ПМТФ, № 5, 1973

УДК 534.113

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН И МЕМБРАН ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В. М. Смотров, В. М. Чернышев

(Волгоград)

Рассматриваются колебания пластин и мембран, состоящих из частиц переменной массы [1, 2]. Проводится классификация присоединяющихся и отделяющихся частиц. Выводятся дифференциальные уравнения и естественные граничные условия колебаний пластин и мембран переменной массы. Решены два примера на колебания, интегрируемые разделением переменных.

1. Присоединяющиеся и отделяющиеся частицы могут быть четырех типов. К первому типу относятся частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности упругого тела и образующие с ним единую сплошную среду. Ко второму типу относятся присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности тела частицы, которые связаны с телом, взаимодействуют с ним и не взаимодействуют между собой. Третий тип — это частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке конечного числа регулярных кривых конечной длины, принадлежащих поверхности упругого тела. Эти частицы взаимодействуют с упругим телом и не взаимодействуют друг с другом. К четвертому типу относятся частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в конечном числе точек тела.

Колебания пластин и мембран рассматриваются на отрезке времени, в течение которого они остаются упругими телами переменной массы той же категории, что и в начальный момент (присоединение и отделение масс не влияет на признаки рассматриваемого упругого тела, по которым его классифицируют как пластину или мембрану).

Считается, что у пластин переменной массы нейтральный слой не меняет своего положения относительно пластины. Частицы могут присоединяться и отделяться по обе стороны пластины и мембраны. Присоединяющиеся и отделяющиеся частицы движутся при этом перпендикулярно нейтральному слою пластины и поверхности мембраны.

В недеформированном состоянии нейтральный слой пластины и мембраны представляет собой ограниченную область G с кусочно-гладкой границей L. Плоскость, в которой расположена область G, принимается за плоскость xy. Точки, в которых происходит присоединение и отделение частиц четвертого типа, являющиеся внутренними для области G, обозначаются M_i или M_i (x_i, y_i). Если же такая точка лежит на границе L и имеет дуговую координату s_j, то она обозначается M_j или M_j (s_j) $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = k+1, \ldots, n)$.

Кривая, в точках которой происходит присоединение и отделение частиц третьего типа, не имеющая общих частей с другими такими же кривыми и границей, за исключением, быть может, конечного или счетного числа точек, обозначается L_m (x_m, y_m), где x_m, y_m — координаты этой кривой $(m = 1, 2, \ldots, l)$. Части границы L, в точках которых происходит присоединение и отделение частиц третьего типа, объединены символом L_0.

Определим интенсивность реактивных сил от присоединяющихся и отделяющихся частиц в их абсолютном R_a и относительном R_r движении.

Для частиц первого типа

$$R_{1a}=\frac{\partial\rho_{1r}^{+}}{\partial t}v_{1r}^{+}+\frac{\partial\rho_{1r}^{-}}{\partial t}v_{1r}^{-}+\frac{\partial\rho_{1l}^{+}}{\partial t}v_{1l}^{+}+\frac{\partial\rho_{1l}^{-}}{\partial t}v_{1l}^{-} \tag{1.1}$$

$$R_{1r}=\frac{\partial\rho_{1r}^{+}}{\partial t}\left(v_{1r}^{+}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{\partial\rho_{1r}^{-}}{\partial t}\left(v_{1r}^{-}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{\partial\rho_{1l}^{+}}{\partial t}\left(v_{1l}^{+}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{\partial\rho_{1l}^{-}}{\partial t}\left(v_{1l}^{-}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

Здесь $\rho(x,y,t)=\rho_1^{\circ}+\rho_{1r}^{+}+\rho_{1r}^{-}+\rho_{1l}^{+}+\rho_{1l}^{-}\geqslant 0$ — плотность в точке $M(x,y)$ в момент t; $\rho_1^{\circ}(x,y)\geqslant 0$ — начальная плотность в точке $M(x,y)$; $\rho_{1r}^{\pm}$, $\rho_{1l}^{\pm}$, $v_{1r}^{\pm}$, $v_{1l}^{\pm}$ — плотности и абсолютные скорости присоединившихся и отделившихся частиц в точке $M(x,y)$ к моменту t; $z(x,y,t)$ — поперечное смещение точки $M(x,y)$ нейтрального слоя пластины в момент t. Индексы плюс и минус указывают на присоединение и отделение, а индексы r и l — на движение частиц соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z. При этом

$$\rho_{1r}^{\pm}(x,y,0)=\rho_{1l}^{\pm}(x,y,0)=0,\quad \frac{\partial\rho_{1r}^{+}}{\partial t}\geqslant 0,\quad \frac{\partial\rho_{1l}^{+}}{\partial t}\geqslant 0,$$
$$\frac{\partial\rho_{1r}^{-}}{\partial t}\leqslant 0,\quad \frac{\partial\rho_{1l}^{-}}{\partial t}\leqslant 0$$

Интенсивность реактивных сил R_{1a} и R_{1r} в абсолютном и относительном движениях связана соотношением

$$R_{1a}=R_{1r}+\frac{\partial\rho_1}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}$$

В обозначениях реактивных сил нижние индексы a и r означают соответственно абсолютность и относительность движения.

Те же обозначения, что и в (1.1), сохраняются для присоединяющихся и отделяющихся частиц остальных типов. Нижним индексом для соответствующих величин частиц второго типа будет 2, а у частиц третьего типа — L_0 и L_m, у частиц четвертого типа — M_i и M_j. Частные производные от плотности частиц четвертого типа должны быть заменены на обычные.

Для частиц первого и второго типов плотность масс и интенсивность реактивных сил есть масса и сила, отнесенные к единице площади. Для частиц третьего типа плотность масс и интенсивность реактивных сил представляют собой массу и силу, приходящиеся на единицу длины, а у частиц четвертого типа — это масса и сила, сосредоточенные в соответствующей точке. В дальнейшем удобнее рассматривать плотности масс и интенсивности реактивных сил частиц третьего и четвертого типов для внутренних точек области G как массы и силы, приходящиеся на единицу площади, а для точек границы L — как массы и силы, отнесенные к единице длины.

Следовательно, поверхностная плотность ρ_G внутренних точек области G и линейная плотность ρ_L точек границы L в момент t равны

$$\rho_G(x,y,t)=\rho_1(x,y,t)+\rho_2(x,y,t)+\sum_{i=1}^{k}\rho_{M_i}(x_i,y_i,t)\,\sigma_1(x-x_i)\times \tag{1.2}$$
$$\times\,\sigma_1(y-y_i)+\sum_{m=1}^{l}\rho_{L_m}(x_m,y_m,t)\,\sigma_1(x-x_m)\,\sigma_1(y-y_m)$$
$$\rho_L(s,t)=\rho_{L_0}+\sum_{j=k+1}^{n}\rho_{M_j}(s_j,t)\,\sigma_1(s-s_j)$$

где σ_1 — импульсивная функция первого порядка.

Аналогично определяются интенсивности реактивных сил R_{Ga} и R_{Gr} абсолютного и относительного движений внутренних точек области G и интенсивности реактивных сил R_{La}, R_{Lr} точек границы L. Для этого в (1.2) вместо символа ρ следует ставить R и добавить нижний индекс a или r. Между R_{Ga} и R_{Gr}, R_{La} и R_{Lr} существуют зависимости

$$R_{Ga} = R_{Gr} + \frac{\partial \rho_G}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad R_{La} = R_{Lr} + \frac{\partial \rho_L}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Дифференциальные уравнения колебаний и граничные условия выводятся из принципа стационарного действия Гамильтона — Остроградского

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [\delta(T - U) + \delta A]\, dt = 0 \tag{1.3}$$

Здесь T — кинетическая энергия упругого тала, U — потенциальная энергия упругих сил, δA — элементарная работа реактивных сил на возможном перемещении

$$\delta A = \iint\limits_G R_{Ga}\,\delta z\, dx\, dy + \oint\limits_L R_{La}\delta z\, ds$$

t_0 и t_1 — фиксированные моменты времени, при которых z не варьируется. Область G тоже не варьируется.

2. Кинетическая и потенциальная энергии пластины переменной массы определяются соотношениями

$$T = \frac{1}{2}\iint\limits_G \rho_G\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dy + \frac{1}{2}\oint\limits_L \rho_L\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 ds$$

$$U = \frac{1}{2}\iint\limits_G D\left\{(\Delta z)^2 - 2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy$$

После подстановки этих выражений в (1.3) и преобразований [3], получим уравнение свободных поперечных колебаний пластин переменной массы. Уравнение можно представить в двух формах, первую из которых удобно использовать при известных реактивных силах абсолютного движения присоединяющихся и отделяющихся частиц, вторую — при известных реактивных силах относительного движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_G\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \Delta(D\Delta z) - (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = R_{Ga} \tag{2.1}$$

$$\rho_G\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta z) - (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = R_{Gr} \tag{2.2}$$

Здесь $z(x, y, t)$, $D(x, y, t)$, $E = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$ — смещение, цилиндрическая жесткость, модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, Δ — оператор Лапласа.

Из (1.3) получаются также граничные условия

$$\oint\limits_L \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial s}\right) \delta z \, ds - \oint\limits_L M_L \frac{\partial (\delta z)}{\partial \nu} ds = 0 \tag{2.3}$$

где M_L, H_L и N_L — изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила на контуре пластины, определяемые соотношениями

$$M_L = - D\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\sin^2\theta + (1-\sigma)\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\sin 2\theta\right] \tag{2.4}$$

$$H_L = \frac{(1-\sigma) D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\sin 2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\cos 2\theta\right] \tag{2.5}$$

$$N_L = N - \frac{\partial (D \Delta z)}{\partial \nu} + (1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)\cos\theta\right] \tag{2.6}$$

причем

$$N = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_L \frac{\partial z}{\partial t}\right) - R_{La} = \rho_L \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - R_{Lr}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — единичный вектор внешней нормали границы L, θ — угол между ортом $\mathbf{v}$ и положительным направлением оси абсцисс.

Для пластин, у которых толщины одинаковы во всех точках (они зависят только от времени), в уравнения колебаний и граничные условия не входят производные цилиндрической жесткости D по координатам.

Рассмотрим пример. К однородной прямоугольной пластине, свободно опертой по контуру L $(x = 0, x = a, y = 0, y = b)$, присоединяются частицы первого типа с нулевыми относительными скоростями. Толщина пластины во всех точках одинакова и изменяется по закону $h = e^t$, объемная плотность материала ρ постоянна. В начальный момент

$$z\,|_{t=0} = f_1(x, y), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x, y)$$

Из условий задачи следует, что

$$\rho_G = \rho e^t, \qquad D = \frac{E}{12(1-\sigma^2)} e^{3t}, \qquad R_{Gr} = 0$$

Уравнение колебаний (2.2) для рассматриваемого случая примет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \alpha^2 e^{2t} \Delta(\Delta z) = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}$$

В результате разделения переменных, определения собственных форм [4] и решения частотного уравнения получим

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{ij} I_0(\lambda_{ij} e^t) + B_{ij} Y_0(\lambda_{ij} e^t)\right] \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}$$

$$\left(i, j = 1, 2, 3, \ldots; \ \lambda_{ij} = \alpha\pi^2\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2\right]\right)$$

I_0, I_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода. Используя известное соотношение

$$I_1(u)\, Y_0(u) - I_0(u)\, Y_1(u) = 2 / u$$

найдем

$$A_{ij} = -\frac{2\lambda_{ij}}{ab}\int_0^a\int_0^b \left[f_1 Y_1(\lambda_{ij}) + f_2 \frac{Y_0(\lambda_{ij})}{\lambda_{ij}} \right] \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$B_{ij} = \frac{2\lambda_{ij}}{ab}\int_0^a\int_0^b \left[f_1 I_1(\lambda_{ij}) + f_2 \frac{I_0(\lambda_{ij})}{\lambda_{ij}} \right] \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy$$

Для достаточно больших значений u функции $I_0(u)$, $I_1(u)$, $Y_0(u)$, $Y_1(u)$ имеют значения порядка $u^{-1/2}$, это приводит к неравенству

$$|A_{ij} I_0(\lambda_{ij}e^t) + B_{ij} Y_0(\lambda_{ij}e^t)| < Me^{-t/2}/ij \quad (M = \mathrm{const})$$

Эта оценка свидетельствует о том, что полученный ряд сходится равномерно.

Присоединение частиц в данном случае не сказывается на собственных формах колебаний пластины, но ведет к затуханию ее свободных колебаний, несмотря на отсутствие сил неупругого сопротивления.

3. Кинетическая и потенциальная энергии мембраны определяются соотношениями

$$T = \frac{1}{2}\iint_G \rho_G \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dy + \frac{1}{2}\oint_L \rho_L \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 ds$$

$$U = \frac{1}{2}\iint_G T_0 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

где T_0 — натяжение мембраны.

Уравнения колебаний и граничные условия находятся подстановкой выражений для кинетической и потенциальной энергий в (1.3). Они записываются в двух формах, одна из которых соответствует абсолютному движению присоединяющихся и отделяющихся частиц, другая — относительному движению. Уравнения колебаний мембран имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_G \frac{\partial z}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_0 \frac{\partial z}{\partial y}\right) = R_{Ga} \tag{3.1}$$

$$\rho_G \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_0 \frac{\partial z}{\partial y}\right) = R_{Gr} \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_L \frac{\partial z}{\partial t}\right) + T_0 \frac{\partial z}{\partial \nu} = R_{La} \tag{3.3}$$

$$\rho_L \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial z}{\partial \nu} = R_{Lr} \tag{3.4}$$

Рассмотрим пример. От однородной мембраны, закрепленной по контуру L ($x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$), происходит отделение частиц первого типа так, что

$$T_0 = \mathrm{const}, \quad \rho_{1r}^+ = \rho_{1e}^+ = 0, \quad \rho_{1r}^- = \rho_{1l}^- = {}^1/_2\, \rho_1{}^0 (e^{-2t} - 1),$$
$$v_{1r}^- + v_{1e}^- = \partial z / \partial t$$

Начальные условия

$$z|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x, y)$$