

5. Jordan P. F. The physical nature of panel flutter // Aero Digest.— 1956.— V. 72, N 2.
6. Shen S. F. An approximate analysis of nonlinear flutter problem // J. Aerospace Sci.— 1959.— V. 26, N 1.
7. Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Сер. Механика.— М.: ВИНТИ, 1965.
8. Johns D. J. Some panel flutter studies using piston theory // J. Aerospace Sci.— 1958.— V. 25.— P. 679.
9. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ.— 1956.— Т. 20, № 2.
10. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ.— 1959.— Т. 23, № 3.
11. Новиков Ю. Н. Об устойчивости решений в задаче о флаттере панелей // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 4.
12. Parks P. C. A stability criterion for a panel flutter via the second method of Liapunov // AIAA J.— 1966.— V. 4, N 1.
13. Webb E. R., Bass B. R. et al. Further study of a stability criterion for a panel flutter via the second method of Liapunov // AIAA J.— 1967.— V. 5, N 11.
14. Parks P. C. Liapunov functionals for aeroelastic problems // J. Franklin Institute.— 1967.— V. 283, N 5.
15. Parks P. C., Pritchard A. J. On the construction and use of Liapunov functionals // IFAC, Techn. session. Stability, NOT.— Warszawa, 1969.— V. 20.— P. 59.
16. Leipholz H. Stability of elastic systems.— Alphen aan Rijn: Sijthoff et Noordhoff, 1980.
17. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
18. Кириченко Н. Ф. Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972.
19. Байрамов Ф. Д. О технической устойчивости систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Авиационная техника.— 1974.— № 2.
20. Сиразетдинов Т. К. Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последствием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения.— Новосибирск: Наука, 1981.
21. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1976.
22. Матвийчук К. С. Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 2.
23. Матвийчук К. С. К вопросу о технической устойчивости систем с элементами демпфирования // ПМ.— 1983.— Т. 19, № 5.
24. Матвийчук К. С. Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 11.
25. Скоробогатко В. Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев: Наук. думка, 1980.
26. Szarski J. Differential inequalities.— Warszawa: PWN, 1967.

Поступила 8/IX 1987 г.

УДК 534.222.2

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО СФЕРОИДА

К. П. Рождественский, Л. А. Толокошников

(Тула)

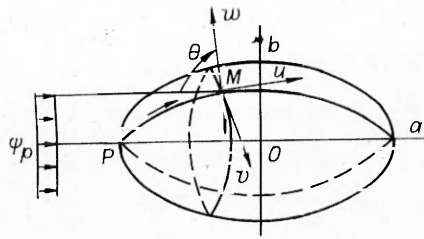
Известно, что в поле звуковой волны около различных препятствий могут возникать стационарные вихревые потоки (акустические течения). Данное явление исследовалось в ряде работ, часть из которых рассмотрена в обзорах [1—3], где наиболее пристальное внимание уделено течениям около тел правильной геометрической формы (плоскость, труба, цилиндр, сфера) в поле стоячих волн без учета теплопроводности. Влияние теплопроводности на возникновение потоков в пограничном слое при наклонном падении бегущей звуковой волны на плоскость рассмотрено в [4].

В настоящей работе определяются акустические течения в пограничном слое, возникающие в реальной среде под воздействием плоской бегущей звуковой волны, падающей вдоль оси вращения вытянутого сфероида.

Решение для скорости акустических течений может быть получено из основных уравнений движения вязкой жидкости методом последовательных приближений. Оно имеет вид [1]

$$(1) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{V}_2 = \nabla p_2 - \mathbf{F};$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = -\rho_0 \langle (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \nabla \mathbf{V}_1 \rangle,$$



Р и с. 1

где V_2 — скорость акустического течения; p_2 — малая поправка к давлению в звуковой волне; \bar{F} — усредненная по времени сила, которая находится по полю первого порядка малости V_1 , соответствующему решению уравнений движения вязкой теплопроводной жидкости в линейной постановке; ρ_0 — плотность не возмущенной звуком среды; μ — динамический коэффициент вязкости.

Пусть на вытянутый абсолютно жесткий сфероид вдоль оси вращения падает плоская звуковая волна с потенциалом скоростей ψ_p (рис. 1). Полагаем, что сфероид идеально проводит тепло. Рассмотрим случай, когда длина волны много меньше размеров сфероида. Определим выражение для V_1 . Решение будем искать в пограничном слое сфероида, где наиболее существенно влияние вязких и тепловых волн. Причем изучению подлежит лишь освещенная область, так как в тени, по нашему предположению, рассеянное поле отсутствует.

Для установившегося режима колебаний с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ полная система уравнений движения сплошной среды, описывающая малые возмущения, может быть приведена к системе уравнений Гельмгольца [5]:

$$(3) \quad \Delta\psi_1 + k_{11}^2\psi_1 = 0, \quad \Delta\psi_2 + k_{12}^2\psi_2 = 0, \quad \Delta\Phi + k_2^2\Phi = 0,$$

где ψ_1 , ψ_2 , Φ — соответственно потенциалы продольных, тепловых и вязких волн;

$$(4) \quad V_1 = \nabla\psi + \nabla \times \Phi.$$

Здесь $\psi = \psi_1 + \psi_2$; $\psi_1 = \psi_p + \psi_s$; ψ_s — потенциал рассеянной волны. В случае, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности малы, $k_{11} \approx \omega/c$, $k_{12} \approx \alpha(1+i)$, $k_2 \approx \beta(1+i)$, $\alpha = \sqrt{\omega/2\kappa_0}$, $\beta = \sqrt{\omega/2\nu}$ (ω — частота колебаний, c — скорость звука, κ_0 — коэффициент температуропроводности, ν — кинематический коэффициент вязкости). Решение системы (3) ищем методом локального поля, предполагая, что акустическое поле малой окрестности точки поверхности зависит лишь от падающей волны и геометрической формы участка поверхности. Окрестность точки поверхности M выбираем так, чтобы толщина области δ была много меньше ее боковых размеров τ ($\delta \ll \tau$). При этом $\delta = \max\{\alpha^{-1}; \beta^{-1}\}$. Воспользуемся локальной криволинейной ортогональной системой координат u, v, w . Систему (3) тогда запишем в форме

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial w^2} + (\kappa_u + \kappa_v) \frac{\partial \psi_1}{\partial w} + k_{11}^2 \psi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial w^2} + (\kappa_u + \kappa_v) \frac{\partial \psi_2}{\partial w} + k_{12}^2 \psi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} + (\kappa_u + \kappa_v) \frac{\partial \Phi}{\partial w} + k_2^2 \Phi = 0,$$

где $\kappa_u = (ab)^{-2}(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$ и $\kappa_v = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \times (b^2 \sin^2 \theta)^{-1}$ — кривизны точки поверхности.

При выводе системы (5) учитывалась симметрия задачи ($\psi_1 = \psi_1(u, w)$, $\psi_2 = \psi_2(u, w)$, $\Phi = \Phi(u, v)e_v$), а также то обстоятельство, что в качестве характерной длины l ($l \gg \tau$) выбиралась длина звуковой волны и все члены порядка $(\delta/l)^2$ были отброшены.

Граничные условия для решения (5) имеют вид

$$(6) \quad V_{1u} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \kappa_v \Phi \Big|_{w=0} = 0, \\ V_{1w} = \frac{\partial \Psi}{\partial w} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Big|_{w=0} = 0, \quad T = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{i\omega\gamma}{c^2} \Psi + \frac{i}{\omega} \Delta \Psi \right) \Big|_{w=0} = 0.$$

Здесь T — акустическая температура среды; α' — коэффициент температурного расширения среды; $\gamma = c_p/c_v$.

Решение (5) ищем в виде плоских волн. Если потенциал падающей волны в локальных координатах $\psi_p = \exp [i(k_{1u} \sin \theta - k_{1w} \cos \theta - \omega t)]$, где $k_1 \approx k_{11} - (i/2)(\kappa_u + \kappa_v) \cos \theta$, то для потенциалов рассеянных волн справедлива запись: $\psi_s = A \exp [i(k_{11u}u + k_{11w}w - \omega t)]$, $\psi_2 = B \exp [i(k_{12u}u + k_{12w}w - \omega t)]$, $\Phi = C \exp [i(k_{2u}u + k_{2w}w - \omega t)]$ (A, B, C — амплитуды волн, которые находятся из граничных условий (6)). При этом, согласно закону Снеллиуса о равенстве фазовых скоростей падающей и рассеянной волн, $k_{11u} = k_{12u} = k_{2u} = k_1 \sin \theta$, а выражения $k_{11w} = k_{11} \cos \theta + (i/2)(\kappa_u + \kappa_v)(1 + \sin^2 \theta)$, $k_{12w} = k_{12} + (i/2)(\kappa_u + \kappa_v)$, $k_{2w} = k_2 + (i/2)(\kappa_u + \kappa_v)$ удовлетворяют дисперсионным уравнениям, соответствующим системе (5).

Следует заметить, что данное решение непригодно в полюсе P сфероида, где κ_v обращается в бесконечность. Теперь, найдя V_1 по формуле (4), можно определить V_2 . Используя тот факт, что решение задачи ищем в тонком пограничном слое, членом ∇p_2 в уравнении (1) будем пренебрегать, как это сделано в [4]. После нахождения силы \mathbf{F} из (2) видим, что ее касательная компонента много больше нормальной ($F_u \gg F_w$), как и должно быть согласно теории пограничного слоя [1—4]. Тогда $\mathbf{F} = F_u(u, w)\mathbf{e}_u$ (\mathbf{e}_u — орт координатной оси u). Аналогичная запись справедлива для скорости течения $\mathbf{V}_2 = V_2(u, w)\mathbf{e}_u$, которая, так же как и сила, будет направлена вдоль оси u .

С учетом вышеуказанных предположений интегрируем систему уравнений (1), (2) с граничными условиями $V_2|_{w=0} = 0$, $\partial V_2/\partial w|_{w \rightarrow \infty} = 0$. Тогда для скорости акустического течения получим

$$(7) \quad V_2 = f \exp [(\kappa_u + \kappa_v) \sin \theta \cos \theta u] \{ \exp [\beta(i-1)w] - 1 \} + \text{к. с.},$$

где к. с. — комплексно-сопряженная величина; $f = \beta^2 C \left[\left(k_{11} + i \frac{\kappa_u + \kappa_v}{2} \cos \theta \right) \cos \theta + \bar{A} \left(k_{11} \cos \theta - i \frac{\kappa_u + \kappa_v}{2} \right) (1 + \sin^2 \theta) \right] / \{ \nu \beta (i-1) \times [\beta(i-1) + \kappa_u + \kappa_v] \}$.

Отметим, что найденное значение V_2 представляет собой среднюю за несколько периодов скорость, которую имеют частицы среды, проходящие через данную точку, т. е. скорость с точки зрения Эйлера. На самом деле в эксперименте имеют дело с самими частицами и скорость здесь подразумевается в понимании Лагранжа. Поэтому для определения потока массы вводят скорость переноса $\mathbf{V}_T = \langle (\xi_1 \nabla) \mathbf{V}_1 \rangle$ (ξ_1 — вектор смещений частиц в звуковой волне, $\xi_1 = \int \mathbf{V}_1 dt$).

В нашем случае

$$(8) \quad \mathbf{V}_T = \frac{1}{i\omega} \exp [(\kappa_u + \kappa_v) \sin \theta \cos \theta u] \times \\ \times \left[\left(k_{11} - i \frac{\kappa_u + \kappa_v}{2} \cos \theta \right) \sin \theta + \right. \\ \left. + A \left(k_{11} \cos \theta + i \frac{\kappa_u + \kappa_v}{2} \right) (1 + \sin^2 \theta) \right] \times \\ \times \beta^2 \bar{c} \exp [-\beta(i+1)w] + \text{к. с.}$$

Черта сверху означает комплексно-сопряженную величину.

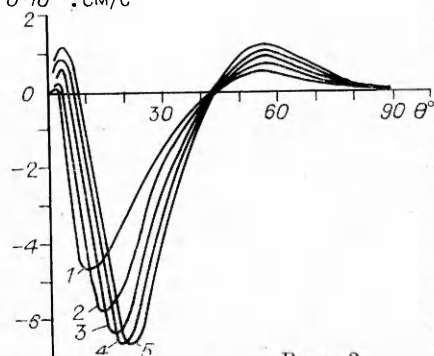


Рис. 2



Р и с. 3

Таким образом, средняя скорость потока массы $U = V_2 + V_T$. Расчеты скорости акустического течения проводились по полученным аналитическим выражениям (7), (8) для различных конфигураций сфероида и частот звуковой волны, когда содержащей средой является воздух. Результаты численных расчетов приведены на рис. 2, 3 (частота падающей волны 1 и 5 МГц соответственно), где показано распределение скорости U на расстоянии одной длины вязкой волны от поверхности в зависимости от угла θ между нормалью сфероида и направлением падения волны. Кривые 1—5 построены для сфероидов с малой полуосью 1 см и большими полуосями 1, 2, 3, 4, 5 см. Как видно из графиков, скорость потока значительно возрастает с увеличением частоты падающей волны. С увеличением вытянутости сфероида происходит смещение вихря к оси вращения. Аналогичные качественные результаты для эллиптического цилиндра получены в [6].

Отметим, что формулы (7), (8) получены с погрешностью $(\delta/l)^2$. При этом $(\delta/l)^2 = \left[\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} / \frac{2\pi c}{\omega} \right]^2 = \frac{\nu\omega}{2\pi^2 c^2}$. При выбранных для численных расчетов значений частоты звуковых волн и характеристик содержащей среды эта погрешность имела порядок 10^{-6} . Расчеты проводились на ЭВМ ЕС 1033 с такой же точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ниборг В. Акустические течения // Физическая акустика.— М.: Мир, 1969.— Т. 2.— Ч. Б.
2. Зарембо Л. К. Акустические течения // Мощные ультразвуковые поля.— М.: Наука, 1968.
3. Галиуллин Р. Г., Ренин В. Б., Халитов П. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978.
4. Федоров А. Я., Цой П. И. Об акустических течениях в пограничном слое // ПМТФ.— 1978.— № 3.
5. Цой П. И. Дифракция цилиндрических и плоских стационарных звуковых волн на цилиндре в вязкой теплопроводной среде // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 3.
6. Сорокодум Е. Д., Тимошенко В. И. Об акустических течениях около эллиптического цилиндра при больших числах Рейнольдса // Акуст. журн.— 1973.— Т. 19, № 6.

Поступила 19/VIII 1987 г.

УДК 532 : 662.215.2

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ СОУДАРЕНИИ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Уткин
(Черноголовка)

Соударение плоских струй идеальной несжимаемой жидкости подробно рассмотрено в ряде работ [1—4]. Возникающая конфигурация течения в системе координат, связанной с точкой контакта, показана на рис. 1, где OC и OD — струи, соударяющиеся под углом $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; OA и OB — основной поток, направленный параллельно оси Ox , и обратная струя, составляющая угол χ с осью Ox ; O — точка контакта. Интерес к задаче объясняется тем, что столь простая модель достаточно хорошо описывает высокоскоростное косое соударение металлических пластин, в частности возникающие при этом волнообразование на границе соударения металлов и формирование обратной струи. Причем основные параметры обратной струи хорошо согласуются с расчетом в рамках идеальной несжимаемой жидкости [1, 2].