

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН И МЕМБРАН
ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

B. M. Смотров, B. M. Чернышев

(Волгоград)

Рассматриваются колебания пластин и мембран, состоящих из частиц переменной массы [1, 2]. Проводится классификация присоединяющихся и отделяющихся частиц. Выводятся дифференциальные уравнения и естественные граничные условия колебаний пластин и мембран переменной массы. Решены два примера на колебания, интегрируемые разделением переменных.

1. Присоединяющиеся и отделяющиеся частицы могут быть четырех типов. К первому типу относятся частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности упругого тела и образующие с ним единую сплошную среду. Ко второму типу относятся присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности тела частицы, которые связаны с телом, взаимодействуют с ним и не взаимодействуют между собой. Третий тип — это частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке конечного числа регулярных кривых конечной длины, принадлежащих поверхности упругого тела. Эти частицы взаимодействуют с упругим телом и не взаимодействуют друг с другом. К четвертому типу относятся частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в конечном числе точек тела.

Колебания пластин и мембран рассматриваются на отрезке времени, в течение которого они остаются упругими телами переменной массы той же категории, что и в начальный момент (присоединение и отделение масс не влияет на признаки рассматриваемого упругого тела, по которым его классифицируют как пластину или мембрану).

Считается, что у пластин переменной массы нейтральный слой не меняет своего положения относительно пластины. Частицы могут присоединяться и отделяться по обе стороны пластины и мембранны. Присоединяющиеся и отделяющиеся частицы движутся при этом перпендикулярно нейтральному слою пластины и поверхности мембранны.

В недеформированном состоянии нейтральный слой пластины и мембранны представляет собой ограниченную область G с кусочно-гладкой границей L . Плоскость, в которой расположена область G , принимается за плоскость xy . Точки, в которых происходит присоединение и отделение частиц четвертого типа, являющиеся внутренними для области G , обозначаются M_i или $M_i(x_i, y_i)$. Если же такая точка лежит на границе L и имеет дуговую координату s_j , то она обозначается M_j или $M_j(s_j)$ ($i = 1, 2, \dots, k; j = k + 1, \dots, n$).

Кривая, в точках которой происходит присоединение и отделение частиц третьего типа, не имеющая общих частей с другими такими же кривыми и границей, за исключением, быть может, конечного или счетного числа точек, обозначается $L_m(x_m, y_m)$, где x_m, y_m — координаты этой кривой ($m = 1, 2, \dots, l$). Части границы L , в точках которых происходит присоединение и отделение частиц третьего типа, объединены символом L_0 .

Определим интенсивность реактивных сил от присоединяющихся и отделяющихся частиц в их абсолютном R_a и относительном R_r движении.

Для частиц первого типа

$$(1.1) \quad R_{1a} = \frac{\partial \rho_{1r}^+}{\partial t} v_{1r}^+ + \frac{\partial \rho_{1r}^-}{\partial t} v_{1r}^- + \frac{\partial \rho_{1l}^+}{\partial t} v_{1l}^+ + \frac{\partial \rho_{1l}^-}{\partial t} v_{1l}^-$$

$$R_{1r} = \frac{\partial \rho_{1r}^+}{\partial t} \left(v_{1r}^+ - \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho_{1r}^-}{\partial t} \left(v_{1r}^- - \frac{\partial z}{\partial t} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \rho_{1l}^+}{\partial t} \left(v_{1l}^+ - \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho_{1l}^-}{\partial t} \left(v_{1l}^- - \frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

Здесь $\rho(x, y, t) = \rho_1^\circ + \rho_{1r}^+ + \rho_{1r}^- + \rho_{1l}^+ + \rho_{1l}^- \geq 0$ — плотность в точке $M(x, y)$ в момент t ; $\rho_1^\circ(x, y) \geq 0$ — начальная плотность в точке $M(x, y)$; $\rho_{1r}^\pm, \rho_{1l}^\pm, v_{1r}^\pm, v_{1l}^\pm$ — плотности и абсолютные скорости присоединившихся и отделившихся частиц в точке $M(x, y)$ к моменту t ; $z(x, y, t)$ — попечерное смещение точки $M(x, y)$ нейтрального слоя пластины в момент t . Индексы плюс и минус указывают на присоединение и отделение, а индексы r и l — на движение частиц соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z . При этом

$$\rho_{1r}^\pm(x, y, 0) = \rho_{1l}^\pm(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial \rho_{1r}^+}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial \rho_{1l}^+}{\partial t} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \rho_{1r}^-}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial \rho_{1l}^-}{\partial t} \leq 0$$

Интенсивность реактивных сил R_{1a} и R_{1r} в абсолютном и относительном движениях связана соотношением

$$R_{1a} = R_{1r} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial t}$$

В обозначениях реактивных сил нижние индексы a и r означают соответственно абсолютность и относительность движения.

Те же обозначения, что и в (1.1), сохраняются для присоединяющихся и отделяющихся частиц остальных типов. Нижним индексом для соответствующих величин частиц второго типа будет 2, а у частиц третьего типа — L_0 и L_m , у частиц четвертого типа — M_i и M_j . Частные производные от плотности частиц четвертого типа должны быть заменены на обычные.

Для частиц первого и второго типов плотность масс и интенсивность реактивных сил есть масса и сила, отнесенные к единице площади. Для частиц третьего типа плотность масс и интенсивность реактивных сил представляют собой массу и силу, приходящиеся на единицу длины, а у частиц четвертого типа — это масса и сила, сосредоточенные в соответствующей точке. В дальнейшем удобнее рассматривать плотности масс и интенсивности реактивных сил частиц третьего и четвертого типов для внутренних точек области G как массы и силы, приходящиеся на единицу площади, а для точек границы L — как массы и силы, отнесенные к единице длины.

Следовательно, поверхностная плотность ρ_G внутренних точек области G и линейная плотность ρ_L точек границы L в момент t равны

$$(1.2) \quad \rho_G(x, y, t) = \rho_1(x, y, t) + \rho_2(x, y, t) + \sum_{i=1}^k \rho_{M_i}(x_i, y_i, t) \sigma_1(x - x_i) \times$$

$$\times \sigma_1(y - y_i) + \sum_{m=1}^l \rho_{L_m}(x_m, y_m, t) \sigma_1(x - x_m) \sigma_1(y - y_m)$$

$$\rho_L(s, t) = \rho_{L_0} + \sum_{j=k+1}^{j=n} \rho_{M_j}(s_j, t) \sigma_1(s - s_j)$$

где σ_1 — импульсивная функция первого порядка.

Аналогично определяются интенсивности реактивных сил R_{Ga} и R_{Gr} абсолютного и относительного движений внутренних точек области G и интенсивности реактивных сил R_{La} , R_{Lr} точек границы L . Для этого в (1.2) вместо символа ρ следует ставить R и добавить нижний индекс a или r . Между R_{Ga} и R_{Gr} , R_{La} и R_{Lr} существуют зависимости

$$R_{Ga} = R_{Gr} + \frac{\partial \rho_G}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad R_{La} = R_{Lr} + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Дифференциальные уравнения колебаний и граничные условия выводятся из принципа стационарного действия Гамильтона — Остроградского

$$(1.3) \quad \int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - U) + \delta A] dt = 0$$

Здесь T — кинетическая энергия упругого тела, U — потенциальная энергия упругих сил, δA — элементарная работа реактивных сил на возможном перемещении

$$\delta A = \iint_G R_{Ga} \delta z dx dy + \oint_L R_{La} \delta z ds$$

t_0 и t_1 — фиксированные моменты времени, при которых z не варьируется. Область G тоже не варьируется.

2. Кинетическая и потенциальная энергии пластины переменной массы определяются соотношениями

$$T = \frac{1}{2} \iint_G \rho_G \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \oint_L \rho_L \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 ds$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_G D \left\{ (\Delta z)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

После подстановки этих выражений в (1.3) и преобразований [3], получим уравнение свободных поперечных колебаний пластин переменной массы. Уравнение можно представить в двух формах, первую из которых удобно использовать при известных реактивных силах абсолютного движения присоединяющихся и отделяющихся частиц, вторую — при известных реактивных силах относительного движения

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_G \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \Delta(D\Delta z) -$$

$$- (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = R_{Ga}$$

$$(2.2) \quad \rho_G \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta z) -$$

$$- (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = R_{Gr}$$

Здесь $z(x, y, t)$, $D(x, y, t)$, $E = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ — смещение, цилиндрическая жесткость, модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, Δ — оператор Лапласа.

Из (1.3) получаются также граничные условия

$$(2.3) \quad \oint_L \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial s} \right) dz ds - \oint_L M_L \frac{\partial (\delta z)}{\partial v} ds = 0$$

где M_L , H_L и N_L — изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила на контуре пластины, определяемые соотношениями

$$(2.4) \quad M_L = -D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right]$$

$$(2.5) \quad H_L = \frac{(1 - \sigma) D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \sin 2\theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right]$$

$$(2.6) \quad N_L = N - \frac{\partial (D \Delta z)}{\partial v} + (1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \cos \theta \right]$$

причем

$$N = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_L \frac{\partial z}{\partial t} \right) - R_{La} = \rho_L \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - R_{Lr}$$

Здесь v — единичный вектор внешней нормали границы L , θ — угол между ортом v и положительным направлением оси абсцисс.

Для пластин, у которых толщины одинаковы во всех точках (они зависят только от времени), в уравнения колебаний и граничные условия не входят производные цилиндрической жесткости D по координатам.

Рассмотрим пример. К однородной прямоугольной пластине, свободно опертой по контуру L ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$), присоединяются частицы первого типа с нулевыми относительными скоростями. Толщина пластины во всех точках одинакова и изменяется по закону $h = e^t$, объемная плотность материала ρ постоянна. В начальный момент

$$z|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x, y)$$

Из условий задачи следует, что

$$\rho_G = \rho e^t, \quad D = \frac{E}{12(1 - \sigma^2)} e^{3t}, \quad R_{Gr} = 0$$

Уравнение колебаний (2.2) для рассматриваемого случая примет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \alpha^2 e^{2t} \Delta (\Delta z) = 0, \quad \alpha^2 = \frac{E}{12\rho(1 - \sigma^2)}$$

В результате разделения переменных, определения собственных форм [4] и решения частотного уравнения получим

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ij} I_0(\lambda_{ij} e^t) + B_{ij} Y_0(\lambda_{ij} e^t)] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \\ (i, j = 1, 2, 3, \dots; \lambda_{ij} = \alpha \pi^2 \left[\left(\frac{i}{a} \right)^2 + \left(\frac{j}{b} \right)^2 \right])$$

I_0, I_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода. Используя известное соотношение

$$I_1(u) Y_0(u) - I_0(u) Y_1(u) = 2/u$$

найдем

$$A_{ij} = -\frac{2\lambda_{ij}}{ab} \iint_0^b \left[f_1 Y_1(\lambda_{ij}) + f_2 \frac{Y_0(\lambda_{ij})}{\lambda_{ij}} \right] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy$$

$$B_{ij} = \frac{2\lambda_{ij}}{ab} \iint_0^b \left[f_1 I_1(\lambda_{ij}) + f_2 \frac{I_0(\lambda_{ij})}{\lambda_{ij}} \right] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy$$

Для достаточно больших значений u функции $I_0(u)$, $I_1(u)$, $Y_0(u)$, $Y_1(u)$ имеют значения порядка $u^{-1/2}$, это приводит к неравенству

$$|A_{ij}I_0(\lambda_{ij}e^t) + B_{ij}Y_0(\lambda_{ij}e^t)| < M e^{-t/2}/ij \quad (M = \text{const})$$

Эта оценка свидетельствует о том, что полученный ряд сходится равномерно.

Присоединение частиц в данном случае не оказывается на собственных формах колебаний пластины, но ведет к затуханию ее свободных колебаний, несмотря на отсутствие сил неупругого сопротивления.

3. Кинетическая и потенциальная энергии мембранны определяются соотношениями

$$T = \frac{1}{2} \iint_G \rho_G \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \oint_L \rho_L \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 ds$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_G T_0 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

где T_0 — натяжение мембранны.

Уравнения колебаний и граничные условия находятся подстановкой выражений для кинетической и потенциальной энергий в (1.3). Они записываются в двух формах, одна из которых соответствует абсолютному движению присоединяющихся и отделяющихся частиц, другая — относительному движению. Уравнения колебаний мембран имеют вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_G \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_0 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = R_{Ga}$$

$$(3.2) \quad \rho_G \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_0 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = R_{Gr}$$

с граничными условиями

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_L \frac{\partial z}{\partial t} \right) + T_0 \frac{\partial z}{\partial v} = R_{La}$$

$$(3.4) \quad \rho_L \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial z}{\partial v} = R_{Lr}$$

Рассмотрим пример. От однородной мембранны, закрепленной по контуру L ($x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$), происходит отделение частиц первого типа так, что

$$T_0 = \text{const}, \quad \rho_{1r}^+ = \rho_{1e}^+ = 0, \quad \rho_{1r}^- = \rho_{1l}^- = \frac{1}{2} \rho_1^0 (e^{-2t} - 1),$$

$$v_{1r}^- + v_{1e}^- = \partial z / \partial t$$

Начальные условия

$$z|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x, y)$$

Уравнения колебаний мембранны приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial z}{\partial t} - a^2 e^{2t} \Delta z = 0, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho_1}$$

Решение находится разделением переменных

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ij} \cos(\lambda_{ij} e^t) + B_{ij} \sin(\lambda_{ij} e^t)] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots, \lambda_{ij} = a\pi \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2})$$

$$A_{ij} = \frac{4}{ab} \iint_0^a \left(f_1 \cos \lambda_{ij} - \frac{f_2}{\lambda_{ij}} \sin \lambda_{ij} \right) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

$$B_{ij} = \frac{4}{ab} \iint_0^a \left(f_1 \sin \lambda_{ij} + \frac{f_2}{\lambda_{ij}} \cos \lambda_{ij} \right) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

Равномерная сходимость полученного ряда следует из

$$|A_{ij} \cos(\lambda_{ij} e^t) + B_{ij} \sin(\lambda_{ij} e^t)| < M / ij \quad (M = \text{const})$$

Из решения следует, что собственные формы колебаний рассматриваемой системы совпадают с формами колебаний мембранны постоянной массы. Собственные частоты отличаются в e^t раз. Отделение частиц в данном случае проявляется в том, что собственные частоты мембранны непрерывно растут со временем.

Отметим отличительные особенности уравнений колебаний пластин и мембран переменной массы от уравнений классической теории колебаний пластин и мембран. Коэффициенты этих уравнений могут быть функциями не только координат, но и времени. К внешним нагрузкам в этом случае добавляются реактивные силы присоединяющихся и отделяющихся частиц. Эти особенности уравнений колебаний пластин и мембран переменной массы могут привести к решениям, отличным от решений уравнений колебаний пластин и мембран постоянной массы.

Поступила 19 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. О механизме деформируемой среды частиц с переменной массой. Вестн. МГУ, 1951, № 10.
2. Слезкин Н. А. Основные уравнения движения деформируемой среды частиц с переменной массой. Докл. АН СССР, 1951, т. 79, № 1.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970.