

УДК 533.6.011.8

ПРЕДЕЛЬНО АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА, ИСТЕКАЮЩЕГО ИЗ ОТВЕРСТИЯ

Д. В. Садин, В. Ю. Алексахов, К. В. Алексеев,
В. М. Варварский, Е. Л. Лебедев

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197082 Санкт-Петербург
E-mails: sadin@narod.ru, d_sadin@mail.ru

Рассматривается задача о движении одиночной сферической твердой частицы в дальнем следе свободномолекулярного потока газа, истекающего из отверстия. Показано, что пространственные распределения макроскопических параметров газа полностью определяются функциями одной переменной — координаты вдоль произвольной прямой, перпендикулярной оси симметрии. С учетом этого свойства получено безразмерное уравнение движения частицы, имеющее автомодельные решения — траектории движения и координаты частицы (следы) на мишени при различных начальных условиях. Рассмотрены условия определения местоположения течи газа по следам частиц на мишени.

Ключевые слова: свободномолекулярный поток, твердая частица, автомодельное движение.

Введение. Развитие новых технологий в химической промышленности, вакуумной и космической технике в земных условиях и в невесомости [1–3] обусловило необходимость проведения теоретических исследований движения газа и дисперсных частиц в широком диапазоне значений числа Кнудсена [4] с учетом фазовых переходов [5] при размерах частиц от умеренно крупных до очень мелких (включая наночастицы) [6].

С одной стороны, представляет интерес теоретическое исследование рассматриваемой задачи, имеющей автомодельные приближенные и точные предельные решения. С другой стороны, полученные результаты имеют прикладное значение (например, определение местоположения течи газа из герметичных конструкций при вакуумных испытаниях техники или в условиях орбитального полета космических аппаратов).

Постановка задачи. Рассмотрим стационарный поток газа, истекающего через отверстие площадью A в вакуум при $p_2/p_1 \rightarrow 0$ и больших числах Кнудсена $\text{Kn}_1 = l_1/\sqrt{A} \gg 1$ (l_1 — средняя длина свободного пробега молекул в камере; p_1, p_2 — давления газа в камере и окружающей среде соответственно). Начало системы координат находится в центре отверстия, ось x направлена вдоль потока перпендикулярно плоскости отверстия. Пусть из произвольной точки с радиус-вектором $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 \gg \sqrt{A}$ в момент времени $t = 0$ перпендикулярно оси свободномолекулярного потока вылетает сферическая частица диаметром $D_p = 2R_p$ с начальной скоростью $\mathbf{V}_0(U_0, V_0, W_0)$, где $U_0 = 0$, $W_0 = 0$. Плоская мишень расположена перпендикулярно вектору начальной скорости \mathbf{V}_0 и пересекает ось y в точке $y_* = y_0 + L$. Требуется определить траектории движения частицы, координаты частицы (следы) на мишени при различных начальных условиях (\mathbf{r}_0 и \mathbf{V}_0), а также

местоположение течи газа по следам на мишени, в частности условия его однозначного определения.

Решение. Истечение свободномолекулярного потока газа через отверстие является классической задачей динамики разреженного газа. В предположении о равновесном состоянии газа в камере функция распределения молекул по скоростям описывается максвелловской функцией [7]

$$f_1 = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_1}\right), \quad (1)$$

где ξ_x, ξ_y, ξ_z — составляющие скоростей молекул газа; R — газовая постоянная; n_1, T_1 — числовая плотность молекул и температура газа в камере соответственно.

Макроскопические газодинамические величины определяются путем осреднения по всем возможным скоростям молекул [8]. Например, в случае прямоугольного отверстия со сторонами длиной $2a$ и $2b$ значения составляющих скоростей молекул, поступающих из камеры в элементарный объем $d\Omega$ вблизи произвольной точки (x, y, z) окружающей среды, при условии $p_2/p_1 \rightarrow 0$ находятся в следующих диапазонах:

$$0 < \xi_x < \infty, \quad \xi_x \frac{z-a}{x} \leq \xi_z \leq \xi_x \frac{z+a}{x}, \quad \xi_x \frac{y-b}{x} \leq \xi_y \leq \xi_x \frac{y+b}{x}. \quad (2)$$

Интегрируя функцию распределения (1) в пространстве скоростей (2), получаем выражения для осредненных газодинамических величин в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \overline{\rho u} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] c_x e^{-c_x^2} dc_x, \\ \overline{\rho v} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{c_x \gamma_-}^{c_x \gamma_+} c_y e^{-c_y^2} dc_y [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \overline{\rho w} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{c_x \zeta_-}^{c_x \zeta_+} c_z e^{-c_z^2} dc_z [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \bar{u} &= \frac{\overline{\rho u}}{4\bar{\rho}}, \quad \bar{v} = \frac{\overline{\rho v}}{4\bar{\rho}}, \quad \bar{w} = \frac{\overline{\rho w}}{4\bar{\rho}}, \quad (3) \\ \overline{\rho u^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] c_x^2 e^{-c_x^2} dc_x, \\ \overline{\rho v^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{c_x \gamma_-}^{c_x \gamma_+} c_y^2 e^{-c_y^2} dc_y [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \overline{\rho w^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{c_x \zeta_-}^{c_x \zeta_+} c_z^2 e^{-c_z^2} dc_z [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\bar{x}} &= \frac{1}{2\bar{\rho}\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{c}_x^2 [\operatorname{erf}(c_x\gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x\gamma_-)] [\operatorname{erf}(c_x\zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x\zeta_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \bar{T}_{\bar{y}} &= \frac{1}{\bar{\rho}\pi} \int_0^{\infty} \int_{c_x\gamma_-}^{c_x\gamma_+} \bar{c}_y^2 e^{-c_y^2} dc_y [\operatorname{erf}(c_x\zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x\zeta_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \bar{T}_{\bar{z}} &= \frac{1}{\bar{\rho}\pi} \int_0^{\infty} \int_{c_x\zeta_-}^{c_x\zeta_+} \bar{c}_z^2 e^{-c_z^2} dc_z [\operatorname{erf}(c_x\gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x\gamma_-)] e^{-c_x^2} dc_x, \\ \bar{T} &= (\bar{T}_{\bar{x}} + \bar{T}_{\bar{y}} + \bar{T}_{\bar{z}})/3.\end{aligned}$$

Здесь $\gamma_+ = (\bar{y} + \alpha)/\bar{x}$; $\gamma_- = (\bar{y} - \alpha)/\bar{x}$; $\zeta_+ = (\bar{z} + 1)/\bar{x}$; $\zeta_- = (\bar{z} - 1)/\bar{x}$; $\alpha = b/a$; $\bar{c}_i = c_i - 2\bar{u}/\sqrt{\pi}$; $c_i = \xi_i/\sqrt{2RT_1}$; индекс i принимает значения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\operatorname{erf} \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-\lambda^2} d\lambda$; $\bar{\rho}$ — безразмерная плотность газа; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ — безразмерные проекции вектора скорости газа \mathbf{v} на оси декартовой системы координат; \bar{T}, \bar{T}_i — безразмерная температура газа и ее составляющие.

Для уравнений (3) принята относительная система единиц измерения, в которой выражения для безразмерных величин имеют следующий вид:

$$\bar{i} = \frac{i}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \bar{\rho}j = \frac{\rho j}{\rho_1 \sqrt{RT_1/(2\pi)}}, \quad \bar{j} = \frac{j}{\sqrt{8RT_1/\pi}}, \quad \bar{\rho}j^2 = \frac{\rho j^2}{\rho_1 RT_1/2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_1}.$$

Здесь величина j принимает значения u, v, w .

Рассмотрим распределения безразмерных газодинамических параметров $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ в дальнем следе $\bar{x} \gg 1$, где Φ — $\bar{\rho}, \bar{\rho}u$ и другие величины, вычисляемые по уравнениям (3). Тогда $\alpha/\bar{x} \ll 1, 1/\bar{x} \ll 1, \gamma = \gamma_+ = \gamma_- \rightarrow \bar{y}/\bar{x}, \zeta = \zeta_+ = \zeta_- \rightarrow \bar{z}/\bar{x}$ и с учетом осевой симметрии молекулярного потока пространственные распределения макроскопических параметров газа полностью определяются функциями $\Phi(\bar{\lambda})$ одной переменной $\bar{\lambda} = \lambda/\bar{x}$ ($\lambda = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$ — уравнение оси, перпендикулярной оси симметрии), а вдоль оси симметрии — значениями $\Phi(0)$. Например, в случае круглого отверстия $\Phi(0)$ принимает следующие значения [8]:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right) \rightarrow 0, \quad \bar{\rho}u = \frac{1}{\bar{x}^2 + 1} \rightarrow 0, \quad \bar{\rho}u^2 = 1 - \left(\frac{\bar{x}^2 + 1}{\bar{x}^2}\right)^{-3/2} \rightarrow 0, \\ \bar{\rho}u^2 &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right) \left(1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right)^2 \rightarrow 0, \quad \bar{u} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right) \rightarrow 1, \\ \bar{T} &= \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \left(1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right)^2 + 2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + 1}}\right) - \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + 1} \right] \rightarrow 1 - \frac{8}{3\pi}.\end{aligned}\tag{4}$$

В результате умножения на \bar{x}^2 первых четырех уравнений (4) возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$, которая разрешается с помощью правила Лопиталья. Тогда $\bar{\rho}\bar{x}^2 \rightarrow 1/4, \bar{\rho}u^2\bar{x}^2 \rightarrow 1/4, \bar{\rho}u\bar{x}^2 \rightarrow 1, \bar{\rho}u^2\bar{x}^2 \rightarrow 3/2$. С использованием теории подобия и размерностей [9] можно получить предельные значения $\Phi(0)$, имеющие место при истечении потока газа из отверстия произвольной формы площадью A :

$$4\pi\bar{\rho}\tilde{x}^2 \rightarrow 1, \quad 4\pi\bar{\rho}u^2\tilde{x}^2 \rightarrow 1, \quad \pi\bar{\rho}u\tilde{x}^2 \rightarrow 1, \quad (2/3)\pi\bar{\rho}u^2\tilde{x}^2 \rightarrow 1.\tag{5}$$

Здесь $\tilde{x} = x/\sqrt{A}$.

На больших расстояниях от отверстия ($\bar{x} \gg 1$) разброс значений поперечных скоростей ограничен (см. (2)), $\bar{T}_{\bar{y}} \rightarrow 0$, $\bar{T}_{\bar{z}} \rightarrow 0$ и режим течения приближается к режиму течения из точечного источника. Вычислим в интервале скоростей от ξ до $\xi + d\xi$ число молекул N , падающих на элемент $d\sigma$, расположенный на оси симметрии X под углом θ к ней:

$$N = \xi_x \cos \theta d\sigma f_1 d\xi_x d\xi_y d\xi_z. \quad (6)$$

Проинтегрировав (6) по всем возможным скоростям (2) и разделив результат на $d\sigma$, получаем выражение для общего числа молекул N_i , падающих в единицу времени на единицу площади элемента, в безразмерном виде

$$\bar{N}_i = \frac{N_i}{n_1 \sqrt{RT_1/(2\pi)}} = \bar{\rho} u \cos \theta. \quad (7)$$

Умножая выражение (6) на $m\xi_x \cos \theta/d\sigma$ и $m\xi_x \sin \theta/d\sigma$ (m — масса молекулы), а затем интегрируя в пространстве скоростей (2), находим соответственно выражения для нормального P_{ni} и передаваемого молекулами, падающими в единицу времени на единицу площади элемента, тангенциального $P_{\tau i}$ импульсов в безразмерном виде

$$\bar{P}_{ni} = \frac{P_{ni}}{\rho_1 RT_1/2} = \bar{\rho} u^2 \cos^2 \theta, \quad \bar{P}_{\tau i} = \frac{P_{\tau i}}{\rho_1 RT_1/2} = \bar{\rho} u^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (8)$$

Будем считать, что коэффициенты аккомодации тангенциального α_τ и нормального α_n импульсов известны. Тогда нормальная p и касательная τ силы, действующие на единицу площади элемента $d\sigma$, определяются в безразмерном виде из соотношений [8]

$$\bar{\tau} = \alpha_\tau \bar{P}_{\tau i}, \quad \bar{p} = (2 - \alpha_n) \bar{P}_{ni} + \alpha_n \bar{P}_{nw}. \quad (9)$$

Здесь $\bar{P}_{nw} = \bar{N}_i \sqrt{T_w/T_1}$ — безразмерный нормальный импульс, которым обладают отраженные молекулы при условии, что они отражаются с максвелловским распределением; T_w — температура поверхности частицы.

Определим силу, действующую на твердую сферическую частицу на оси симметрии со стороны молекулярного потока газа, истекающего из отверстия, при $\bar{x} \gg 1$. Проекцию этой силы на ось X в безразмерном виде можно определить, суммируя элементарные нормальные p и касательные τ силы по поверхности сферы:

$$\bar{F}_{\bar{x}} = 2\pi \bar{R}_p^2 \int_0^{\pi/2} (\bar{\tau} \sin \theta + \bar{p} \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (10)$$

($\bar{R}_p = R_p/a$ — безразмерный радиус частицы).

Определим при $\bar{x} \gg 1$ коэффициент сопротивления частицы на оси симметрии

$$c_x = \frac{F_{\bar{x}}}{\rho u^2 \pi R_p^2/2} = \frac{\pi}{16} \frac{\bar{F}_{\bar{x}}}{\bar{\rho} u^2 \pi \bar{R}_p^2/2} \quad (11)$$

для предельных случаев — зеркального ($\alpha_\tau = \alpha_n = 0$) и диффузного ($\alpha_\tau = \alpha_n = 1$) отражения молекул от поверхности твердой частицы. Последовательно подставляя (7)–(10) в (11), для случая зеркального отражения молекул получаем

$$c_x^{(0)} = \frac{\pi}{8} \frac{\bar{\rho} u^2}{\bar{\rho} u^2} \int_0^{\pi/2} 4 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta. \quad (12)$$

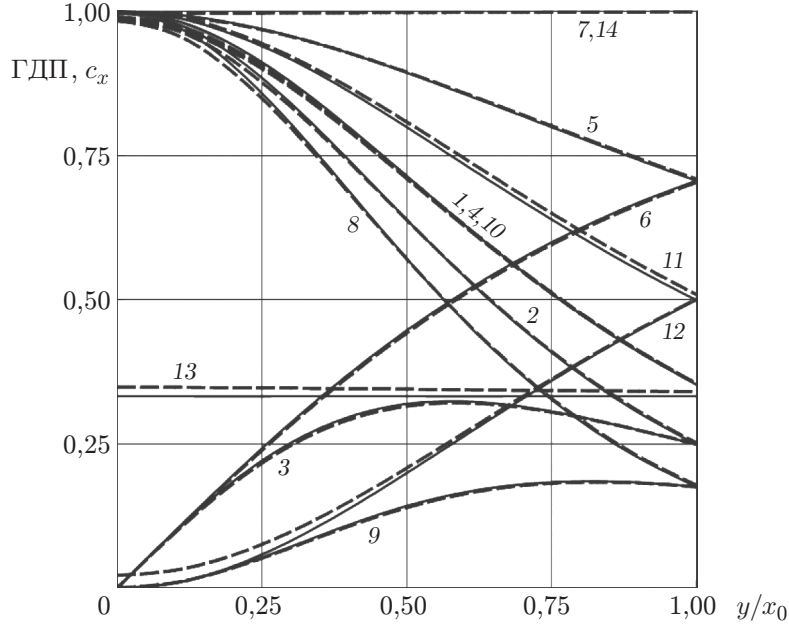


Рис. 1. Распределения безразмерных газодинамических параметров (ГДП) и коэффициента сопротивления c_x вдоль оси y/x_0 :

1 — $4\pi\bar{\rho}\tilde{x}^2$, 2 — $\pi\bar{\rho}\bar{u}\tilde{x}^2$, 3 — $\pi\bar{\rho}\bar{v}\tilde{x}^2$, 4 — $\pi\bar{\rho}|\bar{v}|\tilde{x}^2$, 5 — \bar{u} , 6 — \bar{v} , 7 — $|\bar{v}|$, 8 — $4\pi\bar{\rho}\bar{u}^2\tilde{x}^2$, 9 — $4\pi\bar{\rho}\bar{v}^2\tilde{x}^2$, 10 — $4\pi\bar{\rho}|\bar{v}|^2\tilde{x}^2$, 11 — $\bar{T}_x/(3 - 8/\pi)$, 12 — $\bar{T}_y/(3 - 8/\pi)$, 13 — $\bar{T}/(3 - 8/\pi)$, 14 — $c_x^{(1)}/(3\pi/4)(1 + (4/9)\sqrt{T_w/T_1})$; сплошные линии — $\bar{x}_0 = 1000$, штриховые — $\bar{x}_0 = 10$

Умножая числитель и знаменатель в (12) на \tilde{x}^2 , с использованием соотношений (5) находим $c_x^{(0)} = 3\pi/4$. Выполняя аналогичные преобразования для случая диффузного отражения молекул, имеем

$$c_x^{(1)} = \frac{3}{4}\pi\left(1 + \frac{4}{9}\sqrt{\frac{T_w}{T_1}}\right).$$

На рис. 1 представлены распределения вдоль оси Y (значения координаты вдоль оси Y отнесены к x_0) безразмерных газодинамических параметров (ГДП) и коэффициента сопротивления c_x сферической частицы. Расчеты коэффициента сопротивления $c_x^{(1)}$ выполнены для случая полностью диффузного отражения $\alpha_n = 1$, $\alpha_\tau = 1$ при $T_w/T = 1$. Приведенные данные свидетельствуют о быстрой сходимости распределений относительных параметров к их предельно автомодельным распределениям.

Рассмотрим задачу о движении одиночной сферической частицы в свободномолекулярном потоке (3), описываемом уравнением Ньютона

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{3}{4}c_x \frac{\bar{\rho}(\bar{v} - \dot{\bar{r}})^2}{2} \frac{\bar{R}_p^2}{M_p} \frac{\bar{v} - \dot{\bar{r}}}{|\bar{v} - \dot{\bar{r}}|}. \quad (13)$$

Здесь \bar{r} — радиус-вектор частицы, отнесенный к характерному размеру отверстия a ; точка означает дифференцирование по времени $\bar{t} = ta/\sqrt{8RT_1/\pi}$; \bar{v} — вектор безразмерной макроскопической скорости молекулярного потока; $M_p = 3M_p/(4\pi a^3 \rho_1)$ — безразмерная масса частицы. Ниже рассматриваются случаи движения одиночной сферической частицы при $|\dot{\bar{r}}| \ll |\bar{v}|$.

Начальными условиями являются радиус-вектор и скорость частицы в момент времени $\bar{t} = 0$:

$$\bar{r} = \bar{r}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), \quad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0(\dot{\bar{x}}_0, \dot{\bar{y}}_0, \dot{\bar{z}}_0). \quad (14)$$

Для получения автомодельных решений движения частицы целесообразно изменить масштабы длины и времени:

$$\bar{r}_1 = \frac{r}{x_0}, \quad \bar{t}_1 = \frac{t/\sqrt{8RT_1/\pi}}{x_0}$$

(x_0 — начальная координата точки вылета частицы). Тогда (13), (14) принимают вид

$$\bar{x}_1^2 \ddot{\bar{r}}_1 = \frac{3}{8} c_x \frac{\bar{R}_p^2}{\bar{M}_p \bar{x}_0} \frac{\bar{v} - \dot{\bar{r}}_1}{|\bar{v} - \dot{\bar{r}}_1|} (\bar{\rho} \bar{x}^2 \dot{\bar{r}}_1^2 - 2\bar{\rho} \bar{v} \bar{x}^2 \dot{\bar{r}}_1 + \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{x}^2); \quad (15)$$

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10}(1, \bar{y}_{10}, \bar{z}_{10}), \quad \bar{y}_{10} = \bar{y}_0/\bar{x}_0, \quad \bar{z}_{10} = \bar{z}_0/\bar{x}_0, \quad \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0. \quad (16)$$

В дальнейшем следе свободномолекулярного потока газа, истекающего из отверстия, величины $\bar{\rho} \bar{x}^2$, $\bar{\rho} \bar{v} \bar{x}^2$, $\bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{x}^2$, c_x в уравнении (15) являются функциями \bar{y}/\bar{x} и \bar{z}/\bar{x} . Следовательно, при одном и том же значении коэффициента $\bar{R}_p^2/(\bar{M}_p \bar{x}_0)$ в уравнении движения и одних и тех же начальных условиях (16) движение твердых сферических частиц является автомодельным.

Сначала исследуем движение частицы вдоль оси симметрии. Учитывая, что значения $\bar{\rho} \bar{x}^2$, $\bar{\rho} \bar{v} \bar{x}^2$, $\bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{x}^2$, c_x на оси симметрии стремятся к постоянным значениям, нетрудно получить точное решение задачи об одномерном движении частицы при $\dot{\bar{x}}_1 \ll \bar{u}$:

$$\bar{x}_1^2 \ddot{\bar{x}}_1 = B, \quad \bar{x}_{10} = 1, \quad \dot{\bar{x}}_{10} = 0. \quad (17)$$

Здесь $B = (3/32)c_x \bar{R}_p^2/(\bar{M}_p \bar{x}_0)$.

Уравнение (17) преобразуется к виду [10]

$$\left(\frac{d\bar{t}_1}{d\bar{x}_1}\right)^2 = \frac{\bar{x}_1}{2B(\bar{x}_1 - 1)}.$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий находится из [11]:

$$\bar{t}_1 = \frac{\sqrt{\bar{x}_1(\bar{x}_1 - 1)} + \ln(\sqrt{\bar{x}_1 - 1} + \sqrt{\bar{x}_1})}{\sqrt{2B}}.$$

Рассмотрим движение частицы, описываемое уравнением (15), при различных начальных положениях точки вылета частицы \bar{r}_{10} и значениях ее скорости $\bar{V}_0 = \dot{\bar{r}}_0(0, \dot{\bar{y}}_0, 0)$. Пусть на неизменном расстоянии \bar{y}_* расположена плоскость (мишень), перпендикулярная вектору начальной скорости \bar{V}_0 . Поставленная задача решалась численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности при $\bar{R}_p^2/(\bar{M}_p \bar{x}_0) = 10^{-6}$.

На рис. 2 представлены результаты решения в виде траекторий $\bar{y}_1 - \bar{y}_{10} = f(\bar{x}_1 - 1)$ в системе координат, связанной с начальным положением точки вылета частицы. Кривые 1–4 получены при постоянном начальном радиус-векторе $\bar{r}_{10}(1, -1, 0)$ и варьировании начальной скорости, а кривые 5–7 — при постоянном значении $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 7,5$ и различных значениях \bar{y}_{10} . На рис. 3 показана зависимость координаты $\bar{x}_* = \bar{x}_1 - 1$ точки пересечения траектории частицы с мишенью (следа) от \bar{y}_{10} при $\bar{y}_* = \bar{y}_1 - \bar{y}_{10} = 2$. Эта зависимость имеет максимум при $\bar{y}_{10} \simeq -0,75$.

Анализ полученных результатов показывает, что, во-первых, при малых скоростях вылета возможно существенное отклонение траектории частицы (кривые 1, 2 на рис. 2) и недостижение ею мишени, во-вторых, для однозначного определения местоположения течи в плоскости XU необходимо знать как минимум две координаты следа на мишени \bar{x}_* .

На рис. 4 приведены результаты расчетов пространственных траекторий частиц в системе координат, связанной с начальным положением точки вылета частицы $\bar{r}_{10}(1, -1, \bar{z}_{10})$ при варьировании координаты $\bar{z}_{10} = 0 \div 1,5$ с шагом, равным 0,25. Начальная скорость,

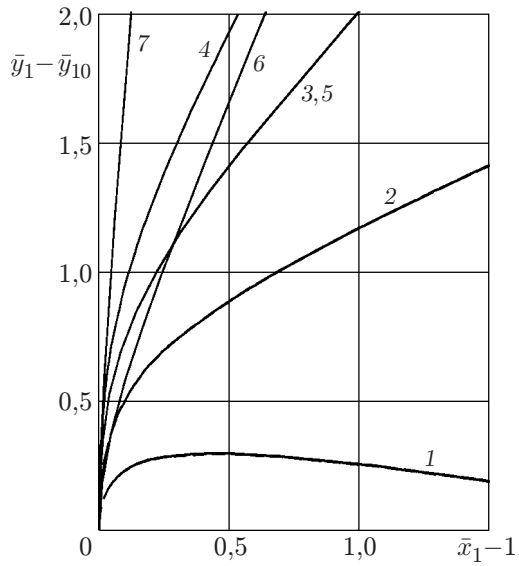


Рис. 2

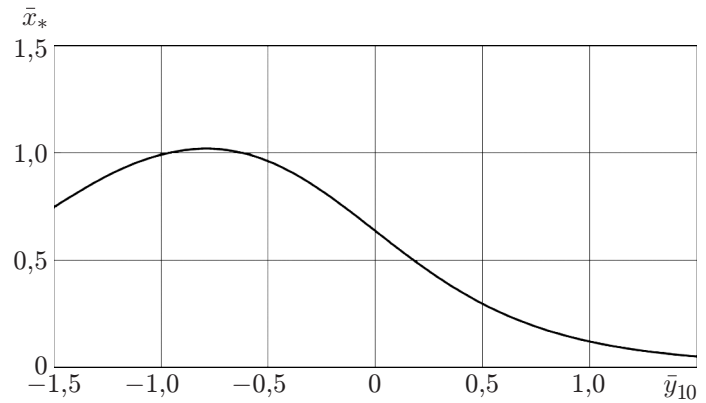


Рис. 3

Рис. 2. Траектории движения частиц в плоскости XU при различных значениях начальной скорости (1–4) и различных начальных положениях точки вылета (5–7): 1 — $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 2,5$, 2 — $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 5,0$, 3 — $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 7,5$, 4 — $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 10,0$; 5 — $\bar{y}_{10} = -1$, 6 — $\bar{y}_{10} = 0$, 7 — $\bar{y}_{10} = 1$

Рис. 3. Зависимость координаты точки пересечения траектории частицы с мишенью от начального положения \bar{y}_{10}

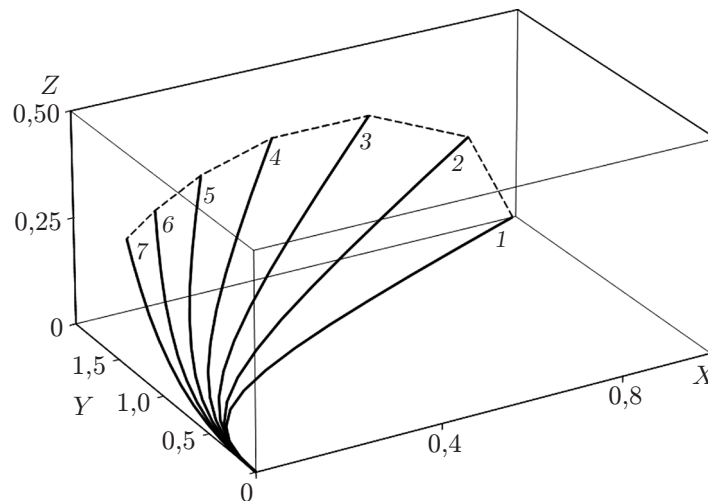


Рис. 4. Пространственные траектории частиц (сплошные линии) при различных значениях координаты \bar{z}_{10} и следы на мишени T (штриховая линия): 1 — $\bar{z}_{10} = 0$; 2 — $\bar{z}_{10} = 0,25$; 3 — $\bar{z}_{10} = 0,50$; 4 — $\bar{z}_{10} = 0,75$; 5 — $\bar{z}_{10} = 1,00$; 6 — $\bar{z}_{10} = 1,25$; 7 — $\bar{z}_{10} = 1,50$

направленная вдоль оси Y , задавалась постоянной: $\bar{V}_0 \cdot 10^4 = 7,5$. Штриховой линией показаны следы на мишени T . Зависимость \bar{z}_* от координаты следа на мишени \bar{x}_* имеет максимум при $\bar{z}_{10} > 0$ и минимум (в силу симметрии) при $\bar{z}_{10} < 0$. При $\bar{z}_{10} = 0$ движение частицы происходит в плоскости XU (кривая 1).

Рассмотрим задачу определения местоположения течи в следующей постановке. Пусть в плоскости $\bar{x} = 0$ через отверстие площадью A , расположенное произвольно на этой плоскости, происходит истечение газа в вакуум. На заданном расстоянии $\bar{x}_0 \gg \sqrt{A}$ параллельно плоскости отверстия вылетает частица радиусом \bar{R}_p и массой \bar{M}_p со скоростью \bar{V}_0 . Известны координаты $\bar{x}_*^{(k)}$, \bar{y}_* , $\bar{z}_*^{(k)}$ (k — номер опыта) следа на мишени в системе координат, связанной с начальным положением точки вылета частицы. При этом $\bar{x}_*^{(k)} > 0$, а $\bar{z}_*^{(k)}$ больше или меньше нуля в зависимости от положения оси молекулярного потока и точки вылета частицы. По окончании первого опыта по полученным координатам $\bar{x}_*^{(1)}$, $\bar{z}_*^{(1)}$ определяется значение \bar{z}_{10} . Затем связанная система координат сдвигается вдоль оси Z на эту величину. В результате проведения следующих двух опытов в плоскости XU при изменении положения связанной системы координат вдоль оси Y становятся известны значения $\bar{x}_*^{(2)}$, $\bar{x}_*^{(3)}$, по которым находится расстояние \bar{y}_{10} до оси симметрии молекулярного потока. Таким образом, поскольку координата \bar{x}_0 задана, местоположение течи определено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведерников А. А. Управление пылевым облаком в невесомости: перемещение, удержание, сжатие // Тез. докл. Междунар. конф. “Современные проблемы газовой и волновой динамики”, Москва, 21–23 апр. 2009 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2009. С. 27.
2. Willneff J., Maas H.-G. Design and calibration of four-headed camera system for use in microgravity research // Intern. Arch. Photogrammetry Remote Sens. 2000. V. 33. P. 894–899.
3. Веденяпин В. В., Мелихов И. В., Батищева Я. Г. Реактивные силы и фотофорез // Сб. тез. докл. 1-й Всерос. конф. “Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях”. М.: Моск. инж.-физ. ин-т, 2008. С. 43–44.
4. Береснев С. А., Черняк В. Г., Суетин П. Е. Движение сферической частицы в собственном насыщенном паре при произвольных числах Кнудсена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 3. С. 588–591.
5. Крюков А. П., Левашов В. Ю., Шишкова И. Н. Течение пара при наличии процессов испарения-конденсации на твердых частицах // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 119–128.
6. Рудяк В. Я., Белкин А. А. Моделирование коэффициентов переноса наножидкостей // Наносистемы: физика, химия, математика. 2010. Т. 1, № 1. С. 156–177.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа (кинетическая теория). М.: Наука, 1967.
8. Кошмаров Ю. А. Прикладная динамика разреженного газа / Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов. М.: Машиностроение, 1977.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1965.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 3/VIII 2011 г.,
в окончательном варианте — 27/III 2012 г.