

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

С. А. Калоеров, А. А. Кошкин

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк, Украина  
E-mails: kaloerov@mail.ru, koshkin.andrey.aleksandrovich@gmail.com

Предложен приближенный метод определения напряженного состояния тонкой анизотропной плиты с упругими произвольно расположенными эллиптическими включениями. С использованием комплексных потенциалов задача сведена к задаче определения функций обобщенных комплексных переменных, которая в свою очередь сводится к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой с помощью сингулярных разложений. Представлены результаты численных исследований, позволивших выявить влияние жесткости упругих включений, расстояний между включениями, их геометрических характеристик на возникающие в плите изгибающие моменты. Установлено, что особенности распределения моментов вблизи вершин линейных упругих включений, характеризуемые коэффициентами интенсивности моментов, возникают только в случаях достаточно жестких и гибких включений.

**Ключевые слова:** анизотропная плита, изгиб плит, упругие включения, коэффициенты интенсивности моментов, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.15372/PMTF20170619

В работах [1, 2] предложены методы решения задач прикладной теории изгиба анизотропных плит, основанные на использовании комплексных потенциалов, и решен ряд задач для односвязных областей. В [3, 4] разработаны методы решения задач для многосвязных сред. В работе [5] даны общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит. Для того чтобы решение удовлетворяло граничным условиям, в [6] использовался дискретный метод наименьших квадратов, в [7] — обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК). Это позволило решать задачи для любых многосвязных областей с контурами произвольной конфигурации.

В настоящее время решено большое количество задач о пластине с эллиптическими (круговыми) упругими включениями, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [4, 6–9]. В работах [7, 10] рассмотрены пластины с линейными включениями (частный случай эллиптических включений). В случае поперечного изгиба такие задачи решены лишь для пластины с одним эллиптическим (круговым) включением [1, 2, 11], а также для пластин с линейным включением [11–13]. Однако случай изгиба многосвязной плиты с несколькими упругими включениями, в том числе линейными, не рассматривался.

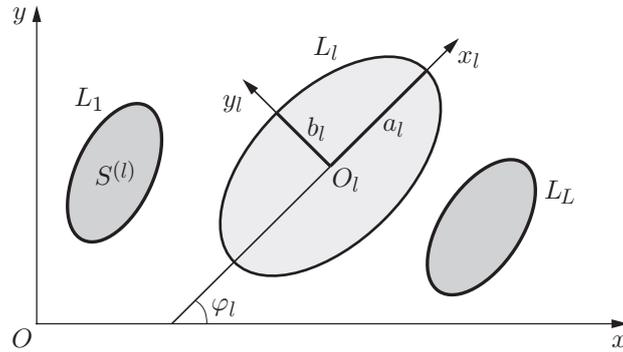


Рис. 1. Бесконечная плита с эллиптическими упругими включениями

В данной работе с использованием ОМНК впервые получено решение задачи об изгибе анизотропной плиты с рядом эллиптических или линейных упругих включений. Приведены результаты расчетов, позволившие исследовать влияние жесткости упругих включений, расстояний между ними, их геометрических характеристик на возникающие в плите изгибающие моменты.

**Постановка задачи и метод ее решения.** Рассмотрим бесконечную анизотропную плиту, занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ) с полуосями  $a_l, b_l$ , центрами в точках  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ . Полуоси  $a_l$  эллипсов образуют с осью  $Ox$  углы  $\varphi_l$  (рис. 1). В отверстия (области  $S^{(l)}$ ) без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других материалов, находящиеся в условиях идеального механического контакта с плитой. Плита на бесконечности находится под действием моментов  $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ . Лицевые поверхности плиты и включений не нагружены.

При использовании комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит решение задачи сводится к нахождению комплексных потенциалов  $W'_k(z_k)$  для плиты и  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  для включений из соответствующих граничных условий.

Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  для плиты являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{1}$$

где  $\mu_k$  — корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \tag{2}$$

$D_{ij} = B_{ij}D_0$  — жесткости материала плиты,

$$B_{11} = \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Delta}, \quad B_{12} = \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Delta}, \quad B_{16} = \frac{a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}}{\Delta},$$

$$B_{22} = \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Delta}, \quad B_{26} = \frac{a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11}}{\Delta}, \quad B_{66} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix},$$

$a_{ij}$  — коэффициенты деформации материала;  $D_0 = 2h^3/3$ ;  $h$  — полутолщина плиты. Функции  $W'_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными

преобразованиями (1), и в данном случае имеют вид [5, 6]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{klp}}{\zeta_{kl}^p}, \quad (3)$$

где  $\Gamma_k$  — постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0, \\ C_{11} &= \frac{2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2}{\Delta_1}, \quad C_{21} = \frac{2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}}{\Delta_1}, \quad C_{31} = \frac{2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22}}{\Delta_1}, \\ C_{12} &= \frac{D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}}{\Delta_1}, \quad C_{22} = \frac{D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}}{\Delta_1}, \quad C_{32} = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{\Delta_1}, \\ C_{13} &= \frac{2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}}{\Delta_1}, \quad C_{23} = \frac{2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2}{\Delta_1}, \quad C_{33} = \frac{2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26}}{\Delta_1}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$a_{klp}$  — неизвестные постоянные. Переменные  $\zeta_{kl}$  вычисляются с использованием конформных отображений внешности единичного круга  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ :

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}).$$

Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \quad R_{kl} = [a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2, \\ m_{kl} &= [a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/(2R_{kl}). \end{aligned} \quad (4)$$

Определив комплексные потенциалы, можно вычислить прогиб плиты, изгибающие моменты и поперечные силы [2–5]:

$$\begin{aligned} w &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k); \\ (M_x, M_y, H_{xy}, N_x, N_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k, \mu_k s_k, -s_k) W_k''(z_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \end{aligned}$$

Изгибающие моменты на площадках с нормалью  $n$  вычисляются по формуле [5]

$$M_n = M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \sin nx \cos nx.$$

Комплексные потенциалы  $W_k^{(l)}(z_k)$  ( $l = \overline{1, L}$ ) для включений являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (6)$$

где  $\mu_k^{(l)}$  — корни характеристических уравнений вида (2), в которых коэффициенты  $D_{ij}$  заменены на постоянные  $D_{ij}^{(l)}$  для включений. Эти функции определены в областях  $S_k^{(l)}$ , получаемых из областей  $S^{(l)}$  аффинными преобразованиями (6), голоморфны в областях  $S_k^{(l)}$  и могут быть разложены в ряды по полиномам Фабера, которые в результате преобразований представляются в виде степенных рядов [7, 10]

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp}^{(l)} \left( \frac{z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)}}{R_{kl}^{(l)}} \right)^p. \quad (7)$$

Здесь  $R_{kl}^{(l)}$ ,  $z_{kl}^{(l)}$  — постоянные, вычисляемые по формулам (4) для  $R_{kl}$  и  $z_{kl}$ , если в них  $\mu_k$  заменить на  $\mu_k^{(l)}$ ;  $a_{kp}^{(l)}$  — неизвестные постоянные.

Неизвестные постоянные  $a_{klp}$ ,  $a_{kp}^{(l)}$  определим из граничных условий на контурах плиты и включений [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (g_{kli} W_k'(z_k) - g_{kli}^{(l)} W_k'^{(l)}(z_k)) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} g_{kl1} &= 1, & g_{kl1}^{(l)} &= 1, & g_{kl2} &= \mu_k, & g_{kl2}^{(l)} &= \mu_k^{(l)}, \\ g_{kl3} &= p_k / \mu_k, & g_{kl3}^{(l)} &= p_k^{(l)} / \mu_k^{(l)}, & g_{kl4} &= q_k, & g_{kl4}^{(l)} &= q_k^{(l)}, \\ f_{l1} &= f_{l2} = 0, & f_{l3} &= -c_{lx} + c_{1l}, & f_{l4} &= -c_{ly} + c_{2l}, \end{aligned}$$

$c_l$  — вещественные постоянные;  $c_{1l}$ ,  $c_{2l}$  — комплексные постоянные.

Для того чтобы были выполнены граничные условия (8), будем использовать ОМНК [7]. Для этого выберем на контурах контактов плиты и включений набор точек  $t_{lm} = x_{lm} + iy_{lm}$  ( $m = \overline{1, M_l}$ ) и подставим функции (3), (7) в граничные условия (8). В результате дифференцирования полученных равенств по дуге контура имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_k \left( \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^{\infty} g_{kli} \varphi'_{klp}(t_{km}) a_{klp} - \sum_{p=1}^{\infty} g_{kpp}^{(l)} \varphi'_{kpp}^{(l)}(t_{km}) a_{kpp}^{(l)} \right) = \\ = \frac{df_{li}(t_{km})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_k g_{kli} \Gamma_k \quad (l = \overline{1, L}, m = \overline{1, M_l}, i = \overline{1, 4}). \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi'_{klp} &= -\frac{p}{\zeta_{kl}^{p-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl}) R_{kl}}, & \varphi'_{kpp}^{(l)} &= \frac{p(z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)})^{p-1}}{(R_k^{(l)})^p}, \\ \delta_k &= dt_k/ds, & t_{km} &= x_m + \mu_k y_m, & t_{km}^{(l)} &= x_m + \mu_k^{(l)} y_m. \end{aligned}$$

Систему (9) дополним уравнениями однозначности функции прогиба  $w(x, y)$  при обходе по каждому отверстию в плите [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{jkl1} R_{kl} = 0 \quad (l = \overline{1, L}).$$

После нахождения псевдорешений дополненной системы (9) с использованием сингулярных разложений [14] постоянные  $a_{klp}$ ,  $a_{kp}^{(l)}$ , а следовательно, и функции (3), (7) будут известны, и по ним можно найти изгибающие моменты и перерезывающие силы (5). Если включение  $S^{(l)}$  переходит в прямолинейную упругую линию (соответствующее отверстие — в разрез), то можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ)  $k_1^\pm$  для моментов  $M_y^{(l)}$  в локальной системе координат с центром в точке  $O_l$  (см. рис. 1) и  $k_2^\pm$  для моментов  $H_{xy}^{(l)}$  в той же системе координат (индексы “—” и “+” соответствуют левой и правой вершинам включения). По аналогии с вычислением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в вершинах разрезов в пластинах [15] для КИМ получаем

$$k_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - r_k \sin 2\varphi_l) M_k,$$

$$k_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{1}{2} (q_k - p_k) \sin 2\varphi_l + r_k \cos 2\varphi_l \right) M_k.$$

Заметим, что в случае плиты с одним эллиптическим включением методом рядов можно получить также точное аналитическое решение вида

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, \quad W_k^{(1)}(z_k) = a_{k1}^{(1)} \frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}},$$

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left( \Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} \right), \quad (10)$$

$$(k_1^\pm, k_2^\pm) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (q_k, r_k) a_{k11},$$

где  $a_{k11}$ ,  $a_{k1}^{(1)}$  — постоянные, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка.

**Результаты численных расчетов.** Проведены численные исследования для плит из следующих материалов: КАСТ-В изотропный (материал М1) и стеклопластик косоугольной намотки (материал М2). Коэффициенты деформаций имели следующие значения: для материала М1  $a_{11} = 72,1 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{22} = 72,1 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{12} = -8,6 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{66} = 161,5 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>, для материала М2  $a_{11} = 10^8$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{22} = 2,8 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{12} = -0,77 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>,  $a_{66} = 27 \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup>. Коэффициенты деформации для материала включения выбирались следующим образом:  $a_{ij}^{(l)} = \lambda^{(l)} a_{ij}$  ( $\lambda^{(l)}$  — параметр относительной жесткости включения  $S^{(l)}$ ).

В расчетах количество членов  $N$  в рядах функций (3), (7) и количество точек коллокации  $M_l$  на контурах включений, в которых выполнялись условия (9), увеличивались до

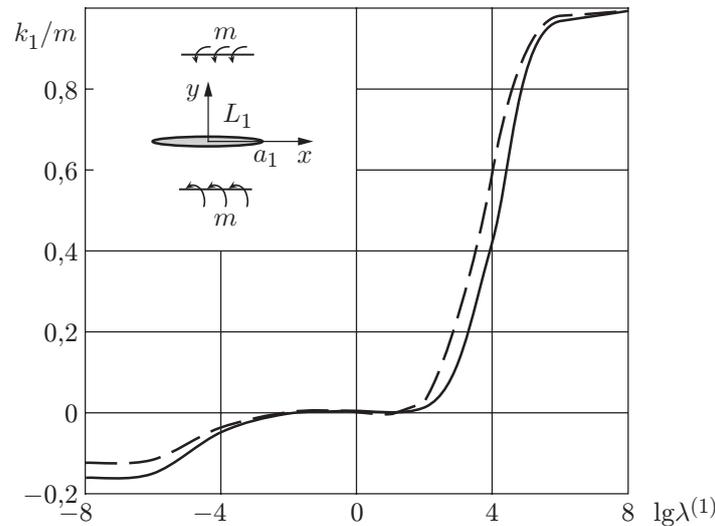


Рис. 2. Схема плиты с одним эллиптическим включением и зависимость КИМ от относительной жесткости этого включения: сплошная линия — материал М2, штриховая — материал М1

тех пор, пока граничные условия не выполнялись с необходимой степенью точности. Из результатов расчетов следует, что для этого в рядах для каждого отверстия и включения нужно сохранять от 7 до 20 членов и на каждом контуре выбирать от 50 до 1000 точек коллокации в зависимости от расстояний между включениями, а также от отношения полуосей эллипсов. Ниже приведены некоторые результаты, полученные в случае, когда на бесконечности  $M_y^\infty = m_y$ ,  $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$ .

В результате расчетов установлено, что на значения моментов существенное влияние оказывает отношение полуосей эллипсов. При  $b_1/a_1 < 10^{-3}$  можно считать включение линейным и вычислять для него КИМ. Из результатов расчетов также следует, что с уменьшением отношения  $b_1/a_1$  значения моментов  $M_s$  вблизи концов большой полуоси  $a_1$  резко увеличиваются по модулю и при малых значениях  $b_1/a_1$  можно вычислять КИМ. На рис. 2 приведена зависимость КИМ  $k_1^\pm$  от жесткости материала включения (параметра  $\lambda^{(1)}$ ). Видно, что при  $\lambda^{(1)} < 10^{-3}$  линейное включение можно считать абсолютно жестким, при  $\lambda^{(1)} > 10^3$  — абсолютно мягким (трещиной). При  $10^{-3} < \lambda^{(1)} < 10^3$  значения КИМ очень малы и ими можно пренебречь. Таким образом, в случае линейных упругих включений, жесткость материалов которых отличается от жесткости материала плиты менее чем в  $10^3$  раз, величиной КИМ можно пренебречь. Однако авторы работ [12, 13] считают, что этим коэффициентом пренебрегать нельзя. В случае абсолютно мягких линейных включений (трещин) их берега могут вступать в контакт, что следует учитывать при решении задач. Для предотвращения этого контакта необходимо прикладывать дополнительные растягивающие усилия. В случае плиты с одним включением приближенное решение, полученное с использованием ОМНК, совпадает с точным решением (10).

Также проведены расчеты для бесконечной плиты с двумя одинаковыми круговыми включениями (рис. 3) радиусом  $a_1$  ( $b_1 = a_2 = b_2 = a_1$ ) при различных расстояниях  $c$  между включениями и различных значениях параметра относительной жесткости  $\lambda^{(1)}$  ( $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}$ ). Из результатов расчетов следует, что при уменьшении расстояния между включениями значения моментов  $M_s$  в точках  $A$  и  $B$  увеличиваются. Если расстояние между включениями больше диаметра одного из них ( $c/a_1 > 2$ ), то влияние одного включения на напряженное состояние вблизи другого является незначительным и им можно

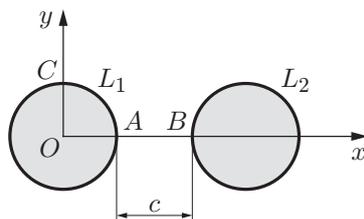


Рис. 3. Бесконечная плита с двумя одинаковыми круговыми включениями

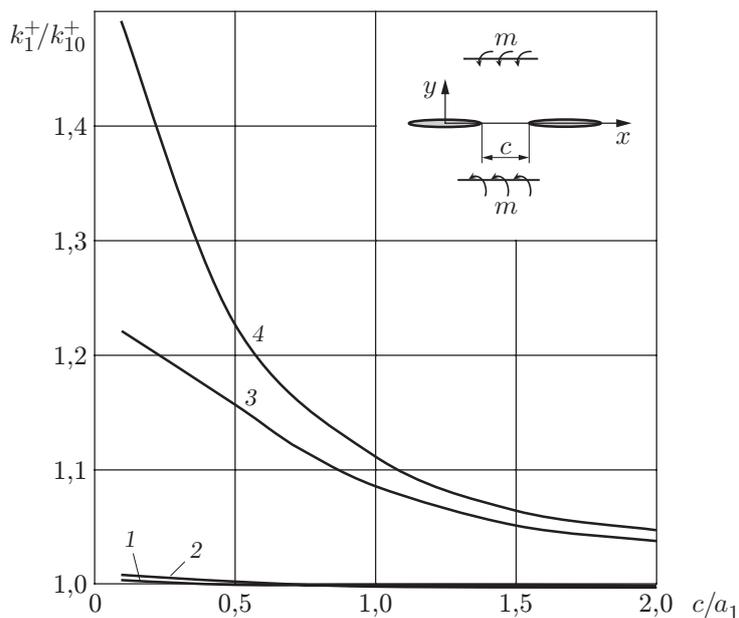


Рис. 4. Схема плиты с двумя линейными включениями и зависимость КИМ для правой вершины левого включения от расстояния между включениями: 1 —  $\lambda^{(1)} = 10^{-2}$ , 2 —  $\lambda^{(1)} = 10^2$ , 3 —  $\lambda^{(1)} = 0$ , 4 —  $\lambda^{(1)} = \infty$

пренебречь. При уменьшении жесткости включений (увеличении  $\lambda^{(1)}$ ) значения моментов  $M_s$  в окрестности точки  $A$  контура (см. рис. 3) увеличиваются, в окрестности точки  $C$  при  $\lambda^{(1)} > 1$  уменьшаются, при  $\lambda^{(1)} < 1$  увеличиваются.

На рис. 4 для изотропного материала М1 в случае двух линейных включений приведена зависимость отношения значения КИМ  $k_1^+$  в правой вершине левого включения к значению этого коэффициента для плиты с одним включением  $k_{10}^+$  от величины  $c/a_1$ . Для материала М2 соответствующая зависимость незначительно отличается от представленной на рис. 4. Из приведенных результатов расчетов следует, что с уменьшением расстояния между линейными включениями значения КИМ для “внутренних” вершин включений значительно увеличиваются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикл. математика и механика. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 181–209.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

3. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. 1967. Вып. 3. С. 97–127.
4. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев; Донецк: Вища шк., 1976.
5. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикл. механика. 2012. № 4. С. 115–136.
6. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А. С. К., 1998. С. 10–26.
7. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки. 2006. Вип. 2. С. 77–88.
8. Hwu C., Yen Wen J. On the anisotropic elastic inclusions in plane elastostatics // J. Appl. Mech. 1993. V. 60. P. 626–632.
9. Hwu C. Anisotropic elastic plates. N. Y.: Springer, 2010.
10. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках // С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. Донецк: Изд-во Донец. нац. ун-та, 2013.
11. Hsieh M. C., Hwu C. Anisotropic elastic plates with holes/cracks/inclusions subjected to out-of-plane bending moments // Intern. J. Solids Structures. 2002. V. 39, N 19. P. 4905–4925.
12. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 993–1000.
13. Стащук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. Киев: Наук. думка, 1993.
14. Фортсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Фортсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1969.
15. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред // Прикл. механика. 2007. Т. 43, № 6. С. 56–62.

*Поступила в редакцию 21/V 2016 г.,  
в окончательном варианте — 12/IX 2016 г.*

---