

УДК 519.63

## **Точное автомодельное решение системы уравнений переноса излучения в кинетической модели для регулярного режима**

**В.В. Завьялов**

*ФГУП «РФЯЦ — ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск*

E-mail: v.v.zaviyalov@vniitf.ru

В статье показана возможность применения известного класса аналитических автомодельных решений типа бегущей тепловой волны для нелинейной интегро-дифференциальной системы уравнений, описывающей перенос лучистой энергии для нестационарного, квазистационарного и регулярного режимов поведения решения. Решения строятся в декартовой геометрии для кинетической модели при специально подобранных коэффициентах поглощения и рассеяния. Приводится пример тестовой задачи для рассмотренных режимов поведения решения.

**Ключевые слова:** радиационный перенос энергии, регулярный режим, точное решение.

### **Введение**

Аналитические решения представляют интерес в качестве тестов для численных методов. Если они позволяют качественно и корректно моделировать различные физические процессы, то ценность таких решений резко возрастает. Точным решениям в области теории переноса нейтральных частиц в различных приближениях посвящено большое количество работ. Однако многие из известных точных решений не являются в некотором смысле «универсальными». В частности, они могут быть применимы для конкретного типа геометрии, для одной модели энергетического спектра или описывать часть характеристик радиационного поля и т.д. Одним из распространенных приемов получения точных решений является добавление в исходные уравнения вспомогательных членов. Это может оказаться удобным для тестирования программного кода, но существенно искажает поведение решения и снижает практическую значимость таких решений. В 1979 году сотрудниками РФЯЦ — ВНИИТФ было предложено точное автомодельное решение уравнения переноса фотонов в плоском слое для нестационарной кинетической модели в чисто поглощающей среде [1]. В этой работе для построения решения предлагалось использовать предопределенный вид коэффициента поглощения и пропорциональность уравнения состояния четвертой степени температуры, а также представление температуры в виде автомодельной переменной. Такой подход сближает данную работу с исследованием [2], где были предложены различные варианты точных

автомодельных решений для уравнения теплопроводности также в плоской геометрии. В дальнейшем проводились работы по развитию и совершенствованию указанного направления, например, [3–5]. Этот подход оказался весьма плодотворным, и предложенный класс точных решений широко используется специалистами РФЯЦ — ВНИИТФ, в том числе и автором, [6–8]. В представленной работе показана возможность применения рассматриваемой методологии построения точных решений для регулярного режима расчета.

## 1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение излучения в неподвижной среде, состоит из спектрального кинетического уравнения переноса, представляющего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества. Согласно [9, 10], уравнения в равновесном спектральном случае без учета движения среды для изотропного рассеяния в декартовой геометрии выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_\nu}{c \partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + \alpha_\nu I_\nu = \frac{\alpha_{c\nu}}{4\pi} B_\nu + \frac{\alpha_{s\nu}}{4\pi} \int_{\Omega} I_\nu d\Omega, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \alpha_{c\nu} \left( \int_{\Omega} I_\nu d\Omega - B_\nu \right) d\nu, \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \nu, t)$  — интенсивность излучения в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  в направлении  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\alpha_\nu(T, \nu) = \alpha_{c\nu}(T, \nu) + \alpha_{s\nu}(T, \nu)$  — коэффициент ослабления, равный сумме коэффициентов поглощения и рассеяния соответственно,  $T(\mathbf{r}, t)$  — температура вещества,  $E(T)$  — удельная внутренняя энергия вещества,  $B_\nu(\nu, T) = p\nu^3 (e^{\nu/T} - 1)^{-1}$  — функция Планка ( $B(T) = \sigma T^4$  — в приближении «серой материи»),  $\sigma, p$  — положительные константы,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  — плотность вещества,  $\nu$  — энергия фотонов.

Для системы уравнений (1) в области  $\Gamma$  пространства  $R^{\bar{n}}$  с замкнутой границей  $\bar{\Gamma}$  решается смешанная задача с начальными и граничными условиями:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t=0) = I_\nu^0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad I_\nu(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} < 0, t) = I_\nu(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{\Omega}, t), \quad T(\mathbf{r}, t=0) = T^0(\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\bar{\Gamma}$ .

Система (1) описывает нестационарный перенос излучения. Для локальной производной по времени  $\frac{\partial I_\nu}{c \partial t}$  получим  $\frac{\partial I_\nu}{c \partial t} \sim \frac{I}{ct_0}$ , где  $I$  — характерное значение интенсивности,  $t_0$  — характерное время задачи. Пространственные производные можно оценить как  $\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu \sim I/L$ , где  $L$  — характерный размер. Отношение производной по времени к пространственной по порядку величины равно  $ct_0/L$ , а величина  $L/c$  по порядку совпадает со временем, за которое свет проходит исследуемый объем  $t_n$ . Таким образом,

получим оценку  $\frac{\partial I_\nu}{c \partial t} / \Omega \cdot \nabla I_\nu \sim \frac{t_n}{t_0}$ , которая приводит к квазистационарной форме уравнения переноса

$$\Omega \cdot \nabla I_\nu + \alpha_\nu I_\nu = Q_\nu \quad (2)$$

в случае, когда свет проходит рассматриваемую область за время, много меньшее, чем характерное время задачи  $t_0$ . Для правой части уравнения переноса введено обозначение  $Q_\nu(\mathbf{r}, \nu, t)$ . Отсюда следует, что поле излучения мгновенно подстраивается под изменение параметров среды и не зависит от предыстории.

Запишем формальное решение уравнений переноса (1), (2):

$$\begin{aligned} I_\nu(l, t) = & \int_{l_0}^l Q_\nu \left( l', t - \frac{l-l'}{c} \right) \exp \left\{ - \int_{l_0}^l \alpha_\nu \left( l'', t - \frac{l-l''}{c} \right) dl'' \right\} dl' + \\ & + I_\nu \left( l_0, t - \frac{l-l_0}{c} \right) \exp \left\{ - \int_{l_0}^l \alpha_\nu \left( l'', t - \frac{l-l''}{c} \right) dl'' \right\}, \\ I_\nu(l) = & \int_{l_0}^l Q_\nu(l') \exp \left\{ - \int_{l_0}^l \alpha_\nu(l'') dl'' \right\} dl' + I_\nu(l_0) \exp \left\{ - \int_{l_0}^l \alpha_\nu(l'') dl'' \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль координаты  $l$  выбранного луча от границы тела  $l_0$ . Если предположить, что рассматриваемое уравнение имеет асимптотическое решение в форме

$$I_\nu = \tilde{I}_\nu e^{\lambda_\nu t}, \quad \lambda_\nu = \frac{\partial \ln \left( \int_{\Omega} I_\nu d\Omega \right)}{\partial t}, \quad (4)$$

то тогда решение нестационарного уравнения выходит на регулярный режим, где параметр  $\lambda_\nu$  может быть определен как предел логарифмической производной от интегральной интенсивности излучения по времени. В этом случае получаем

$$\Omega \cdot \nabla \tilde{I}_\nu + \left( \alpha_\nu + \frac{\lambda_\nu}{c} \right) \tilde{I}_\nu = Q_\nu. \quad (5)$$

Можно рассмотреть также квазирегулярный режим, на который выходит решение при  $t \rightarrow \infty$  и в случае, когда характерное время установления асимптотического решения значительно больше характерного времени изменения параметров задачи  $\alpha_{c\nu}, \alpha_{s\nu}$ . Тогда решение удовлетворяет следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}_\nu}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \tilde{I}_\nu + \left( \alpha_\nu + \frac{\lambda_\nu}{c} \right) \tilde{I}_\nu = Q_\nu, \\ I_\nu = \tilde{I}_\nu \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda_\nu dt \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом краевые условия остаются в силе с точностью до переобозначения. Так как асимптотическое решение (4) имеет экспоненциальный характер, функции  $\tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \Omega, \nu, t)$ ,  $\alpha_\nu(T, \nu)$  зависят от времени гораздо слабее, чем решение  $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, \nu, t)$ . Уравнения переноса

в квазирегулярном (6) и регулярном (5) режимах занимают промежуточное положение между нестационарным (1) и квазистационарным (2) режимами. Подробно этот вопрос рассматривался в работе [11]. Отметим, что для учета нестационарности решение уравнения в форме (5) неоднократно использовалось Гольдиным В.Я. и его коллегами в методе квазидиффузии [12–14]. Данный подход позволяет существенно экономить память компьютера, так как отсутствует необходимость хранения величин интенсивности с предыдущего шага.

## 2. Автомодельные аналитические решения

Согласно работе [8], далее будем рассматривать многокомпонентную гомогенную смесь, состоящую из  $\hat{m}$  -веществ, которая удовлетворяет следующей модели [15]:

$$z_v = \sum_m c_m z_{v,m}, \quad \sum_m c_m = 1,$$

где  $z_v$  — некоторая характеристика вещества,  $c_m$  — массовая доля вещества,  $m = 1, 2, \dots, \hat{m}$  — индекс вещества. Решение системы (1) ищем в виде:

$$T = T(\xi), \quad I_v = B_v f, \quad k_{v,m} = k_{0,m} \kappa_{v,m}, \quad \kappa_{v,m} = \kappa_{0,m} \frac{\partial \ln B_v}{\partial \xi}, \quad (7)$$

здесь  $\xi(\mathbf{r}, t)$  — автомодельная переменная,  $f(\mathbf{r}, \Omega) > 0$  — некоторая функция,  $\kappa_{0,m} > 0$ ,  $k_{0,m} \geq 0$  — некоторые константы. Подставив (7) в (1), получим:

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa_{0,m} \left( 1 + \frac{k_{0,m}}{4\pi} \int_{\Omega} f d\Omega \right)}{\kappa_{0,m} (1 + k_{0,m}) + \frac{\partial \xi}{c \partial t} + \Omega \cdot \xi_{\nabla}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta \gamma}{(1 - k_{0,m} \hat{f})(1 + \gamma \mu)},$$

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \frac{\hat{f}}{1 - k_{0,m} \hat{f}}, \quad \hat{f} = \delta \operatorname{Arth} \gamma, \quad \gamma = \frac{|\xi_{\nabla}|}{\kappa_{0,m} (1 + k_{0,m}) + \frac{\partial \xi}{c \partial t}},$$

$$\xi_{\nabla} = \nabla \xi, \quad \delta = \frac{\kappa_{0,m}}{|\xi_{\nabla}|}, \quad -1 \leq \mu = \cos(\Omega \cdot \xi_{\nabla}) \leq 1, \quad \xi = \xi_1 (\xi_{\nabla} \cdot \mathbf{r} + \xi_t t + \xi_0),$$

здесь  $\xi_t, \xi_1, \xi_0$  — константы. Предполагая степенную зависимость энергии вещества от температуры, представим уравнение состояния в форме  $E = \tilde{C} T^h$ , где  $\tilde{C}(T) = \sum_m c_m \tilde{C}_m(T)$  — некоторая положительная функция,  $h > 0$  — показатель степени, затем из второго уравнения системы (1) получим выражение для  $\tilde{C}_m$  соответствующих компонент смеси:

$$\tilde{C}_m = \frac{4\kappa_{0,m} \sigma T^{4-h} \left( (1 + k_{0,m}) \hat{f} - 1 \right)}{\rho_m h \frac{\partial \xi}{\partial t} (1 - k_{0,m} \hat{f})}.$$

Очевидно, что  $\tilde{C}(T)$  будет константой только в случае  $h = 4$ , что, впрочем, несущественно снижает практическую ценность изложенного подхода. Таким образом, получено решение для нестационарного случая [8]. Для квазистационарного режима достаточно положить в функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  производную по времени  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$ . В регулярном режиме вместо производной по времени появляется член, описывающий «временное поглощение»  $\lambda_v / c$ . С учетом (7) и того факта, что  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , получим:

$$\frac{\lambda_v}{c} = \frac{\frac{\partial \ln \left( \int_{\mathbf{\Omega}} I_v d\mathbf{\Omega} \right)}{c \partial t}}{c \partial t} = \frac{\partial \ln B_v}{c \partial t},$$

что приводит к виду  $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ , как и в нестационарном случае. Следовательно, рассматриваемые точные решения в нестационарном и регулярном режимах совпадают. Данный факт в некотором смысле «подтверждает корректность» использования регулярного режима для моделирования нестационарных задач. Отметим, что для криволинейных геометрий в рамках рассматриваемого подхода это не так в силу того, что функция  $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$  становится зависимой от времени [16].

Окончательно можно сделать вывод, что, хотя в данной работе не рассматривалось представление точного решения в форме, аналогичной (3), (6), тем не менее автором получены аналитические автомодельные решения для нестационарного, квазистационарного и регулярного режимов. При этом в квазистационарном случае меняется только функция интенсивности, а функция температуры, представленная автомодельной переменной, остается прежней.

### 3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу из работы [8] о прогреве холодной чисто поглощающей среды, состоящей из смеси двух веществ, тепловой волной в приближении «серой материи» для различных режимов. В начальный момент времени  $t^0$  зададим фоновую температуру  $T^0 = 0,002$  и, полагая  $T = \xi$  и  $\rho = 1$ , выберем следующий набор констант:

$$\hat{m} = 2, \quad c_1 = 0,2, \quad c_2 = 0,8, \quad \kappa_{0,1} = 5, \quad \kappa_{0,2} = 2,5, \quad k_{0,m} = 0, \quad h = 4, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_v = -0,5, \quad \xi_t = 5.$$

Тогда точное автомодельное решение будет описываться формулами:

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \xi = 5t - 0,5z, & T > T^0, \\ T^0, & T \leq T^0, \end{cases}$$

$$\tilde{C} = \frac{6\sigma}{5}(\hat{f} - 1)T^3, \quad \alpha_c = \frac{3}{T}, \quad I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t^0) = B(T^0), \quad I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \begin{cases} fB = -\frac{3\gamma}{1 + \gamma\mu}B, & T > T^0, \\ B, & T \leq T^0, \end{cases}$$

здесь  $\gamma = -0,5 / (3 + 5 / 3000)$  в нестационарном и регулярном режимах и  $\gamma = -0,5 / 3$  — в квазистационарном.

Задача решалась в плоской геометрии в области  $z \in [0, 1]$  с использованием метода дискретных ординат с гауссовой квадратурой, состоящей из 20 узлов [9, 10]. Конечно-разностная схема строилась методом конечных объемов. Для аппроксимации временной производной использовалась неявная схема Эйлера, для пространственной — противоположная St-схема первого порядка точности и DDAD-схема (метод дискретных ординат с искусственной диссипацией), разработанная и применяемая в РФЯЦ — ВНИИТФ [17]. В общем случае использовать DDAD-схему затруднительно ввиду ее немонотонности и неположительности, поэтому для коррекции отрицательных значений применяется переключение на St-схему. Для регулярного режима в каждой ячейке сетки параметр  $\lambda$  вычислялся с первым порядком точности по формуле  $\lambda \approx \left( \int_{\Omega} I^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} I^n d\Omega \right) / \left( \Delta t^n \int_{\Omega} I^{n+1} d\Omega \right)$ ,

где  $n$  — индекс шага по времени. Во всех расчетах сеточный шаг по времени составлял  $\Delta t^n = 0,0001$ , по пространству —  $\Delta z = 0,02$ . Выполнялось 500 шагов до момента времени  $t = 0,05$ . Итерации по температуре сводились с точностью до  $10^{-6}$ .

Результаты расчетов и аналитическое решение, представляющее собой линейную волну, исходящую из начала координат, представлены на рис. 1, 2. Видно, что рассмотренные точные решения для различных режимов подтверждаются расчетами и численные решения температурного профиля, полученные в различных режимах, практически неотличимы. Можно отметить, что DDAD/St-схема, в основном сохраняющая второй порядок точности, практически близка к точному решению на 50 ячейках, тогда как схема первого порядка показывает сопоставимый результат на 1600 ячейках. Также видны осцилляции численных решений по DDAD/St-схеме на фронте тепловой волны, которые вызваны переключением в разные моменты на схему первого порядка и связанным с этим изменением количества итераций. Напротив, St-схема демонстрирует монотонный профиль, и для всех трех рассматриваемых режимов она дает совпадающие решения температуры с точностью до константы сходимости. Для упрощения восприятия эти графики на рисунках не приводятся. Отметим, что максимальная величина отклонения от точного решения в расчетах на 50 ячейках в нестационарном режиме для St-схемы составила 0,085, для DDAD/St-схемы — 0,019.

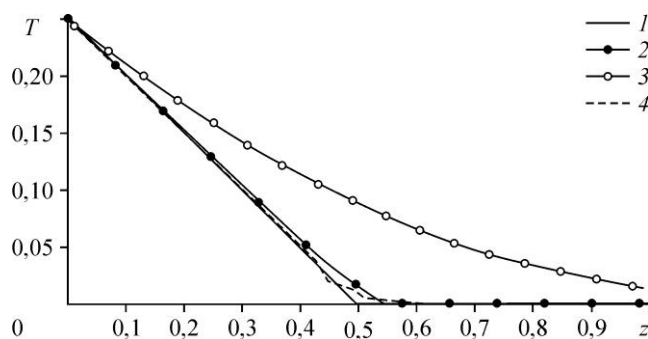


Рис. 1. Результаты DDAD/St-схемы и St-схемы в нестационарном режиме.

1 — результаты аналитического решения,  
2, 3 — расчет по St-схеме с 1600 и 50 ячейками соответственно,  
4 — расчет по DDAD/St-схеме с 50 ячейками.

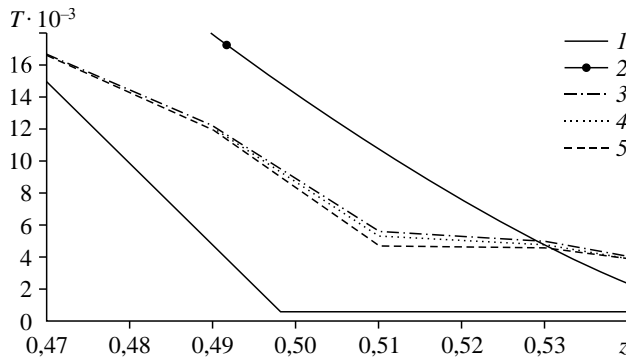


Рис. 2. Увеличенный фрагмент рис. 1 с результатами расчетов по DDAD/St-схеме с 50 ячейками и по St-схеме в нестационарном режиме с 1600 ячейками. 1 — результаты аналитического решения, 2 — расчет по St-схеме, 3–5 — расчет по DDAD/St-схеме соответственно в нестационарном, в квазистационарном и в регулярном режимах.

Приведенный пример показывает возможность применения рассматриваемого класса точных решений для исследования численных методов в трех различных постановках.

### Заключение

В представленной работе показано, что ранее известный класс точных автомодельных решений для нелинейной нестационарной системы кинетического уравнения переноса излучения и энергии в поглощающей, излучающей и изотропно рассеивающей среде включает в себя случаи квазистационарного и регулярного режимов.

Несмотря на некоторые недостатки рассмотренного подхода, важным, по мнению автора, является простота его реализации и описания первичной фундаментальной величины — интенсивности излучения  $I_\nu$ . Это дает возможность получения и других радиационных характеристик среды, что особенно актуально при разработке и отладке методов моделирования задач лучистого теплообмена.

### Список литературы

1. Думкина Г.В., Козманов М.Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 1061–1063.
2. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного решения температурных волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.
3. Андреев Е.С., Думкина Г.В., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 4. С. 1054–1055.
4. Гусев В.Ю., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и прогр. числ. решения задач мат. физ. 1986. Вып. 3. С. 20–21.
5. Шестаков А.А. Об одном точном решении системы спектральных уравнений переноса лучистой энергии // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и прогр. числ. решения задач мат. физ. 1988. Вып. 2. С. 40–43.
6. Завьялов В.В., Козманов М.Ю., Селезнев В.Н., Черняков В.Е., Шестаков А.А. Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Матем. моделирование физ. процессов. 2005. Вып. 3. С. 26–36.

7. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS<sub>n</sub> методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ-геометрии // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Матем. моделирование физ. процессов. 2010. Вып. 2. С. 30–39.
8. Завьялов В.В. Об одном классе аналитических автомодельных решений системы уравнений переноса излучения и энергии для гомогенной среды // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 6. С. 931–936.
9. Суржиков С.Е. Тепловое излучение газов и плазмы. М.: МГТУ им. Баумана, 2004. 544 с.
10. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
11. Гольдин В.Я., Юдинцев В.Ф. О расчете квазирегулярного и регулярного режима для уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и прогр. числ. решения задач мат. физ. 1985. Вып. 2. С. 43–49.
12. Анистратов Д.Ю., Аристова Е.Н., Гольдин В.Я. Нелинейный метод решения задач переноса излучения в среде // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 12. С. 3–28.
13. Аристова Е.Н., Гольдин В.Я., Колпаков А.В. Нелинейный метод решения задач переноса излучения в среде // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 3. С. 91–108.
14. Ghassemi P., Anistratov D.Y. An approximation method for time-dependent problems in high energy density thermal radiative transfer // J. of Computational and Theoretical Transport. 2020. Vol. 49, Iss. 1. P. 31–50.
15. Код ЭГИДА-2Д для моделирования двумерных задач. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2008. 344 с.
16. Zaviyalov V.V., Gusev V.Yu., Vershinskaya A.S. Exact solutions of system of equations of radiation and energy transfer in 3D spherically nonsymmetrical geometry // J. of Comput. and Appl. Mathem. 2006. Vol. 189, Iss. 1–2. P. 635–642.
17. Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Матем. моделирования физ. процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.

*Статья поступила в редакцию 25 ноября 2021 г.,  
после доработки — 1 ноября 2023 г.,  
принята к публикации 21 ноября 2023 г.*