во всех областях изменения параметров. Таким образом, применение метода интегральных соотношений позволяет полностью проанализировать характер протекания процесса гетерогенного воспламенения и дает абсолютные значения характеристик, близкие к рассчитанным на ЭВМ.

Величины $\theta_{1i}(\delta)$, полученные расчетом ЭВМ и по (43) при $\theta_n=10$, $Bi=0,1$, $m=4$

δ	$\theta_{1i}(43)$	$\theta_{1i}(\text{ЭВМ})$
0,5	1,13	1,20
1,0	0,42	0,40
1,3	0,15	0,13
1,5	0	-0,04
1,8	-0,18	-0,24
2,0	-0,29	-0,36
2,5	-0,52	-0,59
3,0	-0,71	-0,94
5,0	-1,21	-1,30
10,0	-1,94	-1,97
20,0	-2,65	-2,64

Расчет временных закономерностей

Непосредственное интегрирование (15) при $m=\text{const}$ позволяет получить искомую связь $\theta_s(\tau)$ в режиме зажигания, т. е. при $\xi_2 < \xi_0$:

$$\frac{m+1}{m} \tau' = \frac{(\theta_s + \theta_h)^2}{\omega_s^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} b_1 \frac{\theta_s + \theta_h}{\omega_s} + \frac{3}{4} b_2 \frac{(\theta_s + \theta_h)^2}{\omega_s^2} \right] + I_1 - b_1 I_2 + b_2 I_3, \quad (44)$$

где

$$b_1 = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{n}{\xi_0}, \quad b_2 = \frac{n \cdot (n-1)m^2}{\xi_0^2(m+3)(m+2)} \cdot b_1, \quad I_j = \int_{-\theta_h}^{\theta_s} \frac{(\theta_s + \theta_h)^j}{\omega_s^{j+1}} d\theta_s.$$

По этой формуле можно вычислить значение θ_s в любой момент времени $0 \leq \tau < \tau_i$, а с помощью (3), (12), (13) и значения температуры в любой точке образца. Приняв в (44) $\theta_s \rightarrow \infty$, находим приведенную выше формулу для расчета времени задержки зажигания (21).

Если при расчетах учитывать возможность деформации профиля, то следует помнить, что формула (44) справедлива лишь до $\theta_s = \theta_s^*$ (т. е. при $\xi_2 < \xi_{2\max}$). Дальнейшее развитие процесса происходит таким образом, что $\xi_2 = \text{const} = \xi_{2\max}$, а $m = l(\theta_s)$.

Из (11) с учетом (12) получаем уравнение

$$\xi_{2\max} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\theta_s + \theta_h}{l+1} \left[1 - \frac{n}{l+2} \frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \left(1 - \frac{n-1}{l+3} \frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \right) \right] \right\} = \omega_s, \quad (45)$$

где $l = \frac{\xi_{2\max} \cdot \omega_s}{\theta_s + \theta_h}$, решение которого имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi_{2\max}} \cdot \tau''' &= \ln \frac{l+1}{l} - \frac{1}{l+1} + \frac{n}{2} \cdot \frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \left[\frac{l+3}{(l+1)(l+2)} + \frac{1}{2} \ln \frac{l^3(l+2)}{(l+1)^4} \right] + \\ &+ \frac{n(n-1)}{36} \cdot \left(\frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \right)^2 \left[\ln \frac{l^{11}(l+2)^9}{(l+1)^{18} \cdot (l+3)^2} - \frac{5[(l+2)^2+1]+4l}{(l+1)(l+2)(l+3)} \right] + \\ &+ \frac{1}{\xi_{2\max}} \int \left[1 - \frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \cdot \frac{n}{l+2} \left(1 - \frac{n-1}{l+3} \cdot \frac{\xi_{2\max}}{\xi_0} \right) \right] \frac{d\theta_s}{\omega_s(l+1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя в (46) соответствующие начальные условия, можно вычислить продолжительность стадии, в течение которой происходит деформация профиля. Для режима зажигания таким начальным условием будет момент, когда прогретый слой $\xi_2(\theta_s)$ достигает наибольшей толщины, т. е. при $\tau = 0$ $\theta_s = \theta_s^*$, $l = m = \text{const}$. Тогда общее время задержки зажигания будет равно сумме времени развития прогретого слоя τ' (определяется из (44), если верхним пределом интегрирования взять θ_s^*) и времени деформации профиля τ'' , где нижним пределом интегрирования будет θ_s^* , а верхним $\theta_s \rightarrow \infty$.

В случае воспламенения пластины конечной толщины время задержки воспламенения определяется как сумма трех величин:

1) времени достижения прогретым слоем центра τ' (расчитывается по (44), где верхним пределом интегрирования является определяемая из (37));

2) времени роста температуры в центре образца τ'' , которое рассчитывается из (38);

3) времени τ''' , в течение которого происходит быстрый рост температуры поверхности, сопровождающийся деформацией профиля (рас-

считывается по (46)). При этом в (46) нижним пределом интегрирования необходимо взять θ_s'' , определяемое соотношением (36), положить $\xi_{2\max} = \xi_0$, и вместо θ_b взять θ_1'' , рассчитываемое из (34).

В заключение отметим, что все интегралы, стоящие в выражениях (44), (46) и (38), имеют вид:

$$I = \int \frac{f_1(\theta_s)}{f_2(\omega_s)} d\theta_s.$$

Вследствие экспоненциальной зависимости $\omega_s(\theta_s)$ для вычисления этих интегралов можно использовать асимптотические представления $\omega_s(\theta_s)$, подобные сделанным при выводе (26). Такие представления в значительной мере упрощают процедуру расчетов.

Поступила в редакцию
4/I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Anderson, R. S. Brown, L. J. Shappo. AIAA J., 1964, 2, 1; AIAA [preprint], 1964, № 156.
2. F. A. Williams. AJAA J., 1966, 4, 8.
3. А. М. Гришин, А. Я. Кузин. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
4. А. М. Гришин, Н. А. Игнатенко. ФГВ, 1971, 7, 4.
5. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
6. А. Бир, Н. Райан. РТК, 1965, 3, 5.
7. А. П. Бабич, Н. М. Беляев, А. А. Рядно. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
8. А. Г. Мержанов, В. Г. Абрамов, В. Т. Гонтковская. Докл. АН СССР, 1963, 148, 1.
9. В. Г. Абрамов, В. Т. Гонтковская, А. Г. Мержанов. Изв. АН СССР, сер. хим., 1966, 3, 429; 1966, 5, 823; 1967, 1, 26.
10. Н. Н. Семенов. Усп. физ. наук, 1940, 23, 251.
11. А. Г. Мержанов, Ю. М. Григорьев. ФГВ, 1967, 3, 3.
12. Т. Гудмен. В сб. «Проблемы теплообмена». М., «Атомиздат», 1967, стр. 41.
13. В. Н. Вилюнов. ФГВ, 1966, 2, 2.

УДК 536.46

ЗАЖИГАНИЕ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ БОКОВЫХ ТЕПЛОПОТЕРЬ

B. H. Вилюнов, C. C. Хлевной
(Томск — Новосибирск)

Рассматривается тепловая модель зажигания конденсированного вещества в предположении, что ответственными за зажигание являются эндотермические процессы, протекающие в веществе. Данна приближенная теория явления, проведен численный счет задачи и сравнение с экспериментальными результатами зажигания пороха Н+1% сажи. Исследуемый в работе вопрос имеет непосредственное отношение к обоснованию методики постановки экспериментов по лучистому зажиганию.