УДК 532.517.4
DOI: 10.15372/PMTF202215176

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА РАЗВИТИЕ КАПИЛЛЯРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Н. М. Зубарев*,**, Е. А. Кочурин*,***

* Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
** Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия
*** Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
E-mails: nick@iep.uran.ru, kochurin@iep.uran.ru

Выполнено трехмерное прямое численное моделирование хаотической динамики свободной поверхности диэлектрической жидкости, находящейся во внешнем тангенциальном электрическом поле. В физической модели учитывается влияние энергетической накачки (внешнего воздействия), диссипации энергии (вязкости) и поверхностного натяжения. Показано, что при увеличении напряженности внешнего поля наблюдается переход от турбулентности дисперсионных капиллярных волн (при нулевом поле) к анизотропной электрогидродинамической волновой турбулентности. В предельном случае сильного поля, когда движение жидкости становится существенно анизотропным, формируется каскад мелкомасштабных капиллярных волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему полю. В этом режиме движения реализуется новый спектр турбулентности, отличающийся от классического спектра капиллярной турбулентности.

Ключевые слова: нелинейные волны, волновая турбулентность, электрическое поле, свободная поверхность, электрогидродинамика

Введение. Известно, что в результате резонансных волновых взаимодействий нелинейные волновые системы могут переходить в состояние квазистационарного хаотического движения (волновая турбулентность) [1, 2]. Статистические свойства таких систем изучает слабонелинейная теория (или теория слабой турбулентности), в рамках которой получено аналитическое решение кинетических уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие волн [1–3]. Эти решения, известные как спектры Колмогорова — Захарова, описывают стационарную перекачку энергии в волны малых или больших масштабов (прямой или обратный каскад соответственно). В настоящее время одним из наиболее изученных видов волновой турбулентности является турбулентность капиллярных волн на свободной поверхности жидкости, впервые теоретически описанная в работе [4].

Спектр Колмогорова — Захарова (известный также как спектр Захарова — Филоненко) для капиллярной турбулентности на поверхности жидкости можно представить в виде

$$S(\boldsymbol{k}) = C_{\rm KZ} P^{1/2} (\sigma/\rho)^{-3/4} k^{-19/4}, \qquad k = |\boldsymbol{k}|, \tag{1}$$

где $S(\boldsymbol{k}) = |\eta_k|^2$ — пространственный фурье-спектр для формы поверхности жидкости $\eta(x, y)$; $\boldsymbol{k} = \{k_x, k_y\}$ — волновой вектор; $C_{\rm KZ}$ — постоянная Колмогорова — Захарова;

P — скорость потока диссипации энергии на единицу площади поверхности; σ, ρ — поверхностное натяжение и массовая плотность жидкости соответственно. Заметим, что спектры Колмогорова — Захарова можно получить с использованием теории размерностей, т. е. аналогично тому, как получен спектр Колмогорова — Обухова для случая классической гидродинамической турбулентности [1, 2]. Спектры Колмогорова — Захарова для капиллярных и гравитационных поверхностных волн с высокой точностью подтверждены экспериментально [5–7] и численно [8–11].

В настоящее время наименее изученным видом турбулентности поверхностных волн остается электро- или магнитогидродинамическая (ЭГД или МГД соответственно) волновая турбулентность, возникающая при воздействии внешнего электрического (или магнитного) поля. Поверхностная волновая МГД-турбулентность впервые обнаружена экспериментально на границе жидкости, находящейся под воздействием магнитного поля, в работах [12, 13], в которых показано, что спектр турбулентности отклоняется от спектра (1) с увеличением напряженности внешнего магнитного поля. До настоящего времени полного теоретического объяснения этого явления не существовало. Ранее волновые ЭГД- и МГД-турбулентности численно исследовались только в одномерной плоскосимметричной постановке [14–17], что не позволяло непосредственно сравнивать полученные результаты с аналитическим спектром (1), полученным для изотропного трехмерного движения жидкости.

Целью настоящей работы является прямое численное моделирование турбулентности поверхностных ЭГД-волн в полной трехмерной постановке.

Вычислительная модель. Рассмотрим потенциальное течение идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью в однородном горизонтальном внешнем электрическом поле. Введем декартову систему координат с радиус-вектором $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$. Равенство $z = 0$ соответствует невозмущенной форме границы, а уравнение $z = \eta(x, y, t)$ описывает форму поверхности жидкости. Пусть вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси x и по абсолютному значению равен E. Потенциал скорости жидкости $\Phi(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ в области $z < \eta$. Будем рассматривать случай диэлектрической жидкости (свободные заряды в жидкости отсутствуют), т. е. напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}_{1,2}(\boldsymbol{r})$ описывается потенциалами электрического поля $\boldsymbol{E}_{1,2} = -\nabla\varphi_{1,2}$ (индексы 1 и 2 соответствуют областям внутри жидкости ($z < \eta$) и над ее свободной границей ($z > \eta$)). Потенциалы электрического поля удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta\varphi_{1,2} = 0$. Граничные условия для уравнений Максвелла в терминах потенциалов электрического поля задаются на свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ в виде

$$\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \varepsilon\,\partial_n\varphi_1 = \partial_n\varphi_2,$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость жидкости; ∂_n — производная по нормали к свободной поверхности. На расстоянии от границы жидкости $z \to \mp\infty$ электрическое поле становится однородным: $\varphi_{1,2} = -Ex$. Эволюция системы описывается кинематическим и динамическим граничными условиями

$$\begin{gathered} z = \eta(x, y, t): \qquad \eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\Phi, \\ \Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} = -g\eta + \sigma\,\nabla_\perp\cdot\frac{\nabla_\perp\eta}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp\eta)^2}} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2\rho}\,(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 - E^2), \end{gathered} \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения; ε_0 — электрическая постоянная; $\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$, $\nabla_\perp = \{\partial_x, \partial_y\}$ — дифференциальные операторы. Уравнения (2) представляют собой замкнутую систему, описывающую сильнонелинейную динамику свободной поверхности диэлектрической жидкости во внешнем горизонтальном электрическом поле с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения в полной трехмерной постановке. Выражение для полной энергии системы (гамильтониан) записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int\limits_{z \leqslant \eta} (\nabla \Phi)^2 \, d\boldsymbol{r} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int\limits_{z \leqslant \eta} ((\nabla \varphi_1)^2 - E^2) \, d\boldsymbol{r} - \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{z \geqslant \eta} ((\nabla \varphi_2)^2 - E^2) \, d\boldsymbol{r} + \\ + \int \Big[\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\sigma}{\rho} \big(\sqrt{1 + \nabla_\perp \eta} - 1 \big) \Big] \, dx \, dy. \qquad (3)$$

Закон дисперсии для линейных волн на границе диэлектрической жидкости, находящейся во внешнем горизонтальном электрическом поле, имеет вид [18]

$$\omega^2(\boldsymbol{k}) = gk + \frac{\gamma(\varepsilon)}{\rho} \, E^2 k_x^2 + \frac{\sigma}{\rho} \, k^3 \qquad (4)$$

(ω — частота; $\gamma(\varepsilon) = (\varepsilon - 1)^2/[\varepsilon_0(\varepsilon + 1)]$ — вспомогательный коэффициент). В отсутствие внешнего поля дисперсионное соотношение (4) описывает распространение поверхностных гравитационно-капиллярных волн, минимальная фазовая скорость которых достигается при длине волны $\lambda_0 = 2\pi(\sigma/g\rho)^{1/2}$ и волновом периоде $t_0 = 2\pi(\sigma/(g^3\rho))^{1/4}$. Эти значения удобно использовать в качестве характерных длины и времени, а безразмерные единицы ввести как $\tilde{t} = t/t_0$ и $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/\lambda_0$ (далее знак “$\sim$” опускается). Дисперсионное соотношение (4) можно записать в безразмерном виде

$$\omega^2(\boldsymbol{k}) = k + V_A^2 k_x^2 + k^3,$$

где величина $V_A^2 = \gamma E^2/(g\rho\sigma)^{1/2}$ имеет смысл скорости электрогидродинамической поверхностной волны, распространяющейся вдоль внешнего электрического поля. Далее первым слагаемым в правой части закона дисперсии пренебрегается, что соответствует случаю длин волн $k \gg 1$.

В слабонелинейном приближении полная система уравнений электрогидродинамики может быть сведена к двум уравнениям, описывающим динамику непосредственно границы. (Процедура вывода таких уравнений представлена в работах [19–21].) Уравнения движения границы жидкости можно получить с помощью вариационного дифференцирования гамильтониана:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \qquad (5)$$

где величины $\eta(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t) = \Phi(x, y, z = \eta, t)$ являются каноническими переменными. Гамильтониан системы (3) с учетом кубически нелинейных слагаемых в подынтегральном выражении имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \iint \big[(\nabla_\perp \eta)^2 + \psi \hat{k} \psi - \eta((\hat{k}\psi)^2 - (\nabla_\perp \psi)^2) + \\ + V_A^2 (\eta_x \hat{k}^{-1} \eta_x + A_E(\eta \eta_x^2 - \eta_x \hat{k}^{-1} \eta \hat{k} \eta_x + \eta_x \hat{k}^{-1} (\nabla_\perp \eta \cdot \nabla_\perp \hat{k}^{-1} \eta_x))) \big] \, dx \, dy, \qquad (6)$$

где $A_E = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$ — аналог числа Атвуда для электрического поля; $\hat{k}$ — интегральный оператор, определенный в фурье-пространстве как $\hat{k} f_k = k f_k$; $\hat{k}^{-1}$ — оператор, обратный $\hat{k}$. Для полного описания режима развитой волновой ЭГД-турбулентности свободной поверхности жидкости к уравнениям (5) необходимо добавить слагаемые, характеризующие внешнюю механическую силу (энергетическую накачку) и диссипацию энергии (вязкость). В результате система модельных уравнений движения границы жидкости принимает следующий вид:

$$\eta_t = \hat{k}\psi - \hat{k}(\eta \hat{k} \psi) - \nabla_\perp(\eta \nabla_\perp \psi) + \hat{D}_k \eta; \qquad (7)$$

$$\psi_t = \nabla_\perp^2 \eta + \frac{1}{2}\left[(\hat{k}\psi)^2 - (\nabla_\perp \psi)^2\right] + V_A^2 \hat{k}^{-1}\eta_{xx} - \frac{A_E V_A^2}{2}\left[2\hat{k}^{-1}\,\partial_x(\eta\hat{k}\eta_x - \nabla_\perp\eta\,\cdot\,\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_x) - \right.$$
$$\left. - \eta_x^2 - 2\eta\eta_{xx} - (\nabla_\perp \hat{k}^{-1}\eta_x)^2\right] + \mathcal{F}(k,t) + \hat{D}_k\psi. \qquad (8)$$

Здесь $\hat{D}_k$ — оператор, описывающий влияние вязкости и задаваемый как $\hat{D}_k f_k = -\nu(k - k_d)^2 f_k$ при $k \geqslant k_d$ и $\hat{D}_k = 0$ при $k < k_d$; ν — коэффициент, определяющий интенсивность диссипации энергии. Слагаемое $\mathcal{F}(k,t)$, характеризующее механическую накачку системы, задается в фурье-пространстве в виде

$$\mathcal{F}(k,t) = F(k)\exp\left[i\omega(k)t\right],$$

где $F(k) = F_0 \exp\left[-(k-k_0)^4/k_f\right]$; коэффициент F_0 определяет максимальную амплитуду накачки, которая достигается при длине волны $k = k_0$. Возмущения поверхности жидкости возбуждаются в диапазоне волновых чисел $1 \leqslant k \leqslant k_f$. В работах [19, 20] в предельном случае сильного поля при отсутствии диссипации и накачки энергии найдены точные аналитические решения системы уравнений (6), (7) в виде нелинейных поверхностных волн произвольной формы, распространяющихся в направлении электрического поля, т. е. аналогично альфвеновским волнам в идеально проводящей жидкости или плазме. Эти решения применимы для жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью. При конечной проницаемости под действием горизонтального электрического поля может происходить коллапс поверхностных волн [22, 23]. Таким образом, для корректного моделирования волновой ЭГД-турбулентности на свободной поверхности жидкости необходимо учитывать регуляризирующее влияние вязкости и поверхностного натяжения.

Используемая в настоящей работе вычислительная модель основана на численном решении системы уравнений (7), (8). Пространственные производные и интегральные операторы вычисляются с помощью псевдоспектральных методов с полным числом фурье-гармоник $N \times N$. Численное интегрирование по времени проводится с использованием явного метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности с шагом dt. Моделирование выполняется в периодической области размером $2\pi \times 2\pi$ при следующих значениях основных параметров: $N = 1024$, $dt = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 2000$, $k_0 = 3$, $k_f = 6$, $k_d = 200$, $\nu = 10$. Все вычисления проводятся для диэлектрической жидкости с проницаемостью $\varepsilon = 3$, что соответствует $A_E = 0{,}5$.

Результаты моделирования. Представлены результаты трех серий расчетов нелинейной динамики свободной поверхности жидкости при значениях безразмерной напряженности электрического поля $V_A = 0$; 5; 10, выбранных с целью показать переход из режима капиллярной волновой турбулентности поверхности жидкости в режим электрогидродинамической турбулентности при увеличении напряженности поля. На рис. 1,*a* представлена зависимость полной энергии системы (6) от времени. Видно, что система достаточно быстро переходит к квазистационарному режиму движения, при котором влияние внешнего воздействия компенсируется вязкостью, а полная энергия системы осциллирует вблизи некоторого среднего значения. На рис. 1,*б* приведены функции плотности вероятности f (probability density functions (PDF)) для амплитуды границы жидкости, измеренные в квазистационарном состоянии. Из рис. 1,*б* следует, что распределения плотности вероятности становятся близкими к нормальному распределению (сплошная линия соответствует гауссовой форме зависимости). Это свидетельствует о реализации режима развитой волновой турбулентности на поверхности жидкости.

На рис. 2 показаны форма границы $\eta(x,y)$ и распределение потенциальной энергии $U(x,y)$ на поверхности жидкости в квазистационарном режиме движения при различных значениях напряженности электрического поля. Видно, что движение жидкости имеет сложный хаотический характер. В отсутствие поля движение жидкости является

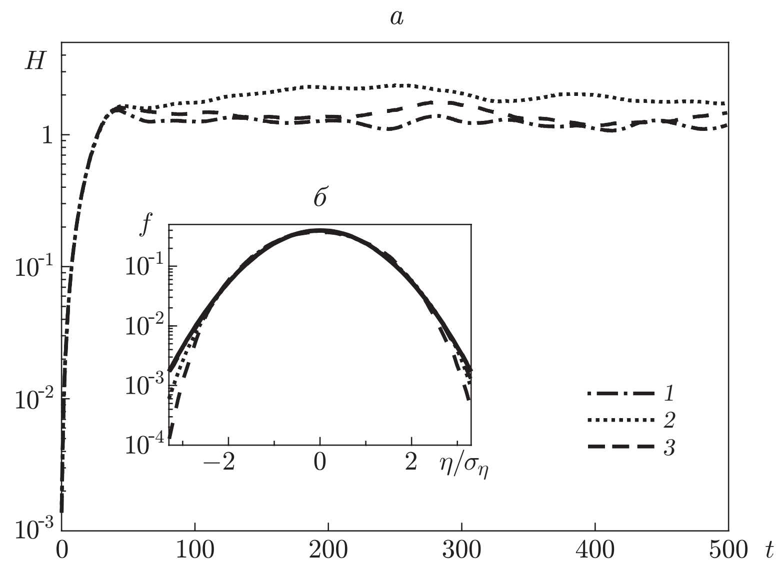

Рис. 1. Зависимости полной энергии системы от времени (a) и функции плотности вероятности f от относительной амплитуды поверхности ($б$) при различных значениях напряженности внешнего электрического поля:
1 — $V_A = 0$, *2* — $V_A = 5$, *3* — $V_A = 10$; сплошная линия — гауссова форма зависимости

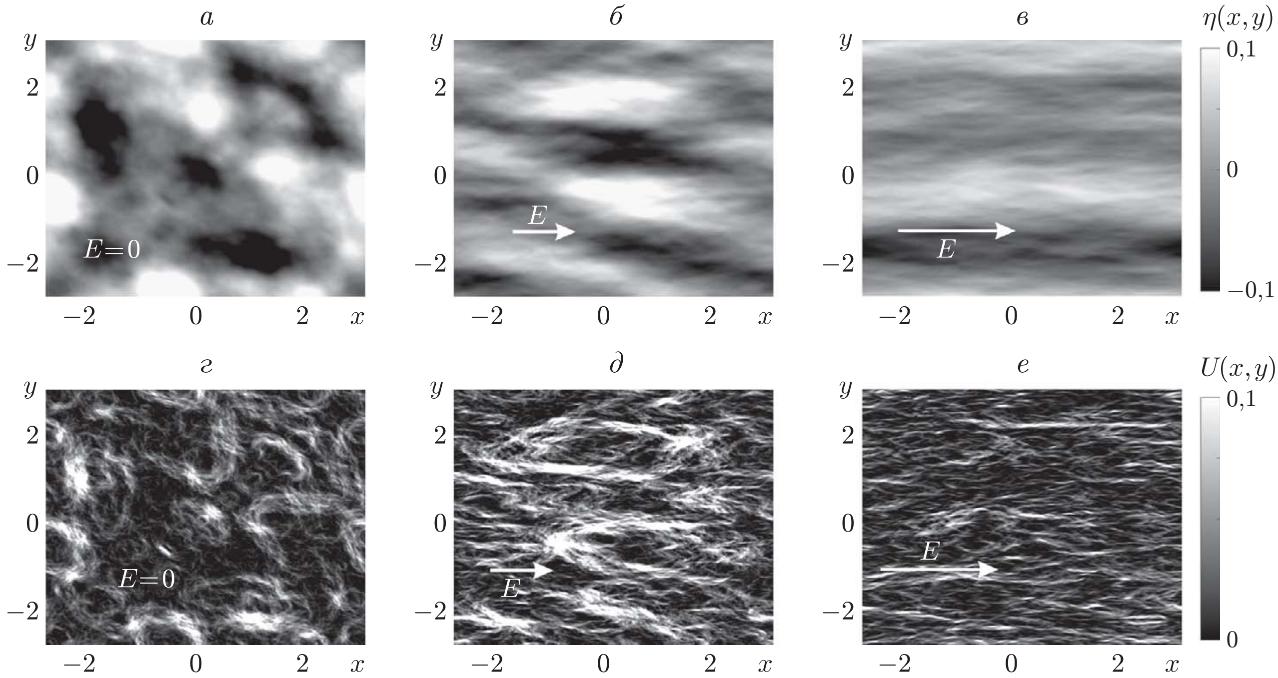

Рис. 2. Формы поверхности жидкости (a–$в$) и распределения потенциальной энергии на границе жидкости ($г$–$е$) в некоторые моменты времени квазистационарного движения при различных значениях безразмерной напряженности электрического поля:
a, $г$ — $V_A = 0$, $б$, $д$ — $V_A = 5$, $в$, $е$ — $V_A = 10$

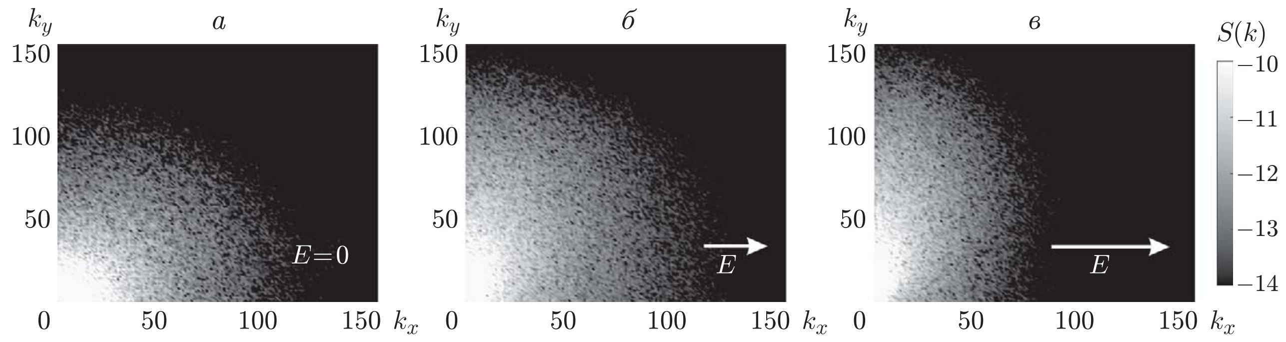

Рис. 3. Фурье-спектры профиля поверхности жидкости $\log(|\eta(k_x, k_y)|)$ в квазистационарном состоянии при различных значениях безразмерной напряженности электрического поля:
а — $V_A = 0$, *б* — $V_A = 5$, *в* — $V_A = 10$

изотропным (см. рис. 2,*а,г*). По мере увеличения напряженности поля движение границы становится анизотропным: поверхностные волны распространяются преимущественно в направлении оси y, т. е. перпендикулярно внешнему полю. В случае максимальной напряженности поля профиль поверхности становится сильно анизотропным и в направлении оси y формируются резкие скачки плотности потенциальной энергии (см. рис. 2,*в,е*). Об анизотропном характере движения жидкости свидетельствуют также фурье-образы функции $\eta(x, y)$, представленные на рис. 3 (показана область с положительными волновыми числами). При отсутствии внешнего электрического поля ($E = 0$) распределение фурье-гармоник является полностью изотропным. При увеличении напряженности амплитуды волн, распространяющихся вдоль оси x, уменьшаются. Амплитуды волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему полю, наоборот, увеличиваются. Таким образом, при включении внешнего горизонтального электрического поля происходят стабилизация возмущений, распространяющихся вдоль поля, и генерация мелкомасштабных капиллярных волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему полю.

Далее рассмотрим один из главных вопросов: согласуются ли результаты настоящей работы с результатами исследований, в которых в отсутствие поля получен аналитический спектр Захарова — Филоненко. Для этого на рис. 4 построены спектры поверхности, осредненные относительно фазового угла в фурье-пространстве. Видно, что в отсутствие электрического поля вычисленный спектр турбулентности хорошо согласуется со спектром (1). Для промежуточного значения напряженности электрического поля $V_A = 5$ спектр поверхностных возмущений близок к спектру (1). В случае максимальной напряженности поля $V_A = 10$ спектр поверхности не совпадает со спектром Захарова — Филоненко (1), полученным для сугубо капиллярной турбулентности. В этом режиме зависимость поверхностных возмущений от волнового числа хорошо согласуется с зависимостью $S(\boldsymbol{k}) \sim k^{-4}$. Заметим, что такой спектр турбулентности формируется за счет мелкомасштабных капиллярных волн, распространяющихся перпендикулярно направлению электрического поля, т. е. $k \sim k_y$. Таким образом, система переходит в квазиодномерный режим движения, при котором волны распространяются преимущественно вдоль оси y. Заметим также, что наблюдаемый спектр $S(\boldsymbol{k}) \sim k_y^{-4}$ не совпадает со спектром одномерной плоскосимметричной капиллярной турбулентности, в котором преобладают волновые резонансы более высокого порядка [24, 25].

Спектр турбулентности, наблюдаемый в режиме сильного поля, можно рассматривать в качестве спектра поверхностной ЭГД-турбулентности. Аналогичный спектр формируется в случае анизотропной МГД-турбулентности альфвеновских волн, наблюдаемой

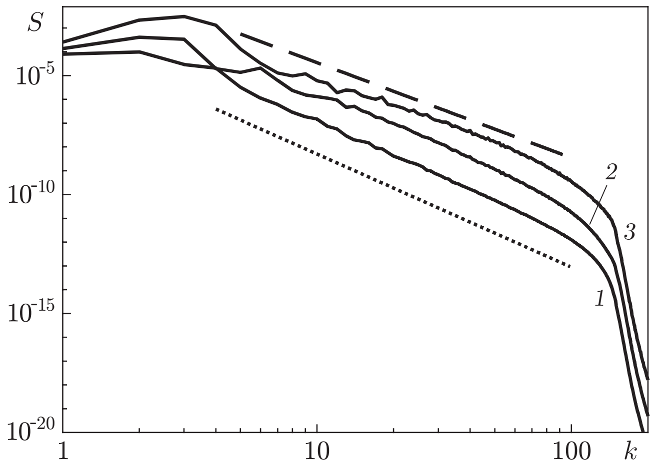

Рис. 4. Спектр функции $\eta(x, y)$, осредненный относительно фазового угла в фурье-пространстве, при различных значениях напряженности электрического поля: *1* — $V_A = 0$, *2* — $V_A = 5$, *3* — $V_A = 10$; пунктирная линия — зависимость (1), штриховая — зависимость $S(\boldsymbol{k}) \sim k^{-4}$

в идеально проводящей жидкости или плазме [26, 27]. Используя подход, основанный на анализе размерностей спектров слабой турбулентности [1, 2], можно получить оценку для спектра электрогидродинамической турбулентности на свободной поверхности жидкости:

$$S(\boldsymbol{k}) = C_E P^{1/2} V_A k^{-4} \approx C_E P^{1/2} V_A k_y^{-4}, \qquad |k| \approx k_y \tag{9}$$

(C_E — безразмерная постоянная). В работах [5–8, 12, 13] для спектра поверхностных возмущений используется определение

$$S(k) = \iint S(\boldsymbol{k})\, dk\, d\theta \approx S(k_y) = C_E P^{1/2} V_A k_y^{-3}$$

(θ — фазовый угол в фурье-пространстве). Спектр (9) является анизотропным. Такая анизотропия возникает вследствие перекачки энергии в направлении, перпендикулярном направлению внешнего поля. Таким образом, спектр (9), полученный в рамках теории размерностей, хорошо согласуется с результатами моделирования как качественно, так и количественно (см. рис. 3, 4).

Заключение. В работе проведено трехмерное прямое численное моделирование хаотической динамики свободной поверхности диэлектрической жидкости, находящейся во внешнем горизонтальном электрическом поле. Результаты моделирования достаточно точно воспроизводят спектр турбулентности Колмогорова — Захарова (Захарова — Филоненко) для капиллярных волн в отсутствие внешнего поля. В сильном электрическом поле движение жидкости становится анизотропным: наибольший вклад в спектр турбулентности вносят мелкомасштабные капиллярные волны, распространяющиеся перпендикулярно направлению действия поля. Иными словами, внешнее электрическое поле препятствует росту амплитуды возмущений поверхности, распространяющихся вдоль его направления. Спектр турбулентности поверхности жидкости в режиме сильного поля отличается от классического спектра Захарова — Филоненко, полученного для случая капиллярной волновой турбулентности, и близок к спектру МГД-турбулентности альфвеновских волн, наблюдаемому в идеально проводящей жидкости или плазме. Результаты исследования механизма генерации мелкомасштабных поверхностных волн могут быть использованы для создания новых материалов с заданными микрорельефом поверхности и степенью шероховатости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zakharov V. E.** Kolmogorov spectra of turbulence. 1. Wave turbulence / V. E. Zakharov, G. Falkovitch, V. S. L'vov. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
2. **Nazarenko S.** Wave turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
3. **Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.** О спектре акустической турбулентности // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 2. С. 297–300.
4. **Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.** Слабая турбулентность капиллярных волн // ПМТФ. 1967. № 5. С. 62–67.
5. **Falcon E., Mordant N.** Experiments in surface gravity-capillary wave turbulence // Annual Rev. Fluid Mech. 2022. V. 54. P. 1–25.
6. **Falcon E.** Laboratory experiments on wave turbulence // Discrete Continuous Dynam. Systems. B. 2010. V. 13, N 4. P. 819–840.
7. **Kolmakov G. V., Brazhnikov M. Y., Levchenko A. A., et al.** Capillary turbulence on the surfaces of quantum fluids // Progr. Low Temperature Phys. 2009. V. 16. P. 305–349.
8. **Deike L., Fuster D., Berhanu M., Falcon E.** Direct numerical simulations of capillary wave turbulence // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. 234501.
9. **Pushkarev A. N., Zakharov V. E.** Turbulence of capillary waves // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3320–3323.
10. **Pan Y., Yue D. K. P.** Direct numerical investigation of turbulence of capillary waves // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. 094501.
11. **Dyachenko A. I., Korotkevich A. O., Zakharov V. E.** Weak turbulent Kolmogorov spectrum for surface gravity waves // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. 134501.
12. **Boyer F., Falcon E.** Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a magnetic field // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 244502.
13. **Dorbolo S., Falcon E.** Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. 046303.
14. **Кочурин Е. А.** Формирование областей с высокими градиентами энергии и давления на свободной поверхности жидкого диэлектрика в тангенциальном электрическом поле // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 1. С. 91–98.
15. **Kochurin E. A., Zubarev N. M.** Gravity-capillary waves on the free surface of a liquid dielectric in a tangential electric field // IEEE Trans. Dielectrics Electric. Insulat. 2018. V. 25, N 5. P. 1723–1730.
16. **Кочурин Е. А.** Волновая турбулентность поверхности жидкости во внешнем тангенциальном электрическом поле // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 109, вып. 5. С. 306–311.
17. **Kochurin E. A.** Numerical simulation of the wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field // J. Magnetism Magnet. Materials. 2020. V. 503. 166607.
18. **Melcher J. R.** Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities // Phys. Fluids. 1961. V. 4. 1348.
19. **Zubarev N. M.** Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field // Phys. Lett. A. 2004. V. 333. P. 284–288.
20. **Зубарев Н. М.** Нелинейные волны на поверхности диэлектрической жидкости в горизонтальном электрическом поле в 3D геометрии; точные решения // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89, вып. 6. С. 317–321.
21. **Зубарев Н. М., Кочурин Е. А.** Трехмерные нелинейные волны на границе раздела диэлектрических жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 52–58.

22. **Кочурин Е. А.** Формирование слабых особенностей на поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, вып. 3. С. 7–9.
23. **Kochurin E. A., Zubareva O. V., Zubarev N. M.** Wave breaking on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field // IEEE Trans. Dielectrics Electric. Insulat. 2020. V. 27, N 4. P. 1222–1228.
24. **Kochurin E., Ricard G., Zubarev N., Falcon E.** Numerical simulation of collinear capillary-wave turbulence // Письма в ЖЭТФ. 2020. Т. 112, вып. 12. С. 799–800.
25. **Ricard G., Falcon E.** Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence // Europhys. Lett. 2021. V. 135. 64001.
26. **Galtier S.** Turbulence in space plasmas and beyond // J. Phys. A: Math. Theor. 2018. V. 51. 293001.
27. **Galtier S., Nazarenko S., Newell A., Pouquet A.** A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics // J. Plasma Phys. 2000. V. 63. P. 447–488.

Поступила в редакцию 22/VII 2022 г.,
после доработки — 23/VIII 2022 г.
Принята к публикации 29/VIII 2022 г.