

УДК 532.59+539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСТОЧНИКА В ЖИДКОСТИ ПОД ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНОЙ

А. В. Погорелова

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре

E-mail: milova@yandex.ru

Проведено исследование трехмерной нестационарной задачи о гидроупругом поведении плавающей бесконечной пластины под воздействием волн, генерируемых горизонтальным прямолинейным движением точечного источника массы в жидкости бесконечной глубины. Решение проводится с использованием известных интегральных и асимптотических методов. На основе полученных формул численно анализируется влияние толщины пластины, глубины погружения источника, его ускорения, торможения и скорости равномерного движения на амплитуду прогибов плавающей пластины.

Ключевые слова: идеальная жидкость, упругая пластина, нестационарное движение источника в жидкости.

Введение. Задача о движении источника в жидкости под плавающей пластиной представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. При использовании подводных судов в ледовых условиях может возникнуть необходимость их всплытия в сплошном льду. Для безопасного всплытия судна ледяной покров предварительно может быть разрушен или ослаблен трещинами, появляющимися вследствие возбуждения в нем изгибно-гравитационных волн при движении подводного судна вблизи поверхности раздела лед — вода.

Впервые проблема волновых движений, вызываемых телом, движущимся вблизи поверхности воды, покрытой плавающим льдом, рассмотрена в работе [1], в которой, в частности, решена плоская задача о движении вихря под битым льдом постоянной сплошности. Работа [2] посвящена изучению стационарного движения источника в неоднородной жидкости конечной глубины при наличии плавающей на поверхности жидкости упругой пластины. В [3] при исследовании гравитационно-упругих корабельных волн в случае нестационарного движения нагрузки по плавающей пластине отмечено, что выявленными свойствами волнообразования обладает также движущийся подводный источник. В работе [4] с помощью модельных экспериментов доказана возможность разрушения ледяного покрова за счет возбуждения в нем изгибно-гравитационных волн при движении подводного судна вблизи поверхности раздела лед — вода. В [5] в предположении о незначительности сил инерции ледяного покрова по сравнению с его силами упругости найдены амплитуды прогибов ледяного покрова при стационарном движении источника под упругой пластиной.

Целью настоящей работы является анализ влияния глубины погружения, скорости, ускорения и торможения прямолинейно движущегося в жидкости источника на амплитуду прогибов плавающей на поверхности пластины. Исследование проводится аналогично

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00130).

исследованию задачи о неустановившемся движении источника под свободной поверхностью жидкости [6].

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная упругая, изначально ненапряженная однородная изотропная тонкая пластина, плавающая на поверхности бесконечно глубокой жидкости. На глубине d вдоль пластины прямолинейно со скоростью $u(t)$ движется точечный источник дебита $q(t) = q_0 u(t)$. Связанная с источником система координат $Oxyz$ располагается следующим образом: плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью раздела пластина — вода, направление оси x совпадает с направлением движения источника, ось z направлена вертикально вверх, начало координат совпадает с проекцией источника на плоскость раздела пластина — вода. Предполагается, что вода — идеальная несжимаемая жидкость с плотностью ρ_2 , движение жидкости потенциальное.

В движущейся системе координат потенциал скоростей жидкости $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$, представляет собой сумму потенциалов скоростей источника $Q(0, 0, -d)$, стока $Q'(0, 0, d)$ и потенциала $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\Phi = \frac{q(t)}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\varphi(x, y, z, t)}{4\pi}. \quad (1.1)$$

Здесь

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2},$$

$\varphi(x, y, z, t)$ — искомая гармоническая функция в нижнем полупространстве.

Нормальный прогиб пластины $\zeta(x, y, t)$ описывается уравнением

$$D\nabla_h^4 \zeta + \rho_1 h \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - 2u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = -\rho_2 g \zeta - \rho_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$(z = 0),$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h , ρ_1 — толщина и плотность пластины; $\nabla_h^4 = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4/\partial y^4$.

Линеаризованное кинематическое условие на поверхности раздела пластина — вода имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.3)$$

При условии, что в момент времени $t = 0$ источник не имеет хода и отсутствуют любые возмущения, начальные условия для функции $\Phi(x, y, z, t)$ записываются в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0, t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho_1 h}{\rho_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right) \Big|_{z=0, t=0} = 0. \quad (1.4)$$

Предполагается, что закон изменения скорости источника в зависимости от времени приближенно выражается формулой [7]

$$u = u_1 \operatorname{th}(\mu_1 t) + (u_2 - u_1)[\operatorname{th}(\mu_2(t - t_2)) + \operatorname{th}(\mu_2 t_2)]/2 + \\ + (u_3 - u_2)[\operatorname{th}(\mu_3(t - t_3)) + \operatorname{th}(\mu_3 t_3)]/2, \quad (1.5)$$

где u_1 , u_2 , u_3 — значения скоростей, на которые последовательно выходит движущийся источник; μ_1 , μ_2 , μ_3 — коэффициенты, характеризующие ускорение (торможение) источника; значения t_2 и t_3 соответствуют моментам времени, в которые ускорение источника равно $\mu_2(u_2 - u_1)/2$ и $\mu_3(u_3 - u_2)/2$ соответственно, и являются точками перегиба графика функции $u(t)$.

Формула (1.5) позволяет исследовать следующие режимы изменения скорости источника (режимы движения) в зависимости от времени: 1) разгон — движение с заданной скоростью; 2) разгон — движение с заданной скоростью — торможение до полной остановки; 3) разгон — движение с первой заданной скоростью — разгон — движение со второй заданной скоростью; 4) разгон — движение с первой заданной скоростью — торможение — движение со второй заданной скоростью; 5) разгон — движение с заданной скоростью — торможение до полной остановки — разгон — движение с заданной скоростью.

В соответствии с (1.5) расстояние, пройденное источником, вычисляется по формуле

$$s = \frac{u_1}{\mu_1} \ln (\operatorname{ch} (\mu_1 t)) + \frac{u_2 - u_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} (\mu_2 (t - t_2))}{\operatorname{ch} (\mu_2 t_2)} \right) + \operatorname{th} (\mu_2 t_2) t \right) + \frac{u_3 - u_2}{2} \left(\frac{1}{\mu_3} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} (\mu_3 (t - t_3))}{\operatorname{ch} (\mu_3 t_3)} \right) + \operatorname{th} (\mu_3 t_3) t \right).$$

2. Аналитическое решение. Для получения аналитического решения задачи перейдем к безразмерным переменным:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{L}, \quad t' = t \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{L \sqrt{gL}}, \quad q' = \frac{q}{L^2 \sqrt{gL}},$$

$$u' = \frac{u}{\sqrt{gL}}, \quad s' = \frac{s}{L}, \quad \mu'_i = \mu_i \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad u'_i = \frac{u_i}{\sqrt{gL}}, \quad \gamma = \frac{d}{L}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Здесь $L = \sqrt{q_0}$ — характерный размер. В дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаются. Граничное условие (1.2) при $z = 0$ с учетом (1.3) в безразмерных переменных можно записать в виде

$$\varkappa \nabla_h^4 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \varepsilon \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial t^2} - \dot{u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - 2u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial x \partial z} + u^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial z} \right) = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \dot{u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \quad (2.1)$$

где $\varkappa = D/(\rho_2 g L^4)$; $\varepsilon = \rho_1 h/(\rho_2 L)$.

Кроме того, предполагается, что функция $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет условиям, необходимым для представления ее в виде разложения в интеграл Фурье по переменным x и y :

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk \int_{-\pi}^\pi A(k, \theta, t) \exp(k(z - \gamma)) \exp(ik(x \cos \theta + y \sin \theta)) d\theta. \quad (2.2)$$

Здесь $A(k, \theta, t)$ — неизвестная функция.

В дальнейшем используются следующие формулы [6]:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi \exp(k(z - \gamma)) \exp(ik(x \cos \theta + y \sin \theta)) d\theta,$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi \exp(-k(z + \gamma)) \exp(ik(x \cos \theta + y \sin \theta)) d\theta. \quad (2.3)$$

Подставляя выражения (1.1), (2.2), (2.3) в граничное условие (2.1) и используя функцию

$$B = A \exp(-\sigma s(t)) \quad (\sigma = ik \cos \theta), \quad (2.4)$$

получаем дифференциальное уравнение для $B(k, \theta, t)$

$$\ddot{B} + B \frac{k(1 + \varkappa k^4)}{1 + k\varepsilon} = f(k, \theta, t), \quad (2.5)$$

где

$$f(k, \theta, t) = \frac{-2 \exp(-\sigma s)}{1 + k\varepsilon} [u(1 + \varkappa k^4) + \varepsilon(\ddot{u} - 3\sigma u \dot{u} + \sigma^2 u^3)].$$

Общее решение уравнения (2.5) можно представить в виде

$$B(k, \theta, t) = B_1(k, \theta, t) + B_0(k, \theta, t), \quad (2.6)$$

где $B_1(k, \theta, t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения; $B_0(k, \theta, t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение $B_0(k, \theta, t)$, найденное при нулевых начальных условиях $B|_{t=0} = \dot{B}|_{t=0} = 0$ с использованием преобразования Лапласа и теоремы о свертке, имеет вид

$$B_0 = \int_0^t f(k, \theta, \tau) \frac{\sin(\sqrt{\beta}(t - \tau))}{\sqrt{\beta}} d\tau, \quad (2.7)$$

где $\beta = k(1 + \varkappa k^4)/(1 + k\varepsilon)$.

Решение $B_1(k, \theta, t)$ записывается в виде

$$B_1 = C_1(k, \theta) \sin(\sqrt{\beta}t) + C_2(k, \theta) \cos(\sqrt{\beta}t). \quad (2.8)$$

Здесь $C_1(k, \theta)$, $C_2(k, \theta)$ — неизвестные функции.

Подставляя (2.6) в (2.2) с использованием (2.4), (2.7), (2.8), начальных условий (1.4) и формулы (1.1), получаем следующее выражение для функции φ :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{-2\varepsilon \dot{u}(0) \sin(\sqrt{\beta}t)}{\sqrt{\beta}(1 + k\varepsilon)} + \int_0^t f(k, \theta, \tau) \frac{\sin(\sqrt{\beta}(t - \tau))}{\sqrt{\beta}} d\tau \right) \times \\ \times \exp(\sigma s(t) + k(z - \gamma) + ik(x \cos \theta + y \sin \theta)) d\theta. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Для определения прогиба пластины $\zeta(x, y, t)$ с использованием кинематического условия (1.3) граничное условие (1.2) в безразмерных переменных записывается в виде

$$\varkappa \nabla_h^4 \zeta + \zeta = \psi(x, y, t), \quad (2.10)$$

где

$$\psi(x, y, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=0} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \Big|_{z=0} + \varepsilon u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \Big|_{z=0}.$$

Представляя прогиб пластины ζ в виде интеграла Фурье по переменным x и y , из уравнения (2.10) получаем выражение для ζ в виде

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^\infty \frac{\exp(-k\gamma + ik(x \cos \theta + y \sin \theta))}{1 + \varkappa k^4} \times \\ \times \left[\exp(\sigma s) \left(2\varepsilon \cos(\sqrt{\beta}t) \dot{u} \Big|_{t=0} - \int_0^t f_1(\tau) \cos(\sqrt{\beta}(t - \tau)) d\tau \right) + 2\varepsilon(\sigma u^2 - \dot{u}) \right] k dk, \quad (2.11) \end{aligned}$$

где $f_1(\tau) = f(k, \theta, \tau)(1 + k\varepsilon)$.

При $y = 0$ прогиб пластины вычисляется по упрощенной формуле

$$\zeta(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-k\gamma)k}{1 + \varkappa k^4} \left(\int_0^t \cos(\sqrt{\beta}(t - \tau))(D_1 + D_2 + D_3) d\tau + D_4 + D_5 + D_6 \right) dk,$$

$$D_1 = J_0[k(x + s(t) - s(\tau))][u(1 + \varkappa k^4) + \varepsilon(\ddot{u} - u^3 k^2/2)],$$

$$D_2 = J_1[k(x + s(t) - s(\tau))]3\varepsilon u i k, \tag{2.12}$$

$$D_3 = J_2[k(x + s(t) - s(\tau))]\varepsilon u^3 k^2/2, \quad D_4 = J_0[k(x + s(t))] \cos(\sqrt{\beta}t)\varepsilon \dot{u}(0),$$

$$D_5 = -J_0(kx)\varepsilon \dot{u}, \quad D_6 = -J_1(kx)\varepsilon u^2 k.$$

Для анализа решения (2.11) при $t \rightarrow \infty$ принимаются следующие предположения:

$$\varepsilon = 0, \quad u = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u_1 = \text{const}, & t \geq 0, \end{cases} \quad s(t) = u_1 t, \quad q = q_0 u_1. \tag{2.13}$$

Вычисляя внутренний интеграл по переменной τ в (2.11) с использованием упрощений (2.13), получаем

$$\zeta(x, y, t) = I_1 + I_2, \quad I_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\exp(-k\gamma + ik(x \cos \theta + y \sin \theta))(-\sigma)u_1^2}{\beta + (\sigma u_1)^2} k dk,$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\exp(-k\gamma + ik(x \cos \theta + y \sin \theta))u_1}{\beta + (\sigma u_1)^2} \times$$

$$\times \exp(\sigma u_1 t)(\sigma u_1 \cos(\sqrt{\beta}t) + \sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}t))k dk.$$

Здесь интеграл I_1 — стационарное решение, не зависящее от времени t ; интеграл I_2 описывает неустановившийся волновой процесс. Применяя при анализе интеграла I_2 метод стационарной фазы для большого параметра t , при $u_1 \neq u_{\min}$ получаем $I_2 = O(t^{-1})$ ($u_{\min} = 2(Dg^3/(27\rho_2))^{1/8}$ — минимальная фазовая скорость распространения изгибно-гравитационных волн в глубокой воде [1, 3, 8]). Таким образом, с увеличением времени t при движении источника со скоростями, не равными u_{\min} , интеграл I_2 стремится к нулю. При $u_1 = u_{\min}$ одна из стационарных точек фазовой функции интеграла I_2 является также особой точкой подынтегральной функции, вследствие чего интеграл I_2 расходится.

После ряда несложных преобразований интеграл I_1 можно привести к виду

$$I_1 = \frac{u_1^2}{\pi^2} \int_0^\infty \cos(\alpha y) \left(\int_\alpha^\infty \frac{\exp(-k\gamma) \sin(x\sqrt{k^2 - \alpha^2})}{\varkappa k^5 - u_1^2 k^2 + k + u_1^2 \alpha^2} k dk \right) d\alpha.$$

Полученный интеграл совпадает с выражением в работе [5], если в решении, приведенном в этой работе, дебит источника принять равным $q = q_0 u_1$ (заметим, что в [5] дебит источника q не зависел от скорости). При $u_1 = u_{\min}$ интеграл I_1 стремится к бесконечности (известная особенность стационарного решения [1, 3, 8]). Таким образом, при условиях (2.13), $u_1 \neq u_{\min}$, $t \rightarrow \infty$ решение (2.11) выходит на стационарное решение [5]. При $u_1 = u_{\min}$, $t \rightarrow \infty$ решение (2.11) стремится к бесконечности.

3. Результаты численных расчетов. Численные расчеты по формулам (2.11), (2.12) проводились с использованием метода Гаусса для следующих значений параметров пластины, источника и жидкости: $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3$, $E = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$,

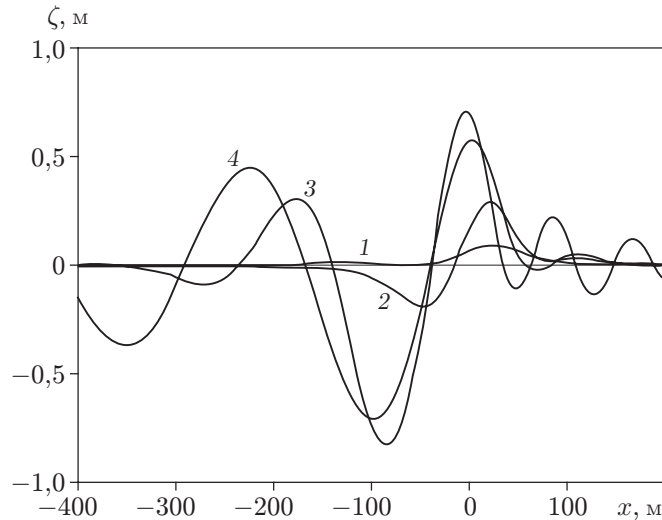


Рис. 1. Зависимость прогибов пластины от координаты x в случае нестационарного режима движения при $d = 25$ м, $h = 1$ м, $y = 0$, $\mu_1 = 0,05$ с $^{-1}$, $u_1 = u_2 = u_3 = 20$ м/с:
 1 — $t = 9$ с; 2 — $t = 20$ с; 3 — $t = 45$ с; 4 — $t = 100$ с

$g_0 = 100$ м 2 , $\nu = 1/3$. Заметим, что ниже все результаты численных расчетов приведены для размерных величин ζ , x , y , z , t , u , t_2 , t_3 , μ_1 , μ_2 , μ_3 , u_1 , u_2 , u_3 .

На рис. 1 показана зависимость прогибов пластины ζ от координаты x при $y = 0$ (вдоль линии движения источника) в различные моменты времени t в случае движения источника в первом режиме (из состояния покоя источник начинает движение с ускорением и постепенно выходит на режим равномерного движения со скоростью 20 м/с). На рис. 2, а–г представлены изолинии прогибов пластины, соответствующие кривым 1–4 на рис. 1. На рис. 1, 2 видно, что в начале движения источника ($t = 9$ с) на кривой прогиба пластины имеется небольшой максимум. При $t = 20$ с, когда скорость источника еще мала, прогиб пластины подобен прогибу при стационарном движении источника под пластиной на докритических скоростях [5]. При $t = 45$ с амплитуда прогиба пластины достигает максимальных значений, соответствующих выходу источника на околоскритическую скорость. Форма прогиба пластины при $t = 100$ с аналогична форме ее прогиба при стационарном движении погруженного источника со сверхкритической скоростью [5].

Из рис. 1, 2 следует, что прогиб пластины достигает максимальных значений на линии $y = 0$. Обозначим через $\zeta_*(t)$ максимальную амплитуду прогиба пластины в плоскости $y = 0$ в момент времени t . На рис. 3 представлена зависимость $\zeta_*(t)$ при различных режимах движения источника. Видно, что если после начального ускорения источник выходит на режим равномерного движения со скоростью $u \neq u_{\min}$ (кривые 1, 3), то максимальные амплитуды прогиба ζ_* с течением времени выходят на некоторые постоянные значения. Если после разгона источник движется равномерно со скоростью $u = u_{\min}$ (кривая 2), то максимальная амплитуда прогиба ζ_* является монотонно возрастающей функцией времени. В работах [8, 9] при решении плоских нестационарных задач установлено, что в случае бесконечно глубокой жидкости при равномерном движении нагрузки со скоростью $u = u_{\min}$ по плавающей пластине амплитуда прогиба увеличивается как \sqrt{t} при $t \rightarrow \infty$. На рис. 3 видно, что величина ζ_* достигает наибольших значений при выходе на критические и сверхкритические скорости ($u \geq u_{\min}$). При выходе источника после разгона на докритические скорости максимальная амплитуда прогиба пластины ζ_* мала (кривая 1). Медленный

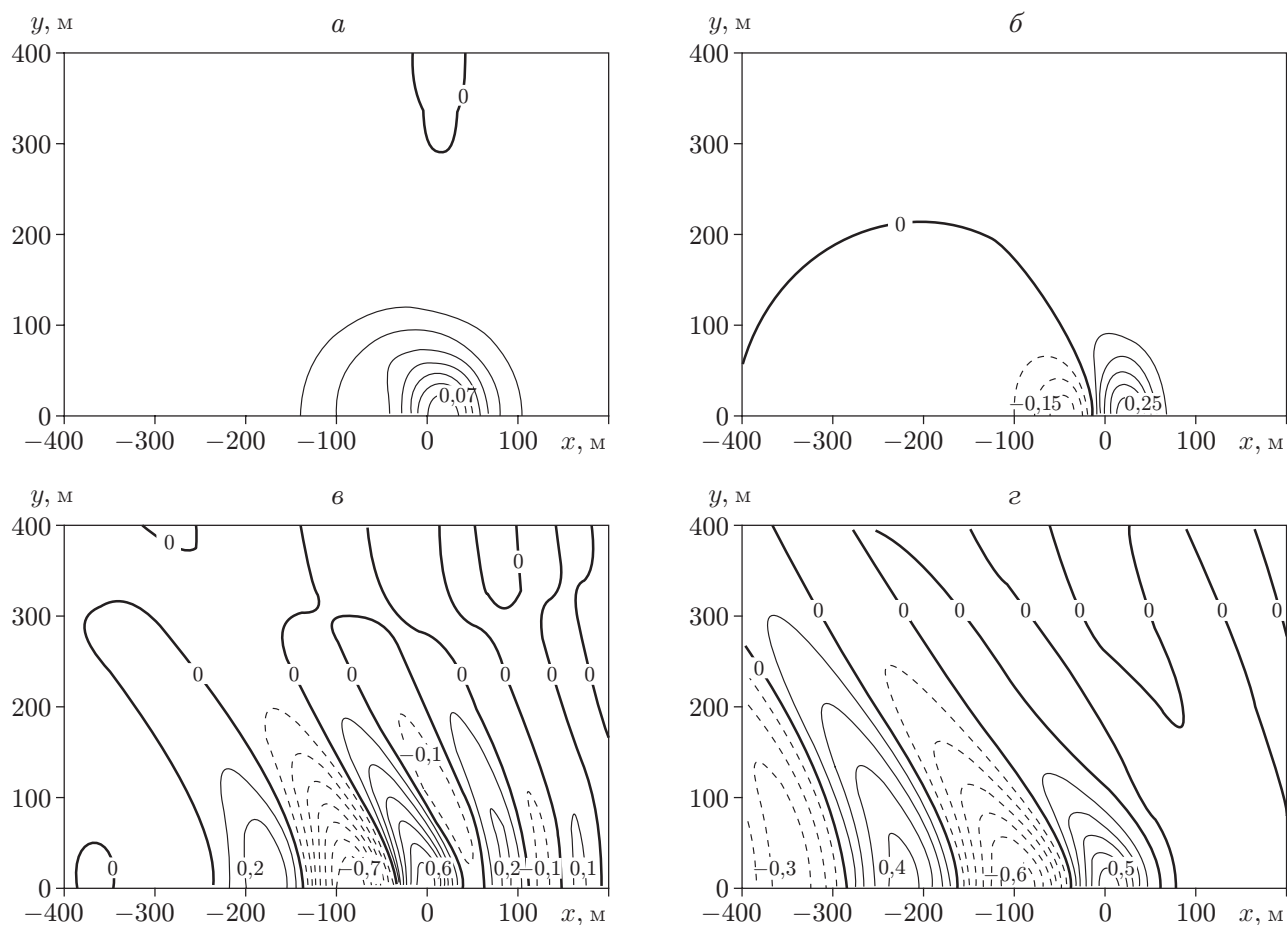


Рис. 2. Изолинии прогибов ζ (в метрах) пластины при $d = 25$ м, $h = 1$ м, $\mu_1 = 0,05 \text{ с}^{-1}$, $u_1 = u_2 = u_3 = 20$ м/с:
 а — $t = 9$ с; б — $t = 20$ с; в — $t = 45$ с; г — $t = 100$ с

разгон до сверхкритической скорости приводит к незначительному и кратковременному увеличению прогиба пластины (кривая 4). При торможении источника, движущегося со сверхкритической скоростью, до полной остановки амплитуда прогиба пластины уменьшается (кривая 5). Разгон источника до сверхкритической скорости, затем торможение до полной остановки и последующий разгон до сверхкритической скорости обеспечивают увеличение максимального прогиба пластины на 30 % (кривая 6).

Наличие излома на кривой 3 можно объяснить следующим образом. Величина ζ_* представляет собой абсолютную величину максимального отклонения пластины от положения $z = 0$. При малых значениях времени максимальное отклонение пластины в положительном направлении оси Oz имеет место перед источником (над ним). (Аналогичное поведение пластины наблюдается на рис. 2, а, б.) При этом прогиб пластины в отрицательном направлении оси Oz (вниз) отсутствует либо его абсолютная величина меньше абсолютной величины прогиба вверх перед источником. По мере разгона источника прогиб пластины (вниз) за источником увеличивается, и в некоторый момент времени его абсолютная величина становится больше величины прогиба вверх, который начинает уменьшаться (аналогичное поведение пластины наблюдается на рис. 2, в, г). Поэтому на кривой 3 на рис. 3 участок перед изломом соответствует максимальным значениям прогиба вверх перед источником (над ним), участок за изломом — максимальным значениям абсолютной величины прогиба вниз за источником.

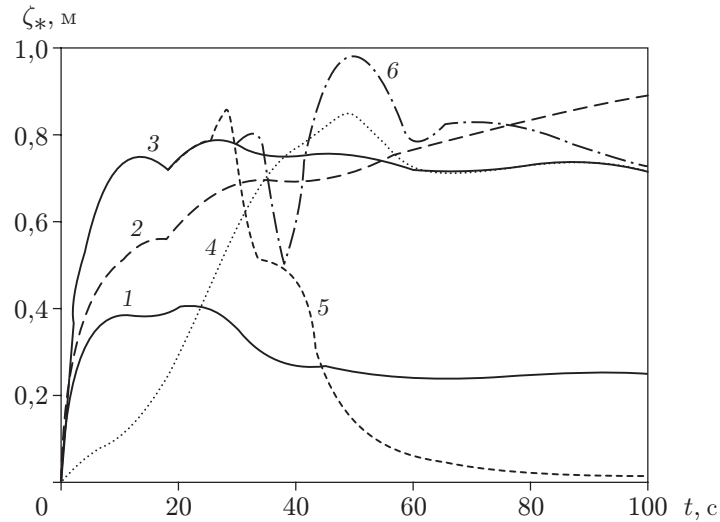


Рис. 3. Зависимость максимальной амплитуды прогиба пластины ζ_* от времени t при $d = 25$ м, $h = 1$ м, $y = 0$:

1 — $u_1 = u_2 = u_3 = 14$ м/с, $\mu_1 = 1$ с⁻¹; 2 — $u_1 = u_2 = u_3 = 16$ м/с $\approx u_{\min}$, $\mu_1 = 1$ с⁻¹;
 3 — $u_1 = u_2 = u_3 = 20$ м/с, $\mu_1 = 1$ с⁻¹; 4 — $u_1 = u_2 = u_3 = 20$ м/с, $\mu_1 = 0,05$ с⁻¹; 5 —
 $u_1 = 20$ м/с, $u_2 = u_3 = 0$, $\mu_1 = 1$ с⁻¹, $\mu_2 = 0,5$ с⁻¹, $t_2 = 25$ с; 6 — $u_1 = u_3 = 20$ м/с,
 $u_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ с⁻¹, $t_2 = 30$ с, $t_3 = 40$ с

Рассмотрим равномерное движение источника с постоянной скоростью $u = u_1 = u_2 = u_3$ после быстрого разгона. На рис. 4 сплошными кривыми показана зависимость максимальной амплитуды прогиба ζ_* от скорости равномерного движения u при различных значениях глубины погружения источника d и толщины ледяного покрова h . Видно, что увеличение толщины пластины и глубины погружения источника приводит к уменьшению прогибов пластины. При равномерном движении источника с докритическими скоростями ($u < u_{\min}$) максимальная амплитуда прогиба мала. (Заметим, что при используемых в данной работе параметрах пластины и жидкости для пластины толщиной $h = 0,5; 1,0; 2,0$ м $u_{\min} = 12,297; 15,947; 20,681$ м/с соответственно.) Если источник движется равномерно со скоростью $u \geq u_{\min}$, то амплитуда прогиба превышает докритические значения в 5–10 раз.

Представляет интерес сравнение амплитуды максимального прогиба пластины в случае равномерного движения источника после разгона с аналогичными результатами, полученными в случае стационарного движения [5]. Как отмечено выше, при $t \rightarrow \infty$ и условиях (2.13) нестационарное решение (2.11) выходит на стационарное [5]. На рис. 4 штриховыми линиями показаны результаты стационарного решения с использованием формул из работы [5] для $q = q_0 u$ (напомним, что в [5] дебит источника q не зависел от скорости) и приведенных выше значений параметров $\rho_1, \rho_2, E, q_0, \nu$ при различных значениях толщины пластины и глубины погружения источника. Видно, что при докритических и сверхкритических скоростях в случае равномерного движения источника стационарное и нестационарное решения хорошо согласуются. При околоскритических скоростях движения источника ($u \approx u_{\min}$) в знаменателе стационарного решения [5] имеется особенность, вследствие чего наблюдается неограниченный рост амплитуды изгибно-гравитационной волны (аналогичную особенность имеет стационарное решение в случае движения нагрузки по плавающей упругой пластине [1, 3, 8]). В случае нестационарного решения в фиксированный момент времени $t = 60$ с амплитуда прогиба при околоскритических скоростях движения не достигает бесконечных значений.

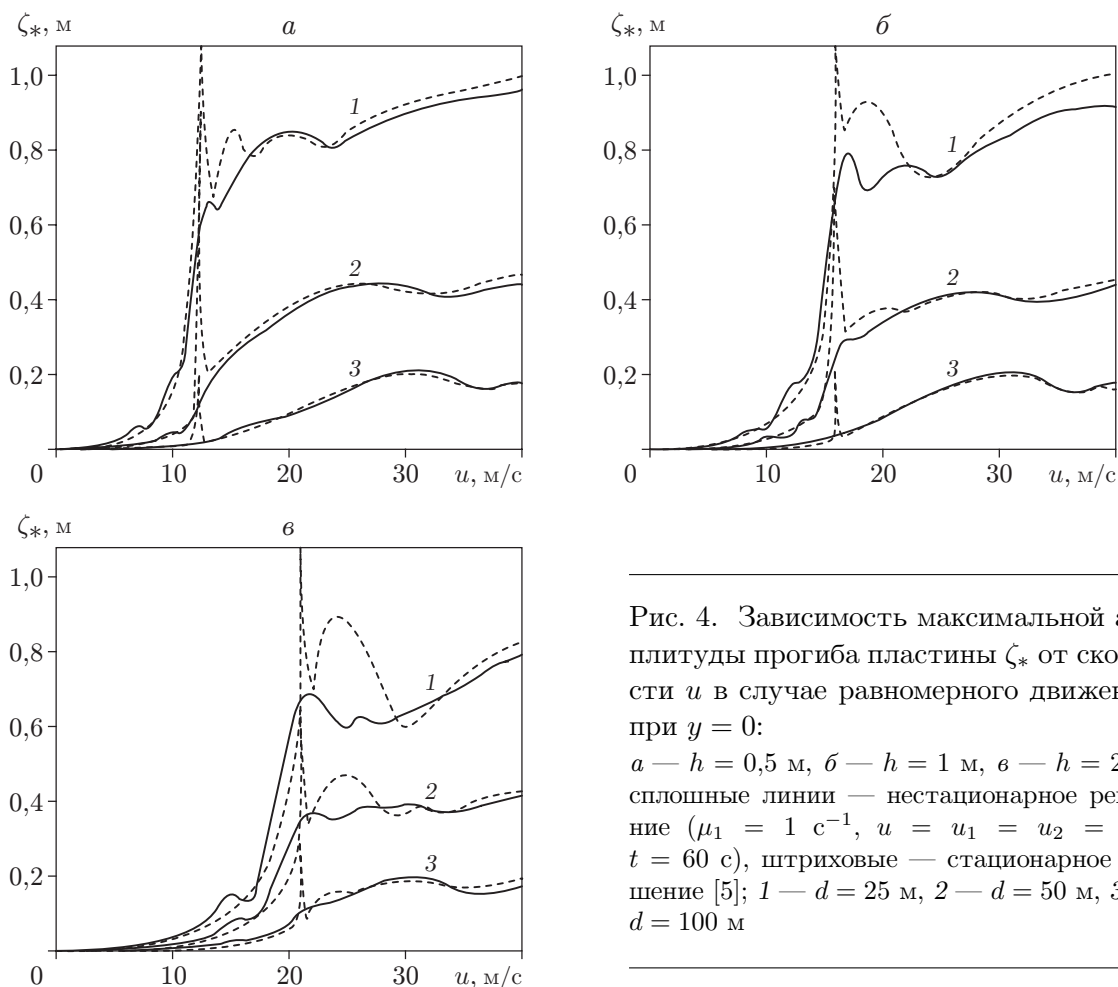


Рис. 4. Зависимость максимальной амплитуды прогиба пластины ζ_* от скорости u в случае равномерного движения при $y = 0$:
 a — $h = 0,5$ м, $б$ — $h = 1$ м, $в$ — $h = 2$ м; сплошные линии — нестационарное решение ($\mu_1 = 1 \text{ с}^{-1}$, $u = u_1 = u_2 = u_3$, $t = 60 \text{ с}$), штриховые — стационарное решение [5]; 1 — $d = 25$ м, 2 — $d = 50$ м, 3 — $d = 100$ м

Заметим, что при равномерном прямолинейном движении тела по пластине [1, 8], плавающей на поверхности бесконечно глубокой жидкости, амплитуда прогиба пластины достигает максимальных значений при скоростях движения $u \approx u_{\min}$. Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке [7], движущихся по сплошному ледяному покрову при бесконечной глубине водоема, также имеет четко выраженный максимум в окрестности значения скорости $u \approx u_{\min}$. Из рис. 4 следует, что при движении погруженного источника под пластиной на кривой зависимости $\zeta_*(u)$ максимальная амплитуда прогиба при конечном значении времени $t = 60 \text{ с}$ не имеет четко выраженного максимума в окрестности точки $u \approx u_{\min}$. Возможно, это обусловлено тем, что в настоящей работе рассматривается движение точечного источника массы, а не тела конечных размеров.

На рис. 5 приведены изолинии прогибов пластины толщиной $h = 2$ м при равномерном движении источника после разгона на глубине $d = 40$ м. При различных скоростях равномерного движения источника наблюдается различное поведение прогибов пластины. Например, на рис. 5,а видно, что при докритических скоростях движения источника ($u < u_{\min}$) изгибно-гравитационные волны не образуются. Заметим, что при движении тела с малыми скоростями ($u < u_{\min}$) по плавающей пластине [3, 8, 10, 11] изгибно-гравитационная волна также не образуется. В случае равномерного движения источника с околоскритическими скоростями (см. рис. 5,б,в) четко видны изгибно-гравитационные волны, в которых имеются волновые предвестники (изгибная волна) перед источником и гра-

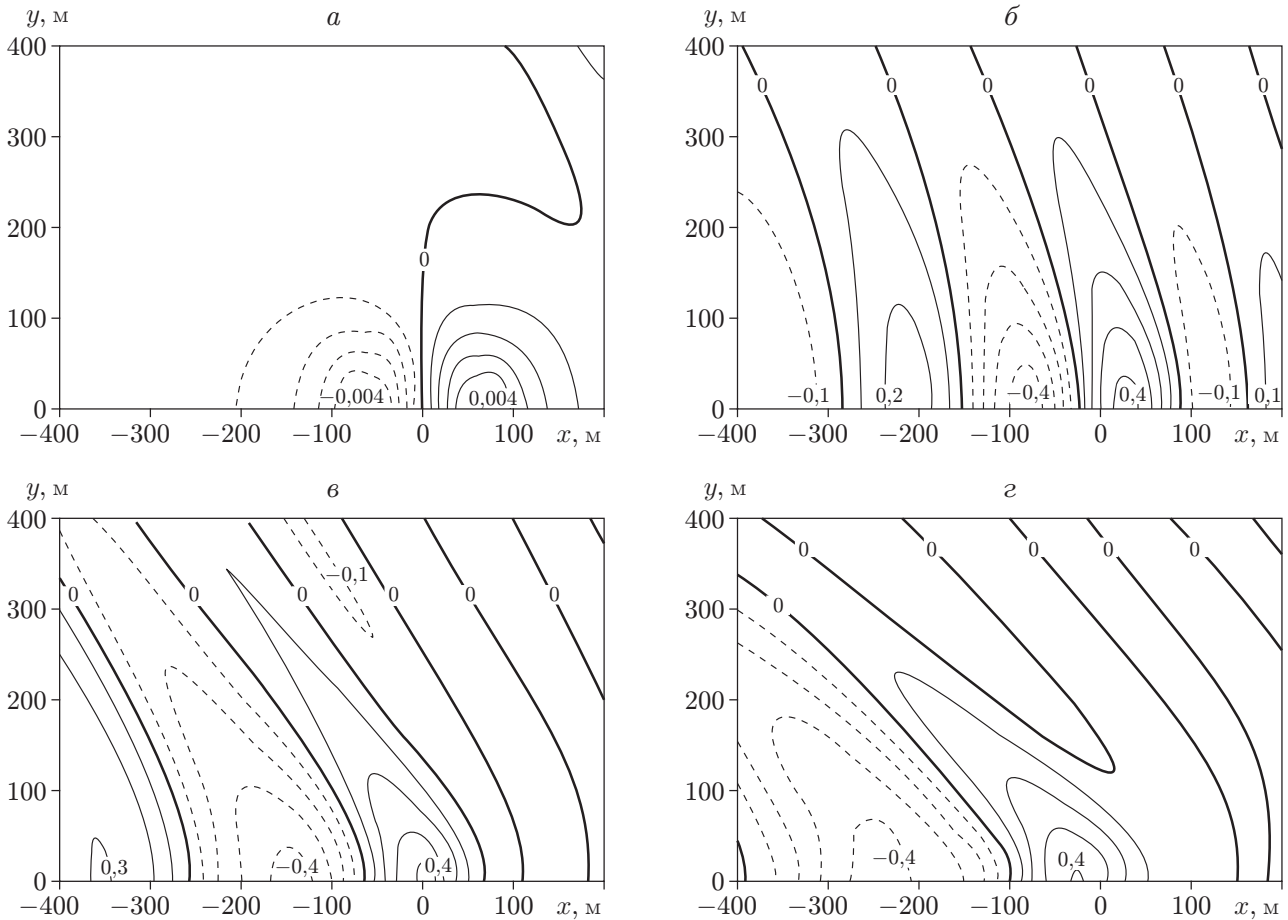


Рис. 5. Изолинии прогибов ζ (в метрах) пластины толщиной $h = 2$ м в случае равномерного движения источника после разгона на глубине $d = 40$ м ($\mu_1 = 1$ с $^{-1}$, $u = u_1 = u_2 = u_3$, $t = 60$ с) при различных скоростях u :
 а — $u < u_{\min}$ ($u = 5$ м/с); б — $u = u_{\min} = 20,681$ м/с; в — $u = 1,2u_{\min} = 24,817$ м/с; г — $u = 1,5u_{\min} = 31,022$ м/с

витационная составляющая за источником. При сверхкритических скоростях (см. рис. 5, г) основной вклад в амплитуду изгибно-гравитационной волны вносит гравитационная составляющая, а волновые предвестники малы. Из рис. 5, б–г следует, что при критической скорости движения прогибы пластины обусловлены только наличием поперечных волн, а при сверхкритических скоростях наряду с поперечными волнами имеются продольные. Результаты, представленные на рис. 5, соответствуют образованию корабельных волн при движении нагрузки по пластине [3, 10, 11].

Заметим, что в случае равномерного движения источника с малой скоростью (см. рис. 5, а) прогиб пластины отличается от прогиба в начале разгона (см. рис. 2, а). Если при разгоне прогиб имеет небольшой максимум над источником, то в дальнейшем при равномерном движении источника с малыми скоростями перед ним имеется небольшой максимум, а за ним — минимум.

4. Выводы. Анализ результатов проведенного исследования позволяет сделать следующие выводы. При движении источника со скоростями $u \geq u_{\min}$ в бесконечно глубокой жидкости вблизи плавающей на ее поверхности упругой пластины в системе пластина — жидкость возбуждаются изгибно-гравитационные волны. Увеличение глубины

ны погружения источника и толщины пластины приводит к уменьшению амплитуды изгибно-гравитационных волн. В случае равномерного движения источника после разгона максимальная амплитуда прогиба пластины не имеет четко выраженного максимума в окрестности критической точки $u \approx u_{\min}$. При движении источника с малыми скоростями ($u < u_{\min}$) изгибно-гравитационные волны не образуются. Учет нестационарности движения (ускорения или торможения источника) приводит к кратковременным и незначительным увеличениям прогиба пластины. В предельном случае ($t \rightarrow \infty$) нестационарное решение выходит на стационарное.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. **Букатов А. Е., Жарков В. В.** Влияние плавающей пластины на поверхностные проявления внутренних волн при движении источника в неоднородной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 2. С. 118–125.
3. **Черкесов Л. В.** Гидродинамика волн. Киев: Наук. думка, 1980.
4. **Козин В. М., Онищук А. В.** Модельные исследования волнообразования в сплошном ледяном покрове от движения подводного судна // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 78–81.
5. **Kozin V. M., Pogorelova A. V.** Submarine moving close to the ice-surface conditions // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18, N 4. P. 271–276.
6. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
7. **Погорелова А. В.** Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 89–99.
8. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
9. **Хейсин Д. Е.** Некоторые нестационарные задачи динамики ледяного покрова // Тр. Аркт. и Антаркт. науч.-исслед. ин-та. 1971. Т. 300. С. 81–91.
10. **Доценко С. Ф.** О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 5. С. 26–32.
11. **Bukatov A. E., Zharkov V. V.** Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt 1. Surface waves // Intern. J. Offshore Polar Engng. 1997. V. 7, N 1. P. 1–12.

*Поступила в редакцию 10/XII 2009 г.,
в окончательном варианте — 2/VIII 2010 г.*